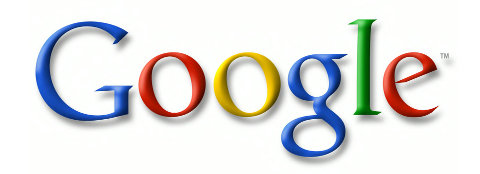


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

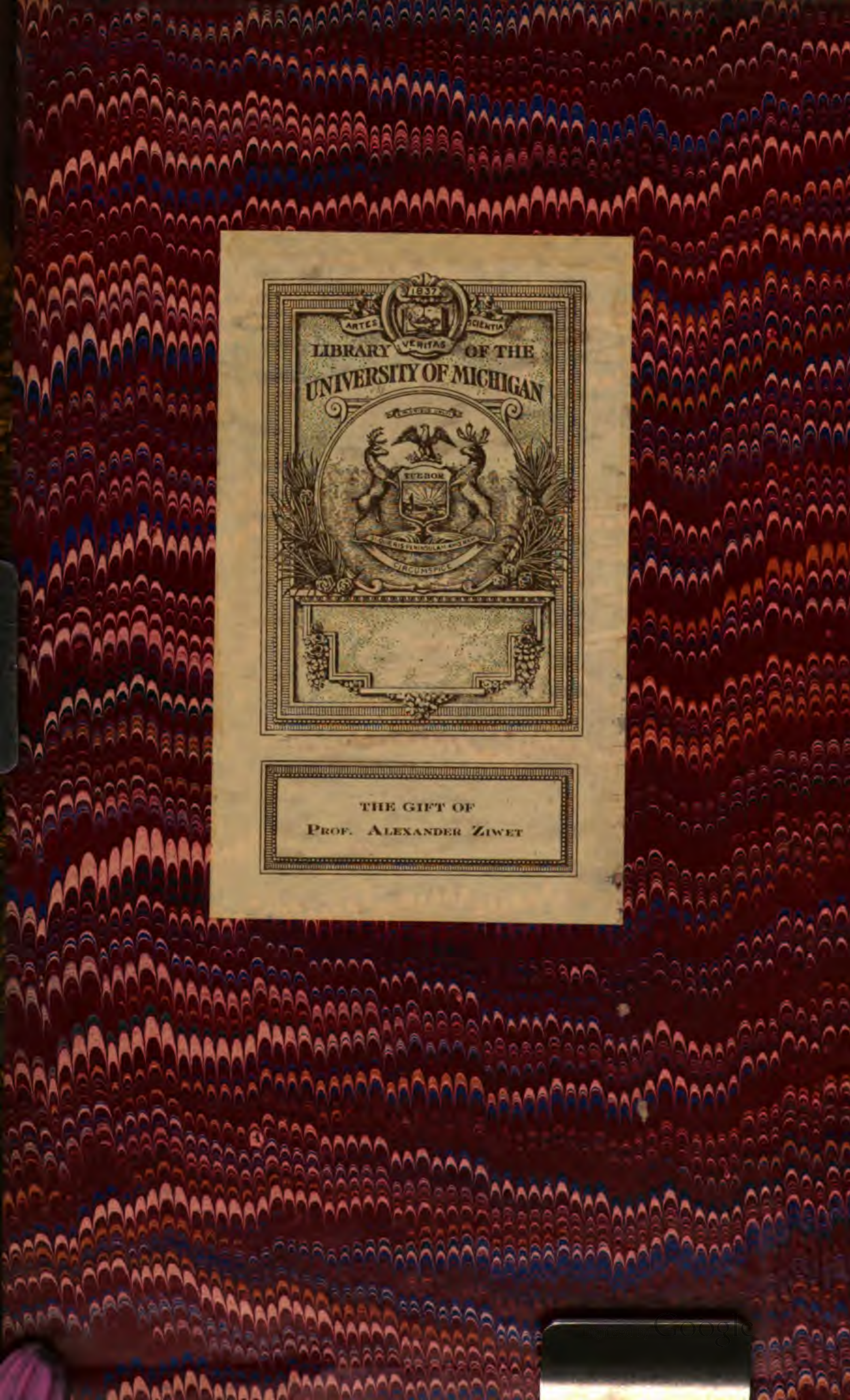
We also ask that you:

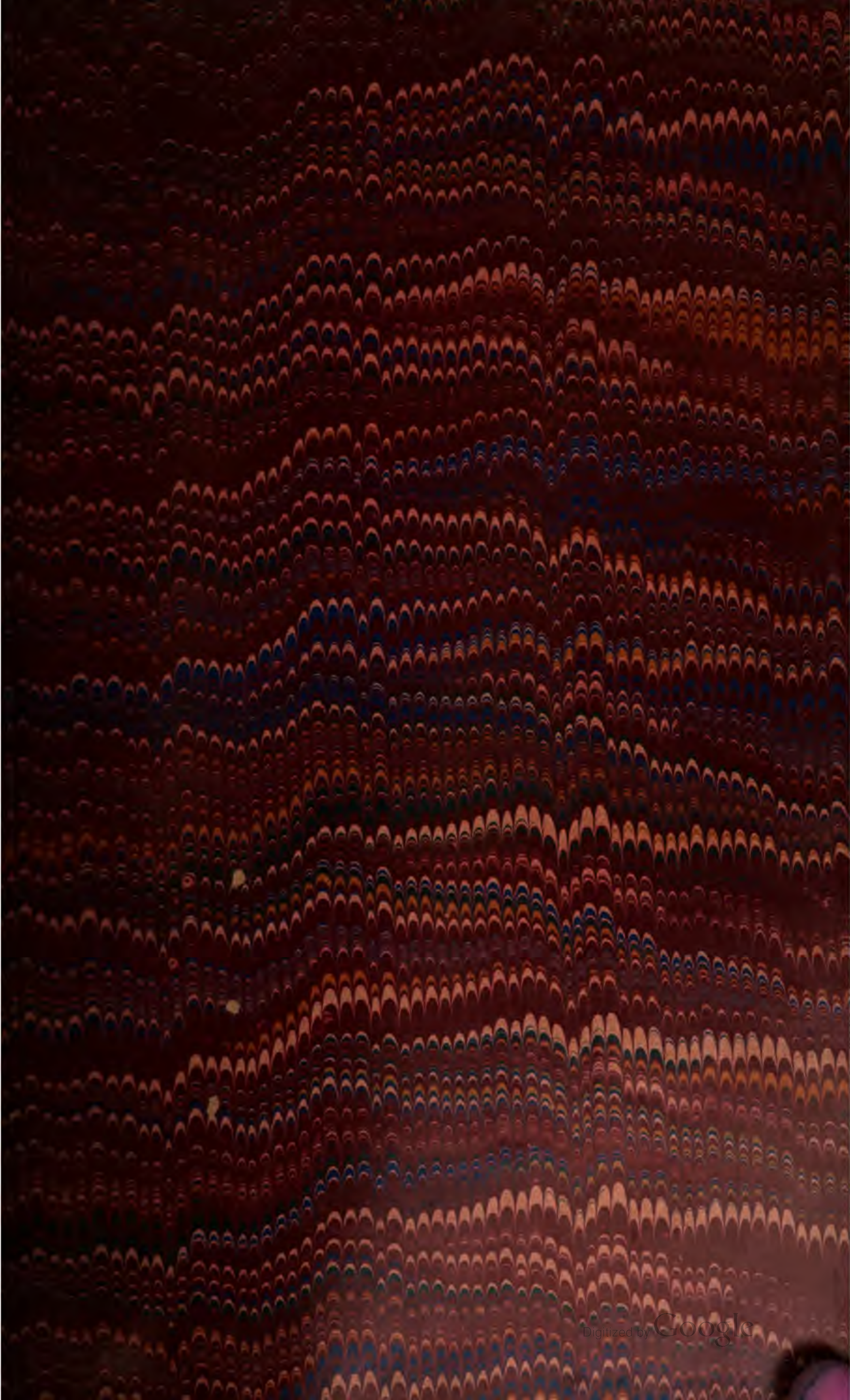
+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


B 452267
Digitized by Google


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET


Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
315
.S91
1854

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
315
.S91
1854

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Alexander Ziwet

THEORIE UND ANWENDUNG

des sogenannten

VARIATIONSCALCUL'S

von

Dr. G. W. STRAUCH.

ZWEITER BAND.

ZWEITE AUSGABE.

ZÜRICH,

VERLAG VON MEYER & ZELLER.

1854.

Digitized by Google

ZWEITE ABTHEILUNG.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Differentiale vorkommen.

A) Aufgaben, wo nur eine einzige Function mit einem einzigen absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht wird.

Aufgabe 61.

Welche unter allen auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = a \cdot y^2 + b \cdot x \cdot y + c^2 \cdot y + \frac{b \cdot e}{a} \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + e \cdot x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht.

Einleitung.

A) Hier ist x irgend eine beliebige Abscisse und y ist die zugehörige Ordinate der gesuchten Curve. Die Ordinaten aller Curven, welche der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegen, werden (nach §. 60) dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Function von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. ganz willkürliche reelle Functionen von x sind.

B) Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ ist die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe und von der zur Abscisse x gehörigen Berührenden der gesuchten Curve eingeschlossen wird. Es ist also (nach §. 87) durch die Reihe

$$\text{III)}\quad \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

die goniometrische Tangente der Winkel dargestellt, welche von der Abscissenaxe und von den zur Abscisse x gehörigen Berührenden der der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven eingeschlossen werden.

C) Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ ist aber auch die goniometrische Cotangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe und von der zur Abscisse x gehörigen Normale der gesuchten Curve eingeschlossen wird; und dabei ist durch die Reihe III die goniometrische Cotangente der Winkel dargestellt, welche von der Abscissenaxe und von den zur Abscisse x gehörigen Normalen der der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven eingeschlossen werden.

Auflösung.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = (2ay + bx + c^2) \cdot \delta y + e \cdot x^2 \cdot \left(\frac{b}{a} + 2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

383895

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = (2ay + bx + c^2)\cdot\delta^2 y + e\cdot x^2\cdot\left(\frac{b}{a} + 2\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ 2a\cdot\delta y^2 + 2ex^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei derselben Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven machen können; so sind (nach §. 91) δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz willkürlich und unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen also jetzt (nach §. 183) die zwei identischen Gleichungen

$$1)\quad 2ay + bx + c^2 = 0,\qquad \text{und } 2)\quad \frac{b}{a} + 2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

gleichzeitig nebeneinander bestehen. Integrirt man die zweite, so bekommt man

$$3)\quad 2a\cdot y + bx + A = 0$$

Da aber durch diese Integralgleichung auch die Gleichung 1 identisch gemacht werden muss; so ist $A = c^2$ zu setzen. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich V auf

$$\delta^2 U = 2a\cdot\delta y^2 + 2\cdot e\cdot x^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass es jetzt nur auf a und e ankommt, ob

$$U' = -a\cdot\left(\frac{bx + c^2}{2a}\right)^2 - e\cdot\left(\frac{bx}{2a}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist. Sind nemlich a und e gleichzeitig negativ, so ist $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ, und U' ein Maximum-stand; sind a und e gleichzeitig positiv, so ist $\delta^2 U$ unter allen Umständen positiv, und U' ein Minimum-stand, wobei man jedoch beachten muss, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht; sind aber a und e einander entgegengesetzt, so kann $\delta^2 U$ weder für positiv noch negativ gelten, so dass dabei weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

- α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
- β) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben;

so haben alle Curven, die hier in Betracht gezogen werden dürfen, bei der grade gewählten Abscisse x einerlei Ordinate. Desshalb besteht jetzt zwischen der Ordinate der gesuchten und den Ordinaten aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung

$$\text{VI)}\quad y = y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots$$

Es muss also (nach §. 181 A) bei dem grade gewählten Werthe des x einzeln sein $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$ etc. Hierbei reducirt sich Gleichung IV auf

$$\delta U = e\cdot x^2\cdot\left(\frac{b}{a} + 2\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Man hat daher jetzt die einzige identische Gleichung

$$4)\quad \frac{b}{a} + 2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$5)\quad 2ay + bx + B = 0$$

Digitized by Google

Der Constante B ist willkürlich, und kann z. B. bestimmt werden, wenn man verlangt, dass die gesuchte Curve durch den festen Punkt (α, β), d. h. durch einen Punkt, dessen Abscisse $= \alpha$ und dessen Ordinate $= \beta$ ist, gehen soll. Dabei geht Gleichung 5 über in

$$6)\quad 2a\beta + b\alpha + B = 0$$

Daraus folgt $B = -2a\beta - b\alpha$, und statt Gleichung 5 gibt sich nun

$$7)\quad 2ay + bx = 2a\beta + b\alpha$$

Unter den hier gemachten Voraussetzungen reducirt sich Gleichung V auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot e \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass es jetzt auf e allein ankommt, ob

$$U' = -a \cdot \left(\left(\frac{bx + c^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{B - c^2}{2a}\right)^2\right) - e \cdot \left(\frac{bx}{2a}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Da das Vorhandensein eines dieser beiden Zustände hier von e allein abhangt, so muss jetzt nothwendig jedesmal entweder ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden, während im ersten Falle erforderlich ist, dass a und e einerlei Zeichen haben. Diese Erscheinung, dass im ersten Falle nicht so oft ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, als im zweiten, ist aber eine Folge grade des Umstandes, dass hier nicht soviele Nachbarcurven mit der gesuchten Curve verglichen werden, als dort.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Berührenden mit der Berührenden der gesuchten Curve parallel haben;

so schliesst die Abscissenaxe mit den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührenden aller Curven, die hier in Betracht gezogen werden dürfen, einen gleichgrossen Winkel ein. Desshalb besteht (siehe die in dieser Aufgabe befindliche Einleitung, B) jetzt für alle in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung:

$$\text{VII)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

Es muss also (nach §. 181 B) bei dem grade gewählten Werthe des x einzeln sein $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^3 y}{dx} = 0$ etc. Hierbei reducirt sich Gleichung IV auf

$$\delta U = (2ay + bx + c^2) \cdot \delta y$$

Man hat daher auch jetzt eine einzige identische Gleichung

$$8)\quad 2ay + bx + c^2 = 0$$

welche als Urgleichung keinen willkürlichen Constanten mehr enthält. Unter der hier gemachten Voraussetzung reducirt sich Gleichung V auf

$$\delta^2 U = 2a \cdot \delta y^2$$

so dass es jetzt auf a allein ankommt, ob

$$U' = -a \cdot \left(\frac{bx + c^2}{2a}\right)^2 - e \cdot \left(\frac{bx}{2a}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Das Resultat des ersten Falles unterscheidet sich also von dem dieses dritten Falles nur dadurch, dass hier das Vorhandensein eines der beiden ausgezeichneten Zustände von a allein, dort aber von a und e zugleich abhängig ist. Man hat also abermals die Erscheinung, dass im ersten Falle nicht so oft ein Maximum-stand oder Minimum-stand

Digitized by Google

stattfindet, als in diesem dritten Falle, welches wieder eine Folge des Umstandes ist, dass hier nicht soviele Nachbarcurven mit der gesuchten Curve verglichen werden, als dort.

Aufgabe 62.

Welche Function y von x hat bei jedem Werthe des x die Eigenschaft, dass sie folgenden Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = h^2 \cdot x^2 + \frac{h^4 \cdot x^2}{x^2 - h^2} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y^2 - (h^2 \cdot x^2 + h^2 \cdot xy) \cdot \frac{dy}{dx} + h^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht?

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \left(h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + \left(2h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot x \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = \left(h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta^2 y + \left(2h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot xy\right) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ h^2 \cdot \delta y^2 - 2h^2 \cdot x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot h^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man für y eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so sind (nach §. 91) δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen jetzt (nach §. 183) die zwei identischen Gleichungen

$$1)\quad h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{und } 2)\quad 2h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot xy = 0$$

zugleich stattfinden. Man hat nun zwei Wege, die gesuchte Function y von x aufzufinden.

Erstens. Lässt man bei Gleichung 1 den gemeinschaftlichen Factor weg, so hat man $x \cdot dy - y \cdot dx = 0$. Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{x^2}$ multiplicirt; denn aus $\frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = 0$ folgt gradezu $\frac{y}{x} = B$, und daraus folgt weiter

$$3)\quad y = B \cdot x$$

Durch diese Function muss aber auch Gleichung 2 identisch werden. Zu diesem Ende führe man Bx statt y, und B statt $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 2 überall ein, und reducire soviel als möglich; so bekommt man

$$2B \cdot h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot x^2 - B \cdot h^2 \cdot x^2 = 0$$

Daraus folgt $B = 1$; und Gleichung 3 geht über in

$$4)\quad y = x$$

welches die gesuchte Function y von x ist. Dabei reducirt sich Gleichung II auf

$$\delta^2 U = h^2 \cdot \left(\left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)$$

woran man erkennt, dass $U' = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \frac{x^2 \cdot (x^2 + h^2)}{x^2 - h^2}$ ein Minimum-stand ist.

Digitized by Google

Zweitens. Man kann aber auch aus 1 und 2 den Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und so ohne Integration zu der gesuchten Function y von x gelangen. Zu diesem Ende wird man aus Gleichung 1 bekommen

$$5)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Diesen Ausdruck führe man in 2 ein, so gibt sich $h^2 \cdot x \cdot (y - x) = 0$; und man hat

$$6)\quad y = x$$

Diese Function soll die Gleichungen 1 und 2 zugleich identisch machen, was noch besonders untersucht werden muss.

Man hat also jetzt genau dasselbe Resultat, wie vorher.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

- α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
- β) bei dem gerade gewählten Werthe des x alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen;

so findet hierbei zwischen allen Functionen, die jetzt in Betracht gezogen werden dürfen, folgende Gleichung

$$\text{IV)}\quad y = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

statt. Es muss also (nach §. 181. A) bei dem gerade für x genommenen Werthe einzeln sein $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$, etc.; und Gleichung II reducirt sich jetzt auf

$$\delta U = \left(2 \cdot h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot x \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Man hat daher jetzt nur die einzige Gleichung

$$7)\quad 2h^2 \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot x^2 - h^2 \cdot xy = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$8)\quad 2x \cdot dy - x \cdot dx - y \cdot dx = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem Factor $\frac{1}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt. Dadurch bekommt man

$$9)\quad \frac{2x \cdot dy - y \cdot dx}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} - \frac{dx}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Also ist

$$10)\quad \frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = C$$

oder mit Aenderung des Constanten

$$11)\quad y - x = \sqrt{E \cdot x}$$

oder

$$12)\quad (y - x)^2 = E \cdot x$$

Der willkürliche Constante E macht, dass man die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterwerfen kann. Da sich jetzt Gleichung III auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot h^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

zurückzieht; so erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Digitized by Google

Besondere Berücksichtigung verdient die Specialität, wo $E = 0$ ist; denn dabei ist $y = x$, wie in Gleichung 4 oder 6. Die Gleichung 4 oder 6 ist also nur eine Specialität von 12, und kein singuläres Integral zu 8 oder zu 7 oder zu 2.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem gerade für x genommenen Werthe alle ihrem ersten Differentialquotient den gleichen Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so findet hierbei zwischen dem ersten Differentialquotient der gesuchten Function und dem aller jener Functionen, die jetzt in Betracht gezogen werden dürfen, folgende Gleichung

$$\text{V)}\quad \frac{d'y}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

statt. Es muss also (nach §. 181. B) bei dem gerade für x genommenen Werthe einzeln sein $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. Hierbei reducirt sich Gleichung II auf

$$\delta U = \left(h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$13)\quad h^2 \cdot y - h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Lässt man hier den gemeinschaftlichen Factor weg, so bekommt man $x \cdot dy - y \cdot dx = 0$, woraus (nach der schon beim ersten Falle angewendeten Methode) folgt

$$14)\quad y = G \cdot x$$

Der willkürliche Constante G macht, dass man die Aufgabe noch einer weitern Bedingung unterwerfen kann. Da sich hier Gleichung III auf

$$\delta^2 U = h^2 \cdot \delta y^2$$

reducirt; so findet ein Minimum-stand statt.

Besondere Berücksichtigung verdient die Specialität, wo $G = 1$; denn dabei ist $y = x$, wie in Gleichung 4 oder 6. Die Gleichung 4 oder 6 ist also nur eine Specialität von 14, und kein singuläres Integral zu 1 oder zu 13.

Aufgabe 63.

Man hat wieder den in voriger Aufgabe gestellten Ausdruck, und sucht für y eine solche Function von x, und zugleich für x einen solchen Werth, dass dabei U ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Der gemischte Mutationscoefficient der ersten Ordnung ist hier

$$\begin{aligned}{}_{(}\delta_{)}U = h^2 \cdot \left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + h^2 \cdot x \cdot \left(2x \cdot \frac{dy}{dx} - x - y\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ + \Bigg[h^2 \cdot \left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + h^2 \cdot x \cdot \left(2x \cdot \frac{dy}{dx} - x - y\right) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + \frac{2h^2 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2h^2)}{(x^2 - h^2)^2} - 2h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2h^2 \cdot x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\Bigg] \cdot \vartheta x\end{aligned}$$

Erster Fall. Sucht man für y eine solche Function, welche bei dem gesuchten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so sind, obgleich der gesuchte Werth des x ein fester

Digitized by Google

Werth ist, dennoch (nach §. 92) die Werthe des δy und des $\frac{d\delta y}{dx}$ ganz voneinander unabhängig und willkürlich. Es werden die bei δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ befindlichen Factoren zu identischen Gleichungen, d. h. es ist gleichzeitig

$$1)\quad y - x\cdot\frac{dy}{dx} = 0,\qquad \text{und } 2)\quad 2x\cdot\frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

Daraus folgt $y = x$; und in Folge alles Vorhergehenden zieht sich der bei ϑx befindliche Factor zurück auf

$$3)\quad \frac{h^2\cdot x\cdot(x^4 - 2\cdot h^2\cdot x^2 - h^4)}{(x^2 - h^2)^2}$$

Setzt man diesen Factor gleich Null, so bekommt man die nichtidentische Gleichung

$$4)\quad x\cdot(x^4 - 2h^2\cdot x^2 - h^4) = 0$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = h\cdot\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$. Man hat also für x folgende fünf Werthe: $x' = 0$, $x'' = h\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $x''' = -h\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $x'''' = h\cdot\sqrt{1-\sqrt{2}}$, $x''''' = -h\cdot\sqrt{1-\sqrt{2}}$. Die zwei letzten Werthe sind imaginär, und können hier, wo vom Grössten und Kleinsten die Rede ist, nicht berücksichtigt werden. Im Allgemeinen ist jetzt

$$\delta^2 U = h^2\cdot\left(\left(\delta y - x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) + h^2\cdot\frac{5x^4 - 6h^2\cdot x^2 - h^4}{(x^2 - h^2)^2}\cdot\vartheta x^2$$

und

$$U' = \frac{1}{2}\cdot h^2\cdot x^2\cdot\frac{x^2 + h^2}{x^2 - h^2}$$

Erstens. Setzt man $x = 0$, so ist auch $U'' = 0$, und

$$\delta^2 U = h^2\cdot\left(\left(\delta y - x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) - h^2\cdot\vartheta x^2$$

d. h. $U'' = 0$ ist ein Maximumwerth eines Minimum-standes; denn für die der Null nächstanliegenden Nachbarwerthe des x ist

$$U'' + DU = \frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(0 + Dx)^2\cdot\frac{(0 + Dx)^2 + h^2}{(0 + Dx)^2 - h^2} = -\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot Dx^2\ \ldots\ldots$$

negativ, und ein negativer Werth gilt für kleiner als Null.

Zweitens. Ist $x = \pm h\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}$, so ist $U'' = \frac{1}{2}\cdot h^4\cdot(1+\sqrt{2})^2$, und

$$\delta^2 U = h^2\cdot\left(\left(\delta y - x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(x\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) + h^2\cdot(4 + 2\sqrt{2})\cdot\vartheta x^2$$

und hieran erkennt man, dass ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfindet.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Function, welche bei dem gesuchten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem gesuchten Werthe des x alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{II)}\quad \delta U = h^2\cdot x\cdot\left(2x\cdot\frac{dy}{dx} - x - y\right)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

$$+ \Big[h^2\cdot\left(y - x\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + h^2\cdot x\cdot\left(2x\cdot\frac{dy}{dx} - x - y\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} +$$

Digitized by Google

$$+ \frac{2h^2 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2h^2)}{(x^2 - h^2)^2} - 2h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2h^2 x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Big] \cdot \vartheta x$$

Der Factor des Mutationscoëfficienten gibt die identische Gleichung

$$5) \quad 2x \cdot \frac{dy}{dx} - x - y = 0$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$6) \quad (y - x)^2 = E \cdot x\,.$$

In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich der Factor des Differenzcoefficienten auf

$$7) \quad \frac{h^2}{4} \times \frac{(4x + E) \cdot (x^2 - h^2)^2 - 8h^4 \cdot x}{(x^2 - h^2)^2}$$

Setzt man diesen Factor gleich Null, so bekommt man die nichtidentische Gleichung

$$8) \quad (4x + E) \cdot (x^2 - h^2)^2 - 8h^4 \cdot x = 0$$

Dieses ist eine Gleichung des fünften Grades, und liefert fünf Werthe für x. Auch enthält sie die Gleichung 4 als Specialität in sich. Im Allgemeinen ist jetzt

$$U' = \frac{h^2}{4} \times \frac{2x^2 \cdot (h^2 + x^2) + Ex \cdot (x^2 - h^2)}{x^2 - h^2}$$

und

$$(\delta^2 U = 2h^2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + h^2 \cdot \frac{(5x^2 + E \cdot x) \cdot (x^2 - h^2) - h^2 \cdot (x^2 + h^2)}{(x^2 - h^2)^2} \cdot \vartheta x^2$$

In primärer Beziehung besteht also ein Minimum-stand; was aber in secundärer Beziehung stattfindet, hangt zunächst vom Werthe des Constanten E ab.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Function, welche bei dem gesuchten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem gesuchten Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient den gleichen Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der gesuchten Function annimmt;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{III)} \quad (\delta_1 U = h^2 \cdot \left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y$$

$$+ \Big[h^2 \cdot \left(y - x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + h^2 \cdot x \cdot \left(2x \cdot \frac{dy}{dx} - x - y\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+ \frac{2h^2 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2h^2)}{(x^2 - h^2)^2} - 2h^2 \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} - h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2h^2 \cdot x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Big] \cdot \vartheta x$$

Der Factor des Mutationscoefficienten gibt die identische Gleichung

$$9) \quad y - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$10) \quad y = Gx$$

Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = G$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; der Factor des Differenzcoefficienten reducirt sich also auf

$$h^2 \times \frac{x \cdot (2x^4 - 4h^2 \cdot x^2 + G \cdot (G - 2) \cdot (x^2 - h^2)^2)}{(x^2 - h^2)^2}$$

Setzt man diesen Factor gleich Null, so bekommt man die nichtidentische Gleichung

Digitized by Google

$$11) \quad x \cdot (2x^4 - 4h^2 \cdot x^2 + G \cdot (G - 2) \cdot (x^2 - h^2)^2) = 0$$

Daraus folgt zunächst $x = 0$ und ausserdem noch vier Werthe für x. Auch in Gleichung 11 ist Gleichung 4 als Specialität enthalten. Im Allgemeinen ist jetzt

$$U' = h^2 \cdot \left(\frac{x^4}{x^2 - h^2} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot (G - 2) \cdot x^2\right)$$

und

$$\delta^2 U = h^2 \cdot \delta y^2 + \left(\frac{h}{x^2 - h^2}\right)^2 \cdot [2x^2 \cdot (5x^2 - 6h^2)$$
$$+ G \cdot (G - 2) \cdot (5x^4 - 6h^2 \cdot x^2 + h^4)] \cdot \vartheta x^2$$

In primärer Beziehung besteht also ein Minimum-stand; was aber in secundärer Beziehung besteht, hangt zunächst vom Werthe des G ab.

Aufgabe 64.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = h^2 \cdot x^2 + 2hx \cdot y^2 + (x^4 - h^2 \cdot y^2 - 4h^3 \cdot x) \cdot \frac{dy}{dx} + h^4 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \left(4hxy - 2h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + \left(2h^4 \cdot \frac{dy}{dx} + x^4 - h^2 \cdot y^2 - 4h^3 \cdot x\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \left(4hxy - 2h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta^2 y + \left(2h^4 \cdot \frac{dy}{dx} + x^4 - h^2 \cdot y^2 - 4h^3 \cdot x\right) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ \left(4hx - 2h^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y^2 - 4h^2 \cdot y \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2h^4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so müssen die zwei identischen Gleichungen

$$\text{III)} \quad 4hxy - 2h^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{und IV)} \quad 2h^4 \cdot \frac{dy}{dx} + x^4 - h^2 \cdot y^2 - 4h^3 \cdot x = 0$$

zugleich stattfinden. Die erste dieser Gleichungen lässt sich aber auf folgende Weise zerlegen: $2h \cdot y\left(2x - h \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Setzt man nun $y = 0$, d. h. lässt man y eine identische Function von x sein, so wird dadurch wohl Gleichung III, aber nicht auch Gleichung IV erfüllt. Also kann y keine identische Function von x sein. Setzt man aber $2x - h \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, so hat man jetzt folgende zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\text{V)} \quad 2x - h \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{VI)} \quad 2h^4 \cdot \frac{dy}{dx} + x^4 - h^2 \cdot y^2 - 4h^3 \cdot x = 0$$

Erstens. Aus V folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{h}$, und daraus gibt sich $y = \frac{x^2}{h} + A$, wo A noch ein willkürlicher Constanter ist. Führt man diese für $\frac{dy}{dx}$ und für y erhaltenen Ausdrücke in VI ein, so bekommt man

$$4h^3 \cdot x + x^4 - h^2 \cdot \left(\frac{x^4}{h^2} + \frac{2Ax^2}{h} + A^2\right) - 4h^3 \cdot x = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung wird aber nur identisch, wenn $A = 0$ gesetzt wird; und somit ist

$$\text{VII)}\quad y = \frac{x^2}{h}$$

ein den beiden Gleichungen III und IV gemeinschaftliches besonderes Integral. Da aber dabei Gleichung II sich zurückzieht auf $\delta^2 U = -4h \cdot x^2 \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2h^4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweitens. Aus Gleichung V folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{h}$; und wenn man diesen Ausdruck in Gleichung VI einsetzt, so ergibt sich $y^2 = \frac{x^4}{h^2}$, also $y = \pm \frac{x^2}{h}$. Man hat aber noch zu untersuchen, ob alle beiden für y gefundenen Formen, oder ob nur eine oder keine von beiden den Gleichungen V und VI genügen. Aus $y = \pm \frac{x^2}{h}$ folgt $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2x}{h}$, und dabei gehen die Gleichungen V und VI bezüglich über in

$$2x - h \cdot \left(\pm \frac{2x}{h}\right) = 0$$

und

$$2h^4 \cdot \left(\pm \frac{2x}{h}\right) + x^4 - h^2 \cdot \left(\pm \frac{x^2}{h}\right)^2 - 4h^3 \cdot x = 0$$

An diesen beiden Gleichungen erkennt man, dass nur $y = +\frac{x^2}{h}$ beibehalten werden darf, und dass $y = -\frac{x^2}{h}$ verworfen werden muss. Für $\delta^2 U$ bekommt man denselben Ausdruck, wie bei der ersten Auflösung.

Aufgabe 65.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = m^2 \cdot x^2 + 2mx \cdot y^2 + 2m^2 \cdot y^2 + (x^4 - m^2 \cdot y^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3) \cdot \frac{dy}{dx} + m^4 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = 2y \cdot \left(2mx + 2m^2 - m^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + \left(x^4 - m^2 \cdot y^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3 + 2m^4 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = 2y \cdot \left(2mx + 2m^2 - m^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta^2 y + \left(x^4 - m^2 \cdot y^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3 + 2m^4 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + 2 \cdot \left(2mx + 2m^2 - m^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y^2 - 4m^2 \cdot y \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so müssen die zwei identischen Gleichungen

Digitized by Google

$$\text{III)}\quad 2y \cdot \left(2mx + 2m^2 - m^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

und

$$\text{IV)}\quad x^4 - m^2 \cdot y^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3 + 2m^4 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

zugleich stattfinden. Die erste dieser zwei Gleichungen wird erfüllt, wenn $y = 0$, d. h. wenn y eine identische Function von x ist. Dieses widerspricht aber der Gleichung IV, und somit kann y keine identische Function von x sein.

Lässt man aber den zweiten Factor der Gleichung III zu Null werden, so hat man folgende zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\text{V)}\quad 2x + 2m - m \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{VI)}\quad x^4 - m^2 \cdot y^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3 + 2m^4 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Erstens. Aus V folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2m}{m}$, und daraus gibt sich durch Integration $y = \frac{x^2 + 2mx + B}{m}$, wo B noch ein willkürlicher Constanter ist. Führt man diese für y und $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Ausdrücke in Gleichung VI ein, so bekommt man nach gehöriger Reduction

$$(2m^2 + B) \cdot ((2m^2 - B) - 4mx - 2x^2) = 0$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $B = -2m^2$; und somit ist

$$\text{VII)}\quad y = \frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$$

das den Gleichungen V und VI gemeinschaftliche besondere Integral. Da aber dabei Gleichung II sich auf $\delta^2 U = -4m^2 \cdot y \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ reducirt, so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweitens. Man kann auch aus Gleichung V und VI das $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, und so ohne Integration zu der gesuchten Function y von x gelangen. Durch diese Elimination bekommt man aber

$$m^2 \cdot y^2 = x^4 + 4m \cdot x^3 - 8m^3 \cdot x + 4m^4$$

oder

$$m^2 \cdot y^2 = (x^2 + 2mx - 2m^2)^2$$

also

$$y = \pm \frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$$

Man hat nun zu untersuchen, ob alle beiden für y gefundenen Formen, oder ob nur eine oder keine von beiden den Gleichungen V und VI genügen. Aus $y = \pm \frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$ folgt $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2x + 2m}{m}$, und dabei gehen die Gleichungen V und VI bezüglich über in

$$2x + 2m - m \cdot \left(\pm \frac{2x + 2m}{m}\right) = 0$$

und

$$x^4 - m^2 \cdot \left(\pm \frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}\right)^2 - 12m^3 \cdot x + 4m \cdot x^3 + 2m^4 \cdot \left(\pm \frac{2x + 2m}{m}\right) = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen erkennt man, dass nur $y = + \frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$ bei-

Digitized by Google

behalten werden darf, und dass $y = -\frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$ verworfen werden muss. Für $\delta^2 U$ bekommt man denselben Ausdruck, wie bei der ersten Auflösung.

Aufgabe 66.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = y^2 + \frac{ae - 2bx}{a} \cdot y + g + \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^4$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \left(2y + \frac{ae - 2bx}{a}\right) \cdot \delta y + 4 \cdot a \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^3 \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \left(2y + \frac{ae - 2bx}{a}\right) \cdot \delta^2 y + 4a \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^3 \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ 2 \cdot \delta y^2 + 12a^2 \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so müssen die zwei identischen Gleichungen

$$\text{III)} \quad 2y + \frac{ae - 2bx}{a} = 0, \qquad \text{und IV)} \quad a \cdot \frac{dy}{dx} - b = 0$$

gleichzeitig stattfinden. Integrirt man IV, so bekommt man $y = \frac{b}{a} \cdot x + A$, wo A der noch willkürliche Constante ist. Durch letztere Gleichung muss aber auch Gleichung III identisch werden. Man führe desshalb für y den Ausdruck in III ein, so ergibt sich $\frac{2b}{a} \cdot x + 2A + \frac{ae - 2bx}{a} = 0$, welche Gleichung sich aber ohneweiters auf $2A + e = 0$ zurückzieht, woraus $A = -\frac{e}{2}$ folgt, so dass

$$\text{V)} \quad y = \frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2}$$

die gesuchte Function ist, welche keinen willkürlichen Constanten mehr enthält. Dabei reducirt sich Gleichung II auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$, so dass man, weil letzterer Ausdruck nichts von der Mutation des $\frac{dy}{dx}$ enthält, das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen muss. Man setze also

$$\left[g - \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2 + \Delta U\right] \text{ anstatt } U,$$

$\left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2} + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ statt y

und

$\left(\frac{b}{a} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{b}{a} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ statt $\frac{dy}{dx}$

in die ursprüngliche Gleichung ein, und reducire soviel als möglich; so ergibt sich

$$\text{VI)} \quad \Delta U = \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^4$$

Digitized by Google

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen des ΔU mit dem Zeichen des $\varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$ einerlei; allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nur die Mutation des y, während ΔU einerlei Zeichen behalten muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des $\frac{dy}{dx}$, also auch wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber $\Delta U = \varkappa^4 \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^4$, so dass jetzt das ΔU ebensogut positiv ist, wie zuvor, wo $\mathfrak{P}$ nicht Null war. Da nun ΔU unter allen Umständen positiv bleibt, so ist $U' = g - \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2$ ein Minimum-stand.

Aufgabe 67.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$1)\quad U = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - \sqrt[3]{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des Radicals $\sqrt[3]{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2}$ ein dreiförmiger; um aber so bequem als möglich calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1}) \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $\sqrt[3]{1}$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man jetzt

$$\text{II)}\quad U = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - (\sqrt[3]{1}) \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle, und dann seine beiden imaginären Bedeutungen bei.

Erste Abtheilung.

Man lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine reelle Bedeutung bei, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U' = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(\frac{2bx - ae}{a} - 2y\right) \cdot \delta y - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so muss man den Zähler des bei δy befindlichen Factors, sowie auch den Nenner des bei $\frac{d\delta y}{dx}$ befindlichen Factors zu Null werden lassen. Man hat also jetzt die zwei gleichzeitig bestehenden identischen Gleichungen $\frac{2bx - ae}{a} - 2y = 0$ und $a \cdot \frac{dy}{dx} - b = 0$, woraus wieder

Digitized by Google

behalten werden darf, und dass $y = -\frac{x^2 + 2mx - 2m^2}{m}$ verworfen werden muss. Für $\delta^2 U$ bekommt man denselben Ausdruck, wie bei der ersten Auflösung.

Aufgabe 66.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = y^2 + \frac{ae - 2bx}{a} \cdot y + g + \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^4$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \left(2y + \frac{ae - 2bx}{a}\right) \cdot \delta y + 4 \cdot a \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^3 \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \left(2y + \frac{ae - 2bx}{a}\right) \cdot \delta^2 y + 4a \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^3 \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ 2 \cdot \delta y^2 + 12a^2 \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so müssen die zwei identischen Gleichungen

$$\text{III)} \quad 2y + \frac{ae - 2bx}{a} = 0, \qquad \text{und IV)} \quad a \cdot \frac{dy}{dx} - b = 0$$

gleichzeitig stattfinden. Integrirt man IV, so bekommt man $y = \frac{b}{a} \cdot x + A$, wo A der noch willkürliche Constante ist. Durch letztere Gleichung muss aber auch Gleichung III identisch werden. Man führe desshalb für y den Ausdruck in III ein, so ergibt sich $\frac{2b}{a} \cdot x + 2A + \frac{ae - 2bx}{a} = 0$, welche Gleichung sich aber ohneweiters auf $2A + e = 0$ zurückzieht, woraus $A = -\frac{e}{2}$ folgt, so dass

$$\text{V)} \quad y = \frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2}$$

die gesuchte Function ist, welche keinen willkürlichen Constanten mehr enthält. Dabei reducirt sich Gleichung II auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$, so dass man, weil letzterer Ausdruck nichts von der Mutation des $\frac{dy}{dx}$ enthält, das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen muss. Man setze also

$$\left[g - \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2 + \Delta U\right] \text{ anstatt } U,$$

$\left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2} + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{e}{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ statt y

und

$$\left(\frac{b}{a} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{b}{a} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right) \text{ statt } \frac{dy}{dx}$$

in die ursprüngliche Gleichung ein, und reducire soviel als möglich; so ergibt sich

$$\text{VI)} \quad \Delta U = \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^4$$

Digitized by Google

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen des ΔU mit dem Zeichen des $\varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$ einerlei; allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nur die Mutation des y, während ΔU einerlei Zeichen behalten muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des $\frac{dy}{dx}$, also auch wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber $\Delta U = \varkappa^4 \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^4$, so dass jetzt das ΔU ebensogut positiv ist, wie zuvor, wo $\mathfrak{P}$ nicht Null war. Da nun ΔU unter allen Umständen positiv bleibt, so ist $U' = g - \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2$ ein Minimum-stand.

Aufgabe 67.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$1)\quad U = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - \sqrt[3]{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des Radicals $\sqrt[3]{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^2}$ ein dreiförmiger; um aber so bequem als möglich calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1}) \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $\sqrt[3]{1}$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man jetzt

$$II)\quad U = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - (\sqrt[3]{1}) \cdot \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle, und dann seine beiden imaginären Bedeutungen bei.

Erste Abtheilung.

Man lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine reelle Bedeutung bei, so geht Gleichung II über in

$$III)\quad U = g + \frac{2bx - ae}{a} \cdot y - y^2 - \left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{2}{3}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$IV)\quad \delta U = \left(\frac{2bx - ae}{a} - 2y\right) \cdot \delta y - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\left(a \cdot \frac{dy}{dx} - b\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so muss man den Zähler des bei δy befindlichen Factors, sowie auch den Nenner des bei $\frac{d\delta y}{dx}$ befindlichen Factors zu Null werden lassen. Man hat also jetzt die zwei gleichzeitig bestehenden identischen Gleichungen $\frac{2bx - ae}{a} - 2y = 0$ und $a \cdot \frac{dy}{dx} - b = 0$, woraus wieder

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad y = \frac{b \cdot x}{a} - \frac{e}{2}$$

folgt, wie in voriger Aufgabe. Das Prüfungsmittel bekommt man durch directe Reihenentwickelung; und wenn man auch jetzt die nemlichen Substitutionen, wie in voriger Aufgabe, macht; so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \Delta U = - \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} - \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen des ΔU mit dem Zeichen des $- \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}$ einerlei; allein dieser mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nur die Mutation des $\frac{dy}{dx}$, während ΔU einerlei Zeichen haben muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des $\frac{dy}{dx}$ als auch der Mutation des y, also auch wenn z. B. die Mutation des $\frac{dy}{dx}$ zu Null, d. h. wenn $\frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber $\Delta U = - \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$, so dass jetzt das ΔU noch eben so gut negativ ist, wie zuvor, wo $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ nicht Null war. Da nun ΔU unter allen Umständen negativ bleibt, so ist $U' = g + \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2$ ein Maximum-stand.

Zweite Abtheilung.

Nun lege man dem in Gleichung II befindlichen $(\sqrt[3]{1})$ seine beiden imaginären Bedeutungen bei. Hierbei bekommt man wieder die nemliche Function y von x, wie bei der ersten Abtheilung. Durch directe Reihenentwickelung gibt sich

$$\text{VII)}\quad \Delta U = - \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} - \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

und daran erkennt man, dass $U' = g + \left(\frac{2bx - ae}{2a}\right)^2$ ein Einzel-stand ist.

Aufgabe 68.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in dem zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte die Berührende zieht, und wenn man diese mit zwei in bestimmten Punkten einer gegebenen Graden stehenden Perpendikeln begränzt, die so begränzte Berührende grösser oder kleiner ist, als die zu derselben Abscisse x gehörigen und von denselben Perpendikeln begränzten Berührenden aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven.

Die gegebene Grade (fig. 1) sei OX; H und K seien die in dieser Graden gelegenen bestimmten Punkte, in welchen man die Perpendikel HL und KN errichtet. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man die gegebene Grade OX als Abscissenaxe nimmt; in ihr nehme man dann nach Belieben einen Punkt O als Anfang der Coordinaten. S sei der beliebig gewählte Berührungspunkt, und seine Abscisse sei $OG = x$. Man setze ferner $OH = a$ und $OK = \alpha$, welches die zu den Perpendikeln HL und KN gehörigen unveränderlichen Abscissen sind. RST ist also die auf vorgeschriebene Weise begränzte Berührende, deren Länge $= \sqrt{HK^2 + (KT - HR)^2}$. Nun ist die Gleichung der gradlinigen Berührenden bekanntlich

Digitized by Google

$$y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ oder } y' = y + (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

Hier sind x' und y' die veränderlichen Coordinaten der Berührenden, dagegen x und y sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in welchem man grade die Berührung wählt. Für die bestimmten Punkte H und K ist bezüglich $y' = HR$ und $y' = KT$; und somit hat man $HR = y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx}$, und $KT = y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}$. Man bekommt also für die Länge RST durch gehörige Substitution

$$\text{I)} \quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Weil die Abscissendifferenz $(\alpha - a)$ positiv ist, so ist auch das ganze (bei der Abscisse a anfangende und bis zur Abscisse α erstreckte) Stück RST der Berührenden positiv. Dazu ist aber nöthig, dass man dem Radical seine positive Bedeutung beilege, welche ihm durch die ganze Untersuchung bleiben muss. Man mutire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta U = (\alpha - a) \cdot \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{III)} \quad \delta^2 U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{1}{1 + p^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)$$

Sowie durch y die Ordinate der gesuchten Curve dargestellt ist, so ist durch $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des von der Abscissenaxe und von der Berührenden eingeschlossenen Winkels dargestellt.

Es leuchtet von selbst ein, dass die Länge der Berührenden (wegen der Art ihrer vorgeschriebenen Begränzung) nicht abhängig ist von ihrer Entfernung von der Abscissenaxe, sondern von dem Winkel, welchen sie mit der Abscissenaxe bildet. Dieses stimmt auch mit Gleichung II überein; denn da sie keinen mit δy behafteten Theilsatz enthält, so hat die Mutation von y keinen Einfluss auf U (d. h. auf die Länge der Berührenden), und nur die Mutation von $\frac{dy}{dx}$ hat Einfluss darauf.

Soll $\delta U = 0$ werden unabhängig von $\frac{d\delta y}{dx}$, so muss $p = 0$ sein. Daraus folgt

$$\text{IV)} \quad y = C$$

wo C ein willkürlicher Constanter ist.

Die gesuchte Curve ist also die mit der Abscissenaxe parallele Grade.

Die Aufgabe wird insoferne von einer Graden gelöst, als jede Grade auch zugleich ihre eigene Berührende ist. Man kann die gesuchte Linie noch zwingen, durch den festen Punkt (n, m) zu gehen.

Unter einem festen Punkte (n, m) versteht man bekanntlich einen Punkt mit der bestimmten Abscisse n und der dazugehörigen ebenfalls bestimmten Ordinate m.

Damit aber die gesuchte Linie durch den festen Punkt (n, m) gehe, muss sein

$$\text{V)} \quad y = C = m$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung III auf $\delta^2 U = (\alpha - a) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, woran man erkennt, dass $U' = (\alpha - a)$ ein Minimum-stand ist. Davon hätte man sich aber schon durch einfache geometrische Betrachtung überzeugen können, ohne dass

Digitized by Google

es nöthig gewesen wäre, das entsprechende Kennzeichen auf theoretischem Wege herzustellen.

Weil $U' = (\alpha - a)$ vom Werthe des x ganz unabhängig ist, so kann hier von einer secundären Beziehung keine Rede sein.

(Diese Aufgabe, als solche, stammt von Herrn Dr. M. Ohm her.)

Aufgabe 69.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass von ihrem zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die zwischen dem Quadrate dieser Abscisse und zwischen dem Quadrate der um die Subnormale verminderten Abscisse stattfindende Differenz zu einem Maximumstande oder Minimum-stande gemacht wird.

Die hiesige Aufgabe führt zunächst auf den allgemeinen Ausdruck

$$U = x^2 - \left(x - y \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2$$

Man mutire, und setze zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so gibt sich

$$\text{I)} \quad \delta U = 2 \cdot (x - py) \cdot p \cdot \delta y + 2 \cdot (x - py) \cdot y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot (x - py) \cdot p \cdot \delta^2 y + 2 \cdot (x - py) \cdot y \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} - 2 \cdot p^2 \cdot \delta y^2$$
$$+ 4 \cdot (x - 2py) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - 2 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven machen können; so sind (nach §. 91) δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz willkürlich und unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen also jetzt (nach §. 183) die zwei identischen Gleichungen

$$(x - p \cdot y) \cdot p = 0, \text{ und } (x - p \cdot y) \cdot y = 0$$

zugleich stattfinden.

Erstens. Diesen beiden Gleichungen wird genügt, wenn $x - py = 0$. Daraus folgt $x^2 - y^2 = A$.

Die gesuchte Curve ist also die gleichseitige Hyperbel, deren Axen durch irgend eine Nebenbedingung bestimmt werden können.

Soll z. B. diese Hyperbel durch den festen Punkt (n, m) gehen, so hat man $n^2 - m^2 = A$, so dass $x^2 - y^2 = n^2 - m^2$ eine vollkommen bestimmte Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist. Aus $x^2 - y^2 = A$ folgt aber $y = \mathcal{W}\sqrt{x^2 - A}$, d. h. $(x^2 - A)$ muss immer positiv sein. Gleichung II geht nun im Allgemeinen über in $\delta^2 U = -2 \cdot \left(\frac{x}{\mathcal{W}\sqrt{x^2 - A}} \cdot \delta y + (\mathcal{W}\sqrt{x^2 - A}) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$. Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen negativ, und somit ist $U' = x^2$ ein Maximum-stand. Um aber zu untersuchen, welche Werthe das x annehmen darf, unterscheide man, ob A positiv ist, oder negativ. Ist A positiv, so darf x alle die Werthe, welche zwischen $(-\sqrt{A})$ und $(+\sqrt{A})$ fallen, nicht annehmen, weil dabei $y = \mathcal{W}\sqrt{x^2 - A}$ imaginär wird, und somit innerhalb

Digitized by Google

dieser Gränzen die Curve nicht existirt. Ist aber A negativ, so wird $y = \sqrt{x^2 - A}$ reell, das x mag einen reellen Werth haben, welchen es will.

Zweitens. Den Gleichungen 1 und 2 wird aber auch gleichzeitig genügt, wenn $y = 0$, d. h. wenn y eine identische Function von x ist; denn dabei ist auch $p = \frac{dy}{dx} = 0$.

Durch $y = 0$ ist die in die Abscissenaxe fallende Grade vorgestellt.

Gleichung II reducirt sich aber dabei auf $\delta^2 U = 4x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$, woraus hervorgeht, dass jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, welche bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben;

so haben alle Curven, die hier in Betracht gezogen werden dürfen, bei der grade gewählten Abscisse x einerlei Ordinate. Desshalb muss jetzt (wie im zweiten Falle der 61sten Aufgabe) einzeln sein $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$ etc.; und Gleichung I reducirt sich auf

$$\text{III)} \quad \delta U = 2 \cdot (x - py) \cdot y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss stattfinden

$$3) \quad (x - py) \cdot y = 0$$

Erstens. Setzt man $x - py = 0$, so bekommt man wieder $x^2 - y^2 = A$, wie im vorigen Falle; und dabei reducirt sich Gleichung II auf $\delta^2 U = -2 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, so dass jetzt wieder $U' = x^2$ ein Maximum-stand ist.

Zweitens. Der Gleichung 3 wird aber auch genügt, wenn $y = 0$, d. h. y eine identische Function von x ist. Allein da ausser $y = 0$ auch noch $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$ etc. sein muss, wie ja für diesen zweiten Fall vorgeschrieben ist; so ist auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$ etc., und es kann von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Normalen mit der Normale der gesuchten Curve parallel haben;

so schliesst die Abscissenaxe mit den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Normalen aller Curven, die hier in Betracht gezogen werden dürfen, einen gleichgrossen Winkel ein. Desshalb besteht (siehe die in Aufgabe 61 befindliche Einleitung C) jetzt für alle in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} \cdots\cdots$$

Es muss also bei dem grade gewählten Werthe des x einzeln sein $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc.; und Gleichung I reducirt sich auf

$$\text{IV)} \quad \delta U = 2 \cdot (x - py) \cdot p \cdot \delta y$$

Damit $\delta U = 0$ werde, muss stattfinden

$$4) \quad (x - py) \cdot p = 0$$

Digitized by Google

Erstens. Setzt man $x - py = 0$, so bekommt man wieder $x^2 - y^2 = A$, wie in den beiden vorigen Fällen. Gleichung II reducirt sich nun auf $\delta^2 U = -2 \cdot p^2 \cdot \delta y^2$, und man erkennt wieder, dass $U' = x^2$ ein Maximum-stand ist.

Zweitens. Der Gleichung 4 wird aber auch genügt, wenn $p = \frac{dy}{dx} = 0$ ist. Daraus folgt $y = B$.

Hierdurch ist die mit der Abscissenaxe parallele Grade gegeben.

Soll sie durch den festen Punkt (n, m) gehen, so ist $y = m$, d. h. die gesuchte Grade läuft in der Entfernung m mit der Abscissenaxe parallel. Da hier ausser $p = 0$ auch noch $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. sein muss, wie für diesen dritten Fall vorgeschrieben ist; so ist auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, $\delta^4 U = 0$ etc.; und es kann jetzt gleichfalls von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein.

Anhang. Wollte man mit den primären Beziehungen auch noch gleichzeitig die secundären aufsuchen, so würde man beim ersten Mutiren bekommen

$$ {}_{(}\delta_{)}U = 2 \cdot (x - py) \cdot p \cdot \delta y + 2 \cdot (x - py) \cdot y \cdot \frac{d\delta y}{dx} $$
$$ + 2 \left[x - (x - py) + (x - py) \cdot p^2 + (x - py) \cdot y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right] \cdot \vartheta x $$

Die Factoren der Mutationscoefficienten werden zu identischen Gleichungen, d. h. es ist

$$ (x - py) \cdot p = 0 \text{ und } (x - py) \cdot y = 0 $$

Der Factor des Differenzcoefficienten gibt eine nichtidentische Gleichung, welche sich aber in allen drei hier zulässigen Fällen auf $x = 0$ reducirt. Unter diesen Umständen bekommt man nur

$$ {}_{(}\delta^2_{)}U = -2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - A}} \cdot \delta y + \left(\sqrt{x^2 - A}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + 2 \cdot \vartheta x^2 $$

Das Aggregat der Mutationscoefficienten gibt zu erkennen, dass ein Maximum-stand stattfinde; aber der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten gibt an, dass dieser Maximum-stand seinen kleinsten Werth erlangt habe. Weil das Radical $\sqrt{x^2 - A}$ reell sein muss, so erkennt man, dass nur dann $x = 0$ sein darf, wenn A negativ ist; denn in dem Falle, wo A positiv ist, ist bei $x = 0$ das Radical $\sqrt{x^2 - A}$ imaginär; und somit kann bei einem positiven A von einer secundären Beziehung keine Rede sein.

Aufgabe 70.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass ihr zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörige Punkt das Quadrat der Normale nebst dem Quadrate der um die Abscisse vermehrten Subnormale zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht.

Die hiesige Aufgabe führt zunächst auf den allgemeinen Ausdruck

$$ U = y^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) + \left(x + y \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 $$

Man mutire, und setze zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so gibt sich

$$ \text{I)} \quad \delta U = 2 \cdot (y + 2y \cdot p^2 + px) \cdot \delta y + 2y \cdot (x + 2p \cdot y) \cdot \frac{d\delta y}{dx} $$

$$ \text{II)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot (y + 2y \cdot p^2 + p \cdot x) \cdot \delta^2 y + 2y \cdot (x + 2p \cdot y) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} $$
$$ + 2 \cdot (1 + 2p^2) \cdot \delta y^2 + 4 \cdot (x + 4p \cdot y) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 4y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 $$

Digitized by Google

Erster Fall. Soll die Aufgabe in der Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe; so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und es müssen folgende zwei identische Gleichungen gleichzeitig bestehen:

$$1)\quad y + 2y \cdot p^2 + p \cdot x = 0, \qquad \text{und } 2)\quad y \cdot (x + 2p \cdot y) = 0$$

Erstens. Lässt man den Factor y der Gleichung 2 zu Null werden, so dass y eine identische Function von x ist; so wird dabei auch der Gleichung 1 genügt. Man hat also jetzt die in die Abscissenaxe fallende Grade. Gleichung II reducirt sich dabei auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 4x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$, welcher Ausdruck nicht beständig einerlei Zeichen haben kann, so dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Lässt man aber den zweiten Factor der Gleichung 2 zu Null werden, so dass man jetzt die beiden Gleichungen $y + 2y \cdot p^2 + p \cdot x = 0$ und $x + 2p \cdot y = 0$ hat; so widersprechen sich beide, d. h. die Aufgabe ist überbestimmt, also unmöglich.

Zweiter Fall. Soll die Aufgabe unter der Beschränkung stattfinden, welche im zweiten Falle der vorigen Aufgabe gemacht ist; so reducirt sich Gleichung I auf

$$\delta U = 2y \cdot (x + 2p \cdot y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U \doteq 0$ werde, muss sein

$$3)\quad 2y \cdot (x + 2p \cdot y) = 0$$

Erstens. Lässt man $y = 0$, d. h. y eine identische Function von x sein; so ist dabei auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, etc., und es kann von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein.

Zweitens. Lässt man aber den zweiten Factor der Gleichung 3 zu Null werden, so dass man hat $2p \cdot y + x = 0$; so folgt daraus

$$4)\quad y^2 + \frac{1}{2} \cdot x^2 = C$$

Die gesuchte Curve ist also eine Ellipse.

Dabei reducirt sich Gleichung II auf $\delta^2 U = 4y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, welcher Ausdruck beständig positiv bleibt, und somit ist jetzt $U' = C$ ein Minimum-stand.

α) Will man den Constanten C dadurch bestimmen, dass man die Curve zwingt, durch den festen Punkt (n, m) zu gehen; so wird man aus Gleichung 4 bekommen $m^2 + \frac{1}{2} \cdot n^2 = C$. Führt man diesen Werth in 4 ein, so hat man $y^2 + \frac{1}{2} \cdot x^2 = m^2 + \frac{1}{2} \cdot n^2$, welche Gleichung auch dargestellt werden kann durch

$$5)\quad \frac{y^2}{\frac{1}{2}(n^2 + 2m^2)} + \frac{x^2}{n^2 + 2m^2} = 1$$

Die grosse und kleine Axe der Ellipse sind also in diesem Falle bezüglich $2 \cdot \sqrt{n^2 + 2m^2}$ und $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(n^2 + 2m^2)}$.

β) Will man aber den Constanten C dadurch bestimmen, dass $\frac{dy}{dx} = g$ wird, wenn $x = n$ ist, d. h. dass die zur Abscisse $x = n$ gehörige Normale mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliesst, dessen goniometrische Cotangente $= g$ ist; so verwandle man Gleichung 4 in $y = \sqrt{C - \frac{1}{2} \cdot x^2}$. Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2 \cdot \sqrt{C - \frac{1}{2} \cdot x^2}}$. Es

Digitized by Google

ist also unter der jetzigen Voraussetzung $g = \frac{-n}{2 \cdot \sqrt{C - \frac{1}{2} \cdot n^2}}$, und daraus folgt $C = \frac{n^2 \cdot (1 + 2g^2)}{4 \cdot g^2}$. Führt man diesen Werth in Gleichung 4 ein, so bekommt man $y^2 + \frac{1}{2} \cdot x^2 = \frac{n^2 \cdot (1 + 2g^2)}{4g^2}$, welche Gleichung auch dargestellt werden kann durch

$$6) \quad \frac{y^2}{\frac{n^2 \cdot (1 + 2g^2)}{4g^2}} + \frac{x^2}{\frac{n^2 \cdot (1 + 2g^2)}{2g^2}} = 1$$

Die grosse und kleine Axe der Ellipse sind also in diesem Falle bezüglich $\frac{n}{g} \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + 2g^2)}$ und $\frac{n}{g} \cdot \sqrt{1 + 2g^2}$.

Dritter Fall. Macht man aber dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe; so reducirt sich Gleichung I auf

$$\delta U = 2 \cdot (y + 2y \cdot p^2 + p \cdot x) \cdot \delta y$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

entweder $7) \quad y + 2y \cdot p^2 + p \cdot x = 0$, oder $8) \quad y = 0$

Erstens. Man nehme Gleichung 7, und sondere p ab; so gibt sich

$$9) \quad p = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2}}{4y}$$

oder

$$10) \quad 4y \cdot p + x = \sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2}$$

Man setze

$$11) \quad x \cdot z = \sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2}$$

so folgt daraus $x^2 \cdot z^2 = x^2 - 8 \cdot y^2$; und wenn man diese Gleichung differentiirt, so bekommt man

$$12) \quad 4y \cdot p = \frac{1}{2} \ x \cdot (1 - z^2) - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot z \cdot \frac{dz}{dx}$$

Indem man nun $\sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2}$ und $4y \cdot p$ aus Gleichung 10 eliminirt, und dann umformt, bekommt man

$$13) \quad \frac{dx}{x} + \frac{z \cdot dz}{z^2 + 2z - 3} = 0$$

oder

$$14) \quad \frac{dx}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{dz}{z + 3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{dz}{z - 1} = 0$$

Daraus gibt sich durch Integration

$$\lg \text{nat } x + \frac{3}{4} \cdot \lg \text{nat } (z + 3) + \frac{1}{4} \cdot \lg \text{nat } (z - 1) = A$$

oder

$$15) \quad 4 \cdot \lg \text{nat } x + 3 \cdot \lg \text{nat } (z + 3) + \lg \text{nat } (z - 1) = 4A$$

Mit Veränderung des Constanten geht diese Gleichung über in

$$16) \quad x^4 \cdot (z + 3)^3 \cdot (z - 1) = B$$

und wenn man für z den Ausdruck zurückführt, so bekommt man

$$17) \quad (3x + \sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2})^3 \cdot (-x + \sqrt{x^2 - 8 \cdot y^2}) = B$$

In dieser Gleichung hat aber das Radical entweder durchweg seine positive oder durch-

Digitized by Google

weg seine negative Bedeutung. Jetzt reducirt sich Gleichung II auf $\delta^2 U = 2 \cdot (1 + 2p^2) \cdot \delta y^2$, woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Wollte man z. B. den Constanten dadurch bestimmen, dass man die Curve zwingt, durch den festen Punkt (n, m) zu gehen; so hat man

$$(3n + \sqrt{n^2 - 8m^2})^3 \cdot (-n + \sqrt{n^2 - 8m^2}) = B$$

Gleichung 17 geht nun über in

$$18)\quad \left(\frac{3x + \sqrt{x^2 - 8y^2}}{3n + \sqrt{n^2 - 8m^2}}\right)^3 = \frac{-n + \sqrt{n^2 - 8m^2}}{-x + \sqrt{n^2 - 8y^2}}$$

welches die vollständig bestimmte Gleichung der gesuchten Curve für den Fall ist, dass sie durch den festen Punkt (n, m) geht.

Zweitens. Setzt man $y = 0$, d. h. lässt man y eine identische Function von x sein, so dass man die in die Abscissenaxe fallende Grade hat; so ist $U' = x^2$, und $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$, woran man erkennt, dass $U' = x^2$ ein Minimum-stand ist.

Man hat hier zwei verschiedene Curven, und jede liefert einen Minimum-stand. Es ist aber nicht überflüssig, hier noch einmal darauf aufmerksam zu machen, dass man die gesuchte Curve jedesmal nur mit den ihr stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven vergleicht. Insoferne aber in diesen zwei Fällen die primären Zustände des U kleiner sind, als bei den der jedesmal gefundenen Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven, insoferne ist auch in beiden Fällen ein Minimum-stand vorhanden.

Aufgabe 71.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige Punkt die zwischen dem Quadrate seiner Normale und zwischen dem durch die Summe der Abscisse und Subnormale und durch eine constante Linie a erzeugten Producte stattfindende Differenz zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht.

Die hier aufgestellte Aufgabe führt zunächst auf den allgemeinen Ausdruck

$$U = y^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) - a \cdot \left(x + y \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = (2y \cdot (1 + p^2) - ap) \cdot \delta y + (2p \cdot y^2 - a \cdot y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = (2y \cdot (1 + p^2) - ap) \cdot \delta^2 y + (2p \cdot y^2 - a \cdot y) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ 2 \cdot (1 + p^2) \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (4py - a) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der früheren Aufgaben; so sind (nach §. 91) δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Es müssen jetzt (nach §. 183) folgende zwei identische Gleichungen zugleich stattfinden

$$1)\quad 2y \cdot (1 + p^2) - a \cdot p = 0, \qquad \text{und } 2)\quad y \cdot (2py - a) = 0$$

Erstens. Lässt man den Factor y der Gleichung 2 zu Null werden, so dass y eine identische Function von x ist; so wird auch dadurch der Gleichung 1 genügt, und man hat eine in die Abscissenaxe fallende Grade. Allein, da sich jetzt Gleichung II

Digitized by Google

auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 - 2a \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ reducirt, welcher Ausdruck nicht beständig einerlei Zeichen haben kann; so findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweitens. Lässt man aber den zweiten Factor der Gleichung 2 zu Null werden, so dass man jetzt die beiden Gleichungen

$$2y \cdot (1 + p^2) - a \cdot p = 0, \text{ und } 2py - a = 0$$

hat; so widersprechen sich beide, und liefern kein Resultat, d. h. die Aufgabe ist überbestimmt, also unmöglich.

Zweiter Fall. Macht man die nemliche Einschränkung, wie beim zweiten Falle der beiden vorigen Aufgaben, so ist $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc.; und Gleichung I reducirt sich auf

$$\delta U = (2py^2 - ay) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werde, muss sein

$$3)\quad y \cdot (2py - a) = 0$$

Erstens. Lässt man $y = 0$, d. h. y eine identische Function von x werden; so wird auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, etc., und es kann von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein.

Zweitens. Lässt man aber den zweiten Factor der Gleichung 3 zu Null werden, so dass man $2py - a = 0$ hat; so ergibt sich jetzt

$$4)\quad y^2 = ax + A$$

Die gesuchte Curve ist also die Apollonische Parabel. Gleichung II reducirt sich jetzt auf $\delta^2 U = 2 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, welcher Ausdruck immer positiv bleibt, und sonach ist $U' = \frac{1}{4}(4A - a^2)$ ein Minimum-stand. Von einer secundären Beziehung kann keine Rede sein, weil U' unabhängig ist von x.

α) Soll die gesuchte Curve durch den festen Punkt (n, m) gehen, so geht für diesen Punkt Gleichung 4 über in $m^2 = an + A$; daraus folgt $A = m^2 - an$, und Gleichung 4 nimmt jetzt folgende Form an

$$5)\quad y^2 = ax - an + m^2$$

β) Will man aber den Constanten A dadurch bestimmen, dass $\frac{dy}{dx} = g$, wenn $x = n$, d. h. dass die zur Abscisse $x = n$ gehörige Normale mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliesse, dessen goniometrische Cotangente $= g$; so verwandle man Gleichung 4 in $y = \sqrt{ax + A}$. Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{ax + A}}$. Es ist also im jetzigen speciellen Falle $g = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{an + A}}$, und somit ist $A = \frac{a^2 - 4an \cdot g^2}{4g^2}$. Gleichung 4 nimmt also jetzt folgende Form an:

$$6)\quad y^2 = ax + \frac{a^2 - 4g^2 \cdot an}{4g^2}$$

Dritter Fall. Macht man die nemliche Einschränkung, wie beim dritten Falle der beiden vorigen Aufgaben, so ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc.; und Gleichung I reducirt sich auf

$$\delta U = (2y \cdot (1 + p^2) - a \cdot p) \cdot \delta y$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss entweder

$$7)\quad 2y \cdot (1 + p^2) - ap = 0, \qquad \text{oder } 8)\quad y = 0 \text{ sein.}$$

Erstens. Man nehme Gleichung 7, so folgt daraus $p = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16y^2}}{4y}$ oder

Digitized by Google

$\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{a + \sqrt{a^2 - 16y^2}}$. Setzt man $\sqrt{a^2 - 16y^2} = z$, so folgt aus dieser Gleichung $-32y \cdot dy = 2z \cdot dz$, also $4y \cdot dy = -\frac{1}{4}z \cdot dz$. Man hat also jetzt $dx = -\frac{1}{4} \times \frac{z \cdot dz}{a+z}$. Daraus folgt $x + C = -\frac{1}{4}z + \frac{a}{4} \cdot \lg \text{nat}\,(a + z)$; und wenn man für z den Ausdruck wieder einführt, so ist

$$9)\quad x + C = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{a^2 - 16y^2} + \frac{a}{4} \cdot \lg \text{nat}\left(a + \sqrt{a^2 - 16y^2}\right)$$

Gleichung II reducirt sich unter diesen Umständen auf $\delta^2 U = 2 \cdot (1 + p^2) \cdot \delta y^2$; und man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Will man den Constanten C dadurch bestimmen, dass man die Curve zwingt, durch den festen Punkt (n, m) zu gehen; so wird für diesen Punkt Gleichung 9 übergehen in

$$n + C = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{a^2 - 16m^2} + \frac{a}{4} \cdot \lg \text{nat}\left(a + \sqrt{a^2 - 16m^2}\right)$$

Bestimmt man hieraus den Werth des C, und führt ihn in Gleichung 9 ein, so hat man

$$10)\quad x - n = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{a^2 - 16m^2} - \sqrt{a^2 - 16y^2}\right) + \frac{a}{4} \cdot \lg \text{nat}\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16y^2}}{a + \sqrt{a^2 - 16m^2}}\right)$$

welches die vollständig bestimmte Gleichung der gesuchten Curve für den Fall ist, dass sie durch den vorgeschriebenen Punkt (n, m) gehe.

Zweitens. Nimmt man $y = 0$, d. h. y als identische Function von x; so hat man die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist $U' = -a \cdot x$, und $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$, so dass jetzt wieder ein Minimum-stand stattfindet. Sollte aber $U' = -a \cdot x$ negativ sein, so erinnere man sich, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht.

(Man vergleiche die Schlussbemerkung zur vorigen Aufgabe.)

Aufgabe 72.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man an den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und diese mit zwei in bestimmten Punkten einer gegebenen Graden errichteten Perpendikeln begränzt, das Product dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die gegebene grade Linie (fig. 1) sei OX; H und K seien die in dieser Graden gelegenen bestimmten Punkte, in welchen man die Perpendikel HL und KN errichtet. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man die gegebene Grade OX als Abscissenaxe nimmt; in ihr nehme man dann nach Belieben einen Punkt O als Anfang der Coordinaten. S sei der beliebig gewählte Berührungspunkt, und seine Abscisse sei $OG = x$. Man setze ferner $OH = a$ und $OK = \alpha$, welches die zu den Perpendikeln HL und KN gehörigen unveränderlichen Abscissen sind. Somit ist das gesuchte Product $U = HR \cdot KT$. Die Gleichung der gradlinigen Berührenden ist bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{oder } y' = y + (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

Hier sind x' und y' die veränderlichen Coordinaten der Berührenden, dagegen x und y sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in

Digitized by Google

welchem man grade die Berührung wählt. Für die bestimmten Punkte H und K ist bezüglich $y' = HR$ und $y' = KT$, und somit hat man $HR = y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx}$, und $KT = y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}$. Also ist

$$U = \left(y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \left(y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

Mutirt man, und setzt dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$; so ist

$$\text{I)}\ \delta U = (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta y + ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{II)}\ \delta^2 U = (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta^2 y + ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ 2 \cdot \delta y^2 + 2(a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x das vorgelegte Product grösser oder kleiner macht, als es bei derselben Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven machen können; so müssen (man sehe den ersten Fall der 61sten Aufgabe) folgende zwei identischen Gleichungen zugleich stattfinden:

$$1)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

und

$$2)\quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p = 0$$

Eliminirt man p aus beiden Gleichungen, so bekommt man

$$3)\quad (\alpha - a)^2 \cdot y^2 = 0$$

Daraus kann im Allgemeinen nur folgen, dass

$$4)\quad y = 0$$

d. h. y eine identische Function von x wäre. Dieses wäre dann die Gleichung einer in die Abscissenaxe fallenden Graden. Die Function $y = 0$ genügt aber den beiden Gleichungen 1 und 2 zugleich, kann also die Aufgabe lösen. Nun reducirt sich Gleichung II auf

$$5)\quad \delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Da aber jetzt $\frac{d_y^2 U}{dy^2} \times \frac{d_p^2 U}{dp^2} - \left(\frac{d_y d_p U}{dy.dp}\right)^2 = -(\alpha - a)^2$ beständig negativ ist, so findet hier (man vergleiche §. 11, 125, 186) weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben;

so ist jetzt (man sehe z. B. den zweiten Fall der 61sten Aufgabe) $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc., und Gleichung I reducirt sich auf

$$\delta U = ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werde, muss sein

$$6)\quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p = 0$$

Digitized by Google

Daraus folgt

$$7)\quad \frac{2 \cdot dy}{y} = \frac{dx}{x - a} + \frac{dx}{x - \alpha}$$

Also

$$8)\quad \lg \text{nat } y^2 = C + \lg \text{nat } (x - a) + \lg \text{nat } (x - \alpha)$$

oder mit Veränderung des Constanten

$$\lg \text{nat } y^2 = \lg \text{nat } E + \lg \text{nat } (x - a) + \lg \text{nat } (x - \alpha)$$

und daraus folgt

$$9)\quad y^2 = E \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x)$$

welche Gleichung sich auch auf folgende Weise darstellen lässt

$$10)\quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{E \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Die gesuchte Curve ist also eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem E positiv oder negativ ist. Das gesuchte Product ist

$$11)\quad U' = - E \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$$

also constant, so dass hier von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann; und bei der Hyperbel ist dieses Product negativ, bei der Ellipse ist es positiv. Gleichung II reducirt sich auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot (x - a) \cdot (x - \alpha) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = \frac{2 \cdot y^2}{E} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Bei der Ellipse, wo E negativ ist, findet also ein Maximum-stand statt; und bei der Hyperbel, wo E positiv, findet ein Minimum-stand statt; allein in Hinsicht dieses Minimum-standes hat man zu bemerken, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je grösser sein absoluter Werth. Aus Gleichung 10 folgt zugleich, dass die beiden Scheitel der gesuchten Curven den Abscissen a und α entsprechen; und daraus ergibt sich eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Ellipse und Hyperbel. Errichtet man nemlich aus den Scheiteln auf die Axe Perpendikel, und zieht man durch irgend einen Punkt dieser Curven eine Berührende; so ist das Product der von der Berührenden abgeschnittenen Stücke dieser Perpendikel bei der Ellipse grösser und bei der Hyperbel kleiner, als das entsprechende Product jeder andern denselben Berührungspunkt habenden Curve. Aus Gleichung 10 ersieht man, dass $(\alpha - a)$ und $(\alpha - a) \cdot \sqrt{\pm E}$ die Axen der gesuchten Curven sind; und somit ist das gesuchte Product jederzeit dem Quadrate der halben (mit jenen Perpendikeln parallelen) Axe gleich. Bei der Hyperbel ist aber dieses Product negativ, weil dabei die Factoren HR und KT entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe liegen, so dass jetzt das Product HR · KT, wenn man es nur nach seinem absoluten Werthe nimmt, gleichfalls als Maximum-stand angesehen werden kann.

α) Will man den Constanten E dadurch bestimmen, dass man die gesuchten Curven zwingt, durch den festen Punkt (n, m) zu gehen; so geht Gleichung 9 über in $m^2 = E \cdot (a - n) \cdot (\alpha - n)$, daraus folgt $E = \frac{m^2}{(n - a) \cdot (n - \alpha)}$. Führt man diesen Werth in 10 ein, so bekommt man

$$12)\quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{m^2}{(n - a) \cdot (n - \alpha)} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Digitized by Google

Haben die beiden Factoren $(n - a)$ und $(n - \alpha)$ einerlei Vorzeichen, d. h. ist entweder gleichzeitig $n > a$ und $n > \alpha$, oder ist gleichzeitig $n < a$ und $n < \alpha$, wobei die Abscisse n nicht zwischen a und α fällt; so ist die Curve eine Hyperbel, deren Axen $(\alpha - a)$ und $\frac{m \cdot (\alpha - a)}{\sqrt{(n - a) \cdot (n - \alpha)}}$ sind. Haben aber die beiden Factoren $(n - a)$ und $(n - \alpha)$ entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. liegt n zwischen a und α; so ist die Curve eine Ellipse, deren Axen $(\alpha - a)$ und $\frac{m \cdot (\alpha - a)}{\sqrt{-(n - a) \cdot (n - \alpha)}}$ sind.

β) Will man aber den Constanten E dadurch bestimmen, dass man festsetzt, es solle die zur Abscisse n gehörige Berührende mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= g$; so bilde man sich aus Gleichung 9 jetzt $y = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{E \cdot (x - a) \cdot (x - \alpha)}$. Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = (\sqrt{1}) \cdot \frac{(2x - a - \alpha) \cdot \sqrt{E}}{2 \cdot \sqrt{(x - a) \cdot (x - \alpha)}}$ welcher Ausdruck in diesem speciellen Falle übergeht in $g = (\sqrt{1}) \cdot \frac{(2n - a - \alpha) \cdot \sqrt{E}}{2 \cdot \sqrt{(n - a) \cdot (n - \alpha)}}$ so dass sich $E = \frac{4g^2 \cdot (n - a) \cdot (n - \alpha)}{(2n - a - \alpha)^2}$ ergibt, und Gleichung 10 übergeht in

$$13) \quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{4g^2 \cdot (n - a) \cdot (n - \alpha)}{(2n - a - \alpha)^2} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Hier findet also gleichfalls eine Hyperbel statt, wenn $(n - a)$ und $(n - \alpha)$ gleiche Vorzeichen haben; und eine Ellipse findet statt, wenn $(n - a)$ und $(n - \alpha)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Berührenden mit der Berührenden der gesuchten Curve parallel haben;

so ist jetzt (man sehe den dritten Fall der 61sten Aufgabe) $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc., und Gleichung I reducirt sich auf

$$\delta U = (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta y$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$14) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

Daraus folgt

$$15) \quad y = B \cdot \left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)$$

Da sich aber Gleichung II auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$ reducirt, so ist

$$16) \quad U' = - B^2 \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$$

ein Minimum-stand, wobei aber, eben weil U' constant ist, von keiner secundären Beziehung die Rede sein kann.

Die gesuchte Curve ist jetzt (fig. 2 oder 3) die Grade PQ, welche genau mitten zwischen H und K die Abscissenaxe durchschneidet. Der Constante B kann bestimmt werden, wie im zweiten Falle.

Vergleicht man diese fig. 2 und 3 mit fig. 1, so sieht man, dass jetzt der Punkt R mit P, und der Punkt T mit Q zusammenfällt, weil die grade Linie auch zugleich ihre Berührende ist. Das Produkt U ist dasmal negativ, weil die beiden Factoren HR und KT

Digitized by Google

entgegengesetzt sind. Ein negativer Ausdruck gilt aber in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht. Jede mit RT parallele Berührende z. B. VW aller andern nächstanliegenden Nachbarcurven erzeugt ein Product $U + \Delta U = HV \cdot KW$, welches natürlich auch jedesmal negativ ist, aber doch näher bei Null liegt, als das Product $U = HR \cdot KT$.

Beweis. Weil $HJ = JK$, so sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke HRJ und KTJ congruent, also sind die Lothe HR und KT einander gleich aber entgegengesetzt. Desshalb ist $U = HR \cdot KT = HR \cdot (-HR) = -HR^2$. Weil nun VW parallel ist mit RT, so ist $RV = TW$. Man setze $RV = TW = D$, so ist $U + \Delta U = HV \cdot KW = (HR - RV) \cdot (KT + TW) = (HR - D) \cdot (-(HR + D)) = -HR^2 + D^2$, wie zu beweisen war.

(Diese Aufgabe, als solche, stammt von Lagrange her, welcher jedoch nur den zweiten Fall behandelt hat. Den ersten und dritten Fall hat Herr Dr. M. Ohm hinzugefügt.)

Aufgabe 73.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man an den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und dann von zwei andern in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende fällt, das Product dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die beiden festen Punkte, von welchen aus man Perpendikel auf die Berührende der gesuchten Curve fällen soll (fig. 4), seien H und K. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man durch die beiden bestimmten Punkte H und K eine Linie zieht, diese als Abscissenaxe gelten lässt, und in ihr den beliebigen Punkt O zum Anfange der Coordinaten nimmt. Nun richte man HR und KT senkrecht auf OX, so bekommt man $HM = HR \cdot \sin HRM$ und $KN = KT \cdot \sin KTN$.

Nun ist $\operatorname{tg} SFG = \frac{dy}{dx} = p$, also $\cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, und man hat somit

$$\text{I)} \quad \sin HRM = \sin KTN = \cos SFG = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

Ferner ist schon in der vorigen Aufgabe dargethan, dass, wenn man die festen Abscissen OH und OK bezüglich mit a und α bezeichnet

$$HR = y + (a - x) \cdot p, \text{ und } KT = y + (\alpha - x) \cdot p$$

ist. Also hat man

$$\text{II)} \quad HM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ und } \quad \text{III)} \quad KN = \frac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Für das gesuchte Product $HM \cdot KN$ hat man also

$$U = \frac{(y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)}{1 + p^2}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{1}{1+p^2} \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta y + \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot [((a + \alpha - 2x) \cdot y$$
$$+ 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) - 2p \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe, so müssen folgende zwei identische Gleichungen zugleich stattfinden:

$$1) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

und

$$2) \quad ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2)$$
$$- 2p \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p) = 0$$

Digitized by Google

Eliminirt man p aus diesen beiden Gleichungen, so bekommt man

$$3)\quad (\alpha - a)^2 \cdot y = 0$$

d. h. y wäre eine identische Function von x, und die gesuchte Curve wäre die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist aber nur

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Da jedoch $\frac{d_y^2 U}{dy^2} \times \frac{d_p^2 U}{dp^2} - \left(\frac{d_y d_p U}{dy.dp}\right)^2 = -(\alpha - a)^2$ beständig negativ bleibt, so kann von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein (man sehe §. 11, 125, 186).

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so reducirt sich Gleichung IV auf

$$\delta U = \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot [((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2)$$
$$- 2p \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werde, muss sein

$$4)\quad ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2)$$
$$- 2p \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p) = 0$$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1 + p^2)^2}$; dann hat man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) \cdot dp \\ \quad - 2 \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p) \cdot p \cdot dp\end{array}\right\}}{(1 + p^2)^2} = 0$$

Da $dy = p \cdot dx$, so ist der Ausdruck

$$(2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) \cdot dy - (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) \cdot p \cdot dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung. Man kann ihn also zu dem Zähler des letzten Bruches addiren, ohne dass derselbe dadurch geändert wird; und somit bekommt man

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(2y + (a + \alpha - 2x).p).(1 + p^2).dy - (2y + (a + \alpha - 2x).p).(1 + p^2) \cdot p \cdot dx \\ \quad + ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) \cdot dp \\ \quad - 2 \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p) \cdot p \cdot dp\end{array}\right\}}{(1 + p^2)^2} = 0$$

Diese Gleichung kann man gradezu integriren, und es wird

$$\frac{(y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)}{1 + p^2} = A$$

Daraus folgt $(y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p) = A \cdot (1 + p^2)$; und führt man diesen Ausdruck in Gleichung 4 ein, so bekommt man

$$((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + p^2) - 2Ap \cdot (1 + p^2) = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{2 \cdot dy}{y} = \frac{(a + \alpha - 2x) \cdot dx}{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}$$

Also ist

$$2 \cdot \lg \text{nat}\, y = C + \lg \text{nat}(A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)$$

Oder mit Veränderung des Constanten

$$5)\quad y^2 = B \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)$$

Diese Gleichung enthält aber zwei willkürliche Constanten, während doch die hier

Digitized by Google

vorgegebene Differentialgleichung nur von der ersten Ordnung ist. Aber der Umstand, dass Gleichung 4 durch 5 identisch werden muss, dient dazu, den einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Aus 5 folgt nun $y = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{B \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2)}$ und $p = \frac{(\sqrt{1}) \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \sqrt{B}}{2 \cdot \sqrt{A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2}}$. Das Radical $(\sqrt{1})$ hat entweder durchweg nur seine positive oder durchweg nur seine negative Bedeutung. Vereinfacht man noch Gleichung 4, so bleibt nur

$$6)\quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - 2y^2 \cdot p - (a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot y = 0$$

und führt man hierin die so eben für y und p gefundenen Ausdrücke ein, so bleibt nach ausgeführten Reductionen nur noch übrig

$$4A \cdot (1 - B) - B \cdot (\alpha - a)^2 = 0$$

Daraus folgt $A = \frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$. Gleichung 5 geht also über in

$$7)\quad y^2 = B \cdot \left(\frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - a\alpha + ax + \alpha x - x^2\right)$$

welche sich aber auch auf folgende Weise darstellen lässt

$$8)\quad y^2 = B \cdot \left(\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2\right)$$

oder

$$9)\quad \frac{\left(x - \frac{\alpha + a}{2}\right)^2}{\frac{1}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{B}{1 - B} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Die gesuchte Curve ist also entweder eine Ellipse oder Hyperbel. Sie ist eine Ellipse, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ zugleich positiv sind; und dazu ist nöthig, dass $B < 1$ und positiv ist. Die gesuchte Curve aber ist eine Hyperbel, wenn $\frac{1}{1 - B}$ und $\frac{B}{1 - B}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; und dieses ist der Fall, wenn B negativ ist. B kann niemals grösser als + 1 sein; denn dabei käme man (Gleichung 8) auf den Widerspruch, dass y^2 negativ, also y selbst imaginär wäre.

Wie man den Constanten B bestimmt, ist aus früheren Aufgaben zur Genüge bekannt.

Da $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc.; so bekommt man für den Mutationscoefficienten der zweiten Ordnung nach und nach

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot [2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot (1 + p^2)$$
$$- 2 \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)] \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot (2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot (1 + p^2) - 2A \cdot (1 + p^2)) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1 + p^2} \cdot (A - a\alpha + ax + \alpha x - x^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

oder

$$\delta^2 U = -\frac{2}{1 + p^2} \cdot \frac{y^2}{B} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Die Ellipse, bei welcher B positiv ist, liefert also einen Maximum-stand; und die Hyperbel, bei welcher B negativ ist, liefert einen Minimum-stand.

Digitized by Google

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc.; und Gleichung IV reducirt sich auf

$$\delta U = \frac{1}{1 + p^2} \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta y$$

Man hat also die identische Gleichung

$$10) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

Daraus gibt sich

$$11) \quad y = E \cdot \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)$$

Die gesuchte Curve ist also (fig. 5 und 6) die Grade RT, welche genau mitten zwischen H und K die Abscissenaxe durchschneidet, und insoferne die Aufgabe löst, als jede Grade auch zugleich ihre eigene Berührende ist.

Wie man den Constanten E bestimmt, ist aus frühern Aufgaben zur Genüge bekannt.

Weil $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc.; so bekommt man für den Mutationscoefficienten der zweiten Ordnung

$$\delta^2 U = \frac{2}{1 + p^2} \cdot \delta y^2$$

woran man erkennt, dass jedenfalls ein Minimum-stand stattfindet.

Schaut man auf fig. 5 und 6, so sieht man, dass das hier gefundene Product $U = HM \cdot KN$ eigentlich negativ ist, weil die Factoren HM und KN einander entgegengesetzt sind. Ein negativer Ausdruck gilt aber in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht. Jede mit RT parallele Berührende z. B. VW aller andern nächstanliegenden Nachbarcurven erzeugt ein Product $U + \Delta U = HV \cdot KW$, welches natürlich auch jedesmal negativ ist, aber doch näher bei Null liegt, als das Product $U = HM \cdot KN$.

Beweis. Weil $HJ = JK$, so sind die zwei rechtwinkeligen Dreiecke HJM und KJN congruent, also sind die Lothe HM und KN einander gleich, aber entgegengesetzt. Desshalb ist $U = HM \cdot KN = HM \cdot (-HM) = -HM^2$. Weil nun VW parallel mit MN, so ist $VM = WN$. Man setze $VM = WN = D$, so ist $U + \Delta U = HV \cdot KW = (HM - VM) \cdot (KN + NW) = (HM - D) \cdot (-(HM + D)) = -HM^2 + D^2$, wie zu beweisen war.

Aufgabe 74.

Man zieht in einem beliebigen Puukte einer ebenen Curve die Berührende. Aus zwei festen Punkten einer gegebenen Graden errichtet man Perpendikel, welche bis zur Berührenden verlängert werden. Dadurch entsteht ein Trapez. Hierauf fällt man von denselben zwei festen Punkten Perpendikel auf die Berührende. Dadurch entsteht wieder ein Trapez. Welche Curve ist es nun, wenn der Unterschied dieser beiden Trapeze ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, und alle in Betracht zu ziehenden Curven das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem haben?

Die gegebene grade Linie (fig. 4) sei OX; H und K seien die in dieser Graden gelegenen bestimmten Punkte. Die beiden in Rede stehenden Trapeze sind also HRTK und HMNK. Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man die gegebene Grade OX als Abscissenaxe nimmt; in ihr nehme man dann nach Belieben einen Punkt O als Anfang der Coordinaten. Es ist des Trapezes HRTK Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot HK \cdot (HR + KT)$, und ebenso ist des Trapezes HMNK Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (HM + KN)$. Ist nun $OH = a$ und $OK = \alpha$, so ist nach Einleitung der beiden vorigen Aufgaben $HK = (\alpha - a)$, $HR = y + (a - x) \cdot p$, $KT = y + (\alpha - x) \cdot p$, $MN = ME \cdot \cos NME = HK \cdot \cos SFG = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2}}$, $HM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$, und $KN = \frac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Es ist also

Digitized by Google

$$\text{Trapez HRTK} = \frac{\alpha - a}{2} \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p)$$

und

$$\text{Trapez HMNK} = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p}{1 + p^2}$$

Der Unterschied dieser beiden Trapeze ist daher

$$U = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y \cdot p^2 + (a + \alpha - 2x) \cdot p^3}{1 + p^2}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{1 + p^2} \cdot p^2 \cdot \delta y + \frac{\alpha - a}{2 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot p \cdot (4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der 72ten Aufgabe; so müssen folgende zwei identische Gleichungen zugleich stattfinden:

$$1)\quad p^2 = 0$$

$$2)\quad p \cdot (4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p) = 0$$

Erstens. Diesen beiden Gleichungen wird zugleich genügt, wenn $p = 0$; und daraus folgt

$$3)\quad y = A$$

Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Grade, und die beiden Trapeze HRTK und HMNK fallen in ein einziges zusammen. Dabei ist $U' = 0$ ganz unabhängig vom Werthe des x, so dass von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann. Da nun besagte Grade mit der Abscissenaxe parallel ist, so liegen alle ihre Ordinaten auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe. Man setze also fest, dass die Ordinaten, welche zu besagter Graden gehören, die positiven seien. Dabei ist auch A positiv. Ferner ist jetzt nur $\delta^2 U = 2 \cdot (\alpha - a) \cdot A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, und es findet, eben weil A als positiv gilt, ein Minimum-stand statt.

Zweitens. Den Gleichungen 1 und 2 wird auch genügt, wenn

$$4)\quad y = 0$$

d. h. eine identische Function von x ist. Dadurch ist die in die Abscissenaxe hineinfallende Grade gegeben, und es ist wieder $U' = 0$. Es ist aber auch $\delta^2 U = 0$, und $\delta^3 U = (\alpha - a) \cdot \left(4\delta y - 3x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, woran man erkennt, dass jetzt von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein kann.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der 72sten Aufgabe; so zieht Gleichung I sich zurück auf

$$\delta U = \frac{\alpha - a}{2 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot p \cdot (4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}.$$

Es muss also jetzt die identische Gleichung

$$5)\quad p \cdot (4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p) = 0$$

stattfinden.

Erstens. Dieser Gleichung wird genügt, wenn $p = 0$, somit ist wieder

$$6)\quad y = A$$

d. h. man hat wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade, so dass wieder $U' = 0$, dagegen $\delta^2 U = 2 \cdot (\alpha - a) \cdot A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ ist, also ein Minimum-stand stattfindet, und von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Zweitens. Der Gleichung 5 wird aber auch genügt, wenn

Digitized by Google

$$7)\quad 4y + (a + \alpha - 2x) \cdot (3 + p^2) \cdot p = 0$$

stattfindet. Bringt man die Klammern weg, so bekommt man

$$8)\quad 4y + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot p + (a + \alpha - 2x) \cdot p^3 = 0$$

differentiirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$4 \cdot dy + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot dp - 6p \cdot dx - 2p^3 \cdot dx + 3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot p^2 \cdot dp = 0$$

Da aber $dy = p \cdot dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$3 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot (1 + p^2) \cdot dp - 2p \cdot (1 + p^2) \cdot dx = 0$$

Daraus folgt $\frac{3 \cdot dp}{p} - \frac{2 \cdot dx}{a + \alpha - 2x} = 0$. Also ist $\lg\text{nat}(p^3) + \lg\text{nat}(a + \alpha - 2x) = C$, oder $\lg\text{nat}(p^3 \cdot (a + \alpha - 2x)) = C$; und mit Veränderung des Constanten kann man auch setzen $\lg\text{nat}(p^3 \cdot (a + \alpha - 2x)) = \lg\text{nat}\, B$, oder $p^3 \cdot (a + \alpha - 2x) = B$, oder $p \cdot \sqrt[3]{a + \alpha - 2x} = \sqrt[3]{B}$. Daraus folgt nun $p = \frac{\sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{a + \alpha - 2x}}$, und somit bekommt man durch abermaliges Integriren

$$9)\quad y = E - \frac{3}{4} \cdot (\sqrt[3]{B}) \cdot \sqrt[3]{(a + \alpha - 2x)^2}$$

Dieses Integral hat aber zwei willkürliche Constanten, während doch die vorgelegte Differentialgleichung 7 oder 8 nur eine der ersten Ordnung ist. Allein gerade der Umstand, dass durch Gleichung 9 die Gleichung 7 oder 8 identisch werden muss, dient dazu, den einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Führt man nun die aus 9 für y und p sich ergebenden Ausdrücke in 8 ein, so bleibt (nach ausgeführten Reductionen) nur $4E + B = 0$; und daraus folgt $B = -4E$. Somit ist $(\sqrt[3]{B}) = \sqrt[3]{-4E} = (\sqrt[3]{-1}) \cdot \sqrt[3]{4E}$; und Gleichung 9 geht über in $y = E - \frac{3}{4} \cdot (\sqrt[3]{-1}) \cdot \sqrt[3]{4E \cdot (a + \alpha - 2x)^2}$. Weil aber hier, wo man einen Maximum-stand oder Minimum-stand sucht, das y eine reelle Function von x sein muss, so kann das Radical $(\sqrt[3]{-1})$ nur nach seiner reellen Bedeutung genommen werden, und es ist nur

$$10)\quad y = E + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{4E \cdot (a + \alpha - 2x)^2}$$

oder

$$11)\quad (y - E)^3 = \frac{27}{16} \cdot E \cdot (a + \alpha - 2x)^2$$

Die dadurch dargestellte Curve ist die Neil'sche Parabel. Hierbei ist ferner

$$U' = \frac{\alpha - a}{2} \cdot (4E + \sqrt[3]{4E \cdot (a + \alpha - 2x)^2}) \cdot \frac{\sqrt[3]{16E^2}}{(\sqrt[3]{16E^2}) + \sqrt[3]{(a + \alpha - 2x)^2}}$$

und

$$\delta^2 U = -\frac{3 \cdot (\alpha - a)}{2 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot (4E + \sqrt[3]{4E \cdot (a + \alpha - 2x)^2}) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Somit hangt es von E ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 72sten Aufgabe; so reducirt Gleichung I sich auf

$$\delta U = \frac{\alpha - a}{1 + p^2} \cdot p^2 \cdot \delta y$$

Digitized by Google

Daraus folgt $p = 0$, und somit ist $y = A$, d. h. man hat die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Aber eben weil $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. ist; so ist auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, etc.; und man erkennt, dass von einem Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein kann. Das wird aber auch noch durch folgende geometrische Betrachtung veranschaulicht:

„In diesem dritten Falle dürfen nur solche Curven in Untersuchung gezogen werden, „welche bei der grade gewählten Abscisse x eine Berührende haben, die mit der Be„rührenden der gefundenen Curve, d. h. mit der Abscissenaxe, parallel ist. Bei „allen diesen Curven so wie bei der gefundenen Curve ist der Unterschied der in Rede „stehenden Trapeze Null, folglich bei allen diesen Curven gleichgross."

Aufgabe 75.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, bei welchen der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass, wenn man an diesen Punkt die Berührende zieht, hierauf aus irgend einem festen Punkte eine Senkrechte auf die Berührende fällt, und dann den sich dabei in der Berührenden ergebenden Durchschnittspunkt mit irgend einem andern festen Punkte verbindet, diese Verbindungslinie ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die Auflösung wird (fig. 7) vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die beiden festen Punkte H und K legt. HM steht, wie die Aufgabe vorschreibt, senkrecht auf MS. Es sei $OH = a$ und $OK = \alpha$. Es ist also (man vergleiche die drei vorhergehenden Aufgaben)

$$\text{I)}\quad HM = HR \cdot \sin HRM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$\text{II)}\quad AM = HM \cdot \sin AHM = HM \cdot \sin HRM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{1 + p^2}$$

$$\text{III)}\quad AH = HM \cdot \cos AHM = HM \cdot \cos HRM = \frac{(y + (a - x) \cdot p) \cdot p}{1 + p^2}$$

Da nun $KM^2 = AM^2 + (AH + HK)^2$ ist; so gibt sich, wenn man noch U^2 statt KM^2 setzt,

$$U^2 = \left(\frac{y + (a - x) \cdot p}{1 + p^2}\right)^2 + \left(\frac{(y + (a - x) \cdot p) \cdot p}{1 + p^2} + (\alpha - a)\right)^2$$

oder wenn man noch abkürzt

$$\text{IV)}\quad U^2 = \frac{(y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (a - x) \cdot p + 2 \cdot (\alpha - a) \cdot p)}{1 + p^2} + (\alpha - a)^2$$

Man hätte nun beiderseits die Quadratwurzel auszuziehen, und dann erst zu mutiren; allein die Durchführung der Aufgabe wird einfacher, wenn man Gleichung IV gradezu mutirt, wodurch man zunächst

$$\text{V)}\quad 2U \cdot \delta U = \frac{1}{1 + p^2} \cdot (2y + 2 \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \delta y + \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot [(a - x) . (y + (a - x) \cdot p$$
$$+ 2 \cdot (\alpha - a) \cdot p) \cdot (1 + p^2) + (y + (a - x) \cdot p) \cdot ((a - x) + 2 \cdot (\alpha - a)) \cdot (1 + p^2)$$
$$- 2 \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (a - x) \cdot p + 2 \cdot (\alpha - a) \cdot p) \cdot p] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

bekommt.

Erster Fall. Lässt man dieselbe Allgemeinheit gelten, wie im ersten Falle der früheren Aufgaben; so müssen folgende zwei identische Gleichungen gleichzeitig nebeneinander bestehen:

Digitized by Google

$$1)\quad 2y + 2\cdot(\alpha - x)\cdot p = 0$$

$$2)\quad [(a - x)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p) + (y + (a - x)\cdot p)\cdot((a - x) + 2\cdot(\alpha - a))]\cdot(1 + p^2) - 2\cdot(y + (a - x)\cdot p)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p)\cdot p = 0$$

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der 72ten Aufgabe; so muss folgende Gleichung stattfinden:

$$3)\quad [(a - x)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p) + (y + (a - x)\cdot p)\cdot((a - x) + 2\cdot(\alpha - a))]\cdot(1 + p^2) - 2\cdot(y + (a - x)\cdot p)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p)\cdot p = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{dp}{(1 + p^2)^2}$ multiplicirt. Thut man dieses, und integrirt dann; so bekommt man

$$4)\quad \frac{1}{1 + p^2}\cdot(y + (a - x)\cdot p)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p) = C$$

oder

$$5)\quad (y + (a - x)\cdot p)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p) = C\cdot(1 + p^2)$$

Gleichung 3 geht nun über in

$$6)\quad [(a - x)\cdot(y + (a - x)\cdot p + 2\cdot(\alpha - a)\cdot p) + (y + (a - x)\cdot p)\cdot((a - x) + 2\cdot(\alpha - a))]\cdot(1 + p^2) - 2Cp\cdot(1 + p^2) = 0$$

Daraus folgt gradezu

$$7)\quad \frac{p}{y} = \frac{\alpha - x}{(a - x)\cdot((\alpha - x) + (\alpha - a) - C)}$$

oder

$$8)\quad \frac{p}{y} = \frac{\alpha - a}{(2\cdot(\alpha - a) - C)\cdot(a - x)} + \frac{\alpha - a - C}{(2\cdot(\alpha - a) - C)\cdot((\alpha - x) + (\alpha - a) - C)}$$

Diese Gleichung lässt sich nun gradezu integriren. Durch diese Integration geht aber noch ein fernerer Constanter B ein, so dass die für y gefundene Function zwei Constanten B und C enthält, während doch die vorgelegte Differentialgleichung 3 nur von der ersten Ordnung ist, d. h. die gesuchte Urfunction nur einen willkürlichen Constanten enthalten sollte. Man bestimme also für y und p die Ausdrücke, und führe sie in 3 ein; so kann man B durch C, oder auch C durch B bestimmen, und die gesuchte Function enthält nur noch einen willkürlichen Constanten.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 72ten Aufgabe; so muss jetzt folgende Gleichung stattfinden:

$$9)\quad 2y + 2\cdot(\alpha - x)\cdot p = 0$$

Und so fort.

Aufgabe 76.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen die zwischen dem Producte der Abscisse und Subnormale und zwischen dem Quadrate der Abscisse stattfindende Differenz den bestimmt gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass bei dem zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte das von der Normale und den Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

Digitized by Google

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch noch
β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,
gemacht werden kann.

Es sei (fig. 8) S ein beliebig gewählter Punkt, durch welchen die Normale gelegt ist; dann ist COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck, wenn O als Anfangspunkt der Coordinaten gilt. Nun ist die Gleichung der Normale

$$(y'' - y) \cdot p + x'' - x = 0$$

wo x'' und y'' die veränderlichen Coordinaten der Normale, und x und y die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve sind, durch den man grade die Normale legt; ferner ist, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt. Für den Punkt D ist $y'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OD = x'' = py + x$; für den Punkt C ist $x'' = 0$, und somit folgt aus obiger Gleichung $OC = y'' = \frac{py + x}{p}$. Des Dreieckes OCD Inhalt ist $= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD$, und sonach hat man

$$\text{I)} \quad U = \frac{(py + x)^2}{2p}$$

Ferner hat man für die hier vorgeschriebene Bedingung noch folgende Gleichung:

$$\text{II)} \quad \frac{y}{p} \cdot x - x^2 = A$$

Erste Auflösung.

Mutirt man Gleichung I, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = (py + x) \cdot \left(\delta y + \frac{py - x}{2 \cdot p^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)$$

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = (py + x) \cdot \left(\delta^2 y + \frac{py - x}{2 \cdot p^2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + p \cdot \delta y^2 + 2y \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{x^2}{p^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Aus Gleichung II aber folgt

$$\text{V)} \quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{p}{y} \cdot \delta y, \quad \text{VI)} \quad \frac{d\delta^2 y}{dx} = \frac{p}{y} \cdot \delta^2 y, \text{ etc.}$$

Eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$ aus III, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{1}{2py} \cdot (py + x) \cdot (3py - x) \cdot \delta y$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss entweder $3py - x = 0$ oder $py + x = 0$ sein.

Erstens. Aus $3py - x = 0$ folgt $3y^2 - x^2 = B$. Dieses ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Coordinaten in O anfangen. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob durch diese Gleichung auch Gleichung II identisch wird. Man führe also $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + B)}$ statt y, und $\frac{x}{\sqrt{3 \cdot (x^2 + B)}}$ statt p in Gleichung II ein; und berücksichtige, dass die Radicale entweder durchweg ihre positive oder durchweg ihre negative Bedeutung haben. Es gibt sich $\frac{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + B)}}{\frac{x}{\sqrt{3 \cdot (x^2 + B)}}} \cdot x - x^2 = A$, oder $B = A$. Somit ist $3 \cdot y^2 - x^2 = A$ die vollkommen bestimmte und keiner weitern Nebenbedingung

Digitized by Google

mehr unterliegende Gleichung der gesuchten Hyperbel. Unter diesen Umständen geht Gleichung IV über in

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \frac{4x}{\sqrt{\frac{1}{3}\cdot(x^2 + A)}} \cdot \delta y^2$$

Ferner ist $U' = \frac{8x}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}\cdot(x^2 + A)}$; und man erkennt, dass U' und $\delta^2 U$ unter allen Umständen einerlei Zeichen haben. Sonach entscheidet man sich (nach §. 114. a. Seite 170) auf folgende Weise:

α) Wenn dem Radical die Bedeutung zukommt, dass $\delta^2 U$ positiv wird, so ist auch U' positiv und zugleich ein Minimum-stand.

β) Wenn dem Radical die Bedeutung zukommt, dass $\delta^2 U$ negativ wird, so ist auch U' negativ und zugleich ein Maximum-stand, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Zweitens. Aus $p \cdot y + x = 0$ folgt $y^2 + x^2 = r^2$, d. h. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in O liegt, so dass die Normale durch O geht, und das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck Null wäre. Man untersuche nun vor Allem, ob durch die hiesige Gleichung auch Gleichung II identisch wird, und führe zu diesem Ende $\sqrt{r^2 - x^2}$ statt y, und $\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ statt p in Gleichung II ein: dadurch bekommt man $\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}} \cdot x - x^2 = A$, oder $-(r^2 - x^2) - x^2 = A$, oder $-r^2 = A$, so dass der Kreis nur existiren kann, wenn der Werth A der gegebenen Differenz negativ ist. Unter diesen Umständen geht Gleichung IV über in

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = -\frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \delta y^2$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Radicals zweideutig; und da jetzt $U' = 0$ nichts mit diesem Radical zu thun hat, so muss man sich (nach §. 114. c. Seite 170) dahin entscheiden, dass hier weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Function y von x der Gleichung II genügen muss; so wird die gesuchte Function irgend ein Integral der Gleichung II sein. Man integrire also Gleichung II, und forme sie desshalb um in $\frac{dy}{y} = \frac{x \cdot dx}{x^2 + A}$. Integrirt man, so gelangt man endlich zu folgender Gleichung:

$$\text{X)}\quad y^2 = E \cdot (x^2 + A)$$

Das E muss so beschaffen sein, dass das Product $E \cdot (x^2 + A)$ positiv wird. Führt man nun $\sqrt{E \cdot (x^2 + A)}$ statt y, und $\frac{E \cdot x}{\sqrt{E \cdot (x^2 + A)}}$ statt p in Gleichung I ein; so bekommt man $U' = \frac{x}{2E} \cdot (E + 1)^2 \cdot \sqrt{E \cdot (x^2 + A)}$. Man erkennt nun an der für y gefundenen Function, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des E auch stetig nebeneinander liegende Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an dem für U' hergestellten Ausdrucke, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des E auch stetig nebeneinander liegende Werthe des U' gehören. Um nun zu wissen, wann U' ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, differentiire man U' nach E und man bekommt $\frac{dU'}{dE} = \frac{x}{4 \cdot E^2} \cdot (3E - 1) \cdot (E + 1) \cdot \sqrt{E \cdot (x^2 + A)}$. Es kann also $\frac{dU'}{dE} = 0$ werden entweder wenn $3E - 1 = 0$, oder wenn $E + 1 = 0$ ist.

Digitized by Google

Erstens. Wenn $3E - 1 = 0$, so ist $E = \frac{1}{3}$, und Gleichung X geht über in $3y^2 - x^2 = A$. Differentiirt man noch einmal, und führt man dann für E den Werth $\frac{1}{3}$ ein; so bekommt man

$$\text{XI)} \quad \frac{d^2U'}{dE^2} = 9 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}$$

Ferner ist $U' = \frac{8x}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}$; und da die für $\frac{d^2U'}{dE^2}$ und U' hergestellten Ausdrücke das Radical als gemeinschaftlichen Factor enthalten, so erkennt man, dass U' und δ^2U unter allen Umständen einerlei Zeichen haben. Man entscheidet sich also auch jetzt auf dieselbe Weise, wie bei der ersten Auflösung.

Zweitens. Wenn $E + 1 = 0$, so ist $E = -1$, und Gleichung X geht über in $y^2 + x^2 = -A$, woraus hervorgeht, dass A jedenfalls negativ sein muss. Ferner ist jetzt

$$\text{XII)} \quad \frac{d^2U'}{dE^2} = \left(-x \cdot \sqrt{-x^2 - A}\right)$$

Dieser Ausdruck ist wegen des Radicals zweideutig, und da jetzt $U' = 0$ nichts mit diesem Radical zu thun hat, so muss man sich (nach §. 114, c., S. 170) dahin entscheiden, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Zusatz 1. Die Gleichungen VIII und XI sollen ein und dasselbe Prüfungsmittel abgeben; und somit könnte der Anfänger fragen: worin besteht die Uebereinstimmung dieser beiden Gleichungen? Die Antwort darauf ist folgende: Das der Gleichung II zugehörige Integral ist $y = \sqrt{E \cdot (x^2 + A)}$, wie sich aus X ergibt. Die Mutation, welche y erleiden kann, besteht sonach nur in einer Werthänderung des willkürlichen Constanten E, indem man nemlich $(E + DE)$ oder vielmehr

$$E + \varkappa \cdot \vartheta E + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 E + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 E \ldots\ldots.$$

an die Stelle des E setzt. Aus $y = \sqrt{E \cdot (x^2 + A)}$ bekommt man also

$$\delta y = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2 + A}{E}}\right) \cdot \vartheta E, \text{ oder } \delta y^2 = \frac{x^2 + A}{4E} \cdot \vartheta E^2$$

Da aber hier $E = \frac{1}{3}$, so ist $\delta y^2 = \frac{3}{4} \cdot (x^2 + A) \cdot \vartheta E^2$. Führt man diesen Ausdruck in VIII ein, so bekommt man $\delta^2U = 9x \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (x^2 + A)}\right) \cdot \vartheta E^2$, wodurch der Zusammenhang zwischen VIII und XI nachgewiesen ist.

Zusatz 2. Dieselbe Frage lässt sich zwischen den Gleichungen IX und XII aufstellen. Die Antwort ist folgende: Man hat zunächst $\delta y^2 = \frac{x^2 + A}{4E} \cdot \vartheta E^2$; und da jetzt $E = -1$, so ist jetzt $\delta y^2 = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 + A) \cdot \vartheta E^2$. Führt man diesen Ausdruck in IX ein, so bekommt man $\delta^2U = +\frac{x \cdot (x^2 + A)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \vartheta E^2$; und da $r^2 = -A$ sein muss, so kann man letzteren Ausdruck auch umformen in

$$\delta^2U = -\frac{x \cdot (-A - x^2)}{\sqrt{-A - x^2}} \cdot \vartheta E^2 = \left(-x \cdot \sqrt{-A^2 - x^2}\right) \cdot \vartheta E^2$$

wodurch auch der Zusammenhang zwischen IX und XII nachgewiesen ist.

Aufgabe 77.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, deren Berührende alle durch den nemlichen festen Punkt gehen, die-

Digitized by Google

jenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man durch den zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und wenn man hierauf aus zwei in der Ebene irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührende fällt, die Summe dieser beiden Perpendikel grösser oder kleiner wird, als sie (die Summe) bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

D sei (fig. 4) derjenige feste Punkt, durch welchen die Berührenden aller hier zu betrachtenden Curven gehen sollen; H und K seien diejenigen Punkte, von welchen aus man Perpendikel auf die Berührende der gesuchten Curve ziehen soll. Man lege eine Linie OX durch die beiden Punkte H und K, und nehme diese Linie als Abscissenaxe an. Man ziehe durch den gegebenen Punkt D ein Perpendikel auf OX. Dieses Perpendikel YO nehme man als Ordinatenaxe, so ist der Punkt O der Anfang der Coordinaten. Die hier in Rede stehenden Perpendikel sind HM und KN. Nun ist $y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}$ die Gleichung der berührenden Graden FT. Für den Punkt D ist $x' = 0$, also ist $OD = y' = y - px$. Ferner hat man nach der 73sten und 74sten Aufgabe $HM = \frac{y + (a - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$, und $KN = \frac{y + (\alpha - x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Man hat also jetzt die Aufgabe: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \frac{2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad y - px = g$$

stattfindet, wo g einen bestimmt gegebenen (positiven oder negativen) Werth hat.

(Ob dem Radical $\sqrt{1 + p^2}$ seine positive oder negative Bedeutung zukomme, darüber kann man sich erst entscheiden, wenn man die gesuchte Curve und die Lage ihrer Berührenden kennt.)

Erste Auflösung.

Man mutire Gleichung I, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} \cdot \left[2 \cdot (1 + p^2) \cdot \delta y + (a + \alpha - 2x - 2py) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right]$$

Aus Gleichung II folgt

$$\text{IV)} \quad \delta y = x \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Führt man diesen für δy gefundenen Ausdruck in Gleichung III ein, so bekommt man

$$\text{V)} \quad \delta U = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} \cdot (a + \alpha - 2 \cdot py + 2p^2 \cdot x) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Es ist also

$$\text{VI)} \quad a + \alpha - 2 \cdot py + 2p^2 \cdot x = 0$$

Um aber diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie zuvor noch einmal, und man bekommt $-2p \cdot dy - 2y \cdot dp + 4px \cdot dp + 2p^2 \cdot dx = 0$. Weil aber $dy = p \cdot dx$, so reducirt sich diese Gleichung auf $2 \cdot (2px - y) \cdot dp = 0$; und dieser Gleichung geschieht Genüge entweder wenn $dp = 0$, oder wenn $2px - y = 0$.

Erstens. Wenn $dp = 0$, so ist

$$\text{VII)} \quad y = Ax + B$$


Digitized by Google

d. h. man hat die grade Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Grade zugleich ihre eigene Berührende ist. Diese Gleichung enthält aber zwei willkürliche Constanten, während doch die vorgegebene Differentialgleichung VI nur von der ersten Ordnung ist. Aber eben der Umstand, dass VI durch VII identisch werden muss, dient dazu, um einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Man führe also $(Ax + B)$ statt y, und A statt p in Gleichung VI überall ein, und reducire soviel als möglich, so bekommt man $a + \alpha - 2AB = 0$, also $A = \frac{a + \alpha}{2B}$; und Gleichung VII geht über in

$$\text{VIII)} \quad y = \frac{a + \alpha}{2B} \cdot x + B$$

Durch diese Gleichung muss aber auch Gleichung II identisch werden. Man führe also $\left(\frac{a + \alpha}{2B} \cdot x + B\right)$ statt y, und $\frac{a + \alpha}{2B}$ statt p in Gleichung II ein, und es ergibt sich $B = g$. Gleichung VIII geht also über in

$$\text{IX)} \quad y = \frac{a + \alpha}{2g} \cdot x + g$$

so dass die Gleichung der gesuchten Graden vollkommen bestimmt ist, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Auch ist $U' = \sqrt{(a + \alpha)^2 + 4g^2}$; und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden ist

$$\delta^2 U = - \frac{16 \cdot g^4}{[(a + \alpha)^2 + 4g^2] \cdot \sqrt{(a + \alpha)^2 + 4g^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Das Radical $\sqrt{(a + \alpha)^2 + 4g^2}$ ist bei den für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücken gemeinschaftlicher Factor. Man entscheidet sich also (nach §. 114, a., S. 170) auf folgende Weise:

α) Hat das Radical seine positive Bedeutung, so ist auch U' positiv, dagegen $\delta^2 U$ negativ; und dabei ist U' ein Maximum-stand.

β) Hat das Radical seine negative Bedeutung, so ist auch U' negativ, dagegen $\delta^2 U$ positiv; und dabei ist U' ein Minimum-stand, aber in dem Sinne, dass ein negativer Ausdruck in der Analysis für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht.

Zweitens. Setzt man $2px - y = 0$, so bekommt man $y^2 = C \cdot x$, d. h. die Gleichung einer Apollonischen Parabel. Da aber dieses Integral auch die Gleichung VI identisch machen muss, so führe man $\sqrt{Cx}$ statt y, und $\frac{C}{2 \cdot \sqrt{Cx}}$ statt p in Gleichung VI ein, reducire soviel als möglich, und es bleibt $a + \alpha - \frac{C}{2} = 0$; also ist $C = 2 \cdot (a + \alpha)$, und die Gleichung der gesuchten Apollonischen Parabel ist

$$\text{X)} \quad y^2 = 2 \cdot (a + \alpha) \cdot x$$

Da aber Gleichung X als Integral von Gleichung VI gelten muss, während diese Gleichung X keinen willkürlichen Constanten mehr enthält, auch kein besonderer Fall von Gleichung VIII ist, so ist Gleichung X ein singuläres Integral von Gleichung VI. Nun soll aber durch X auch noch II identisch werden; man führe also $\sqrt{2 \cdot (a + \alpha) \cdot x}$ statt y, und $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (a + \alpha)}{x}}$ statt p in Gleichung II überall ein; und man bekommt $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a + \alpha) \cdot x} = g$. Diese Gleichung ist aber keine identische; und somit kann dieser zweite Fall, welcher auf ein singuläres Integral führt, nicht weiter berücksichtigt werden.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Function y von x auch der Gleichung II genügen muss; so wird die gesuchte Function irgend ein Integral von Gleichung II sein. Man integrire also

Digitized by Google

Gleichung II, und forme sie zu diesem Ende um in $\frac{dy}{y-g} = \frac{dx}{x}$. Daraus folgt $y = cx + g$. Man führe also $cx + g$ statt y, und c statt p in Gleichung I überall ein, so bekommt man $U' = \frac{2g + (a + \alpha) \cdot c}{\sqrt{1 + c^2}}$. An der Gleichung $y = cx + g$ erkennt man, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c auch stetig nebeneinander liegende Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an der Gleichung $U' = \frac{2g + (a + \alpha) \cdot c}{\sqrt{1 + c^2}}$ dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c auch stetig nebeneinander liegende Werthe des U' gehören. Um nun zu wissen, wann U' ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist; differentiire man U' nach c, und es ergibt sich

$$\frac{dU'}{dc} = \frac{a + \alpha - 2gc}{\sqrt{(1 + c^2)^3}}$$

Daraus folgt $a + \alpha - 2gc = 0$, also $c = \frac{a + \alpha}{2g}$, und man hat wieder

$$\text{XI)} \quad y = \frac{a + \alpha}{2g} \cdot x + g$$

wie schon in Gleichung X gefunden ist. Differentiirt man noch einmal, so bekommt man im Allgemeinen $\frac{d^2U'}{dc^2} = -\frac{2g \cdot (1 + c^2) + 3c \cdot (a + \alpha - 2gc)}{\sqrt{(1 + c^2)^5}}$; und wenn man den für c gefundenen Werth einführt, so ist

$$\frac{d^2U'}{dc^2} = -\frac{16 \cdot g^4}{[(a + \alpha)^2 + 4g^2] \cdot \sqrt{(a + \alpha)^2 + 4g^2}}$$

Da nun sowohl der für $\frac{d^2U'}{dc^2}$ als auch der für U' hergestellte Ausdruck das Radical als gemeinschaftlichen Factor enthalten, so entscheidet man sich hier wieder, wie bei der ersten Auflösung.

Es ist bemerkenswerth, dass diese zweite Auflösung nur auf den Fall führt, welcher mit dem in der ersten Auflösung erhaltenen allgemeinen Integral übereinstimmt. Der Grund davon ist aber der, dass das in der ersten Auflösung erhaltene singuläre Integral gar kein Integral der Gleichung II ist, und somit die zweite Auflösung, welche ganz allein vom Integral der Gleichung II ausgeht, auch nicht auf besagtes singuläre Integral führen kann. Die zweite Auflösung ist daher ebenso vollständig, wie die erste.

Aufgabe 78.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen die zwischen dem Quadrate der Normale und zwischen dem doppelten Quadrate der Abscisse stattfindende Differenz den bestimmt gegebenen (positiven oder negativen) Werth A hat, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass bei dem zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte das von der Normale und den Coordinatenaxen eingeschlossene Dreieck grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort näschstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Es ist (fig. 8), wie in Aufgabe 76, das Dreieck COD das auf vorgeschriebene Weise begränzte, und sein Inhalt ist

Digitized by Google

$$\text{I)} \quad U = \frac{(py + x)^2}{2 \cdot p}$$

Die Normale ist $y \cdot \sqrt{1 + p^2}$; und somit hat man folgende Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad y^2 \cdot (1 + p^2) - 2x^2 = A$$

Erste Auflösung.

Mutirt man Gleichung I und II, und eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$; so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot y \cdot p^3} \cdot (py + x) \cdot (y \cdot p^3 + x \cdot p^2 - y \cdot p + x) \cdot \delta y$$

Hier wird $\delta U = 0$, wenn eine von folgenden zwei Gleichungen stattfindet:

entweder IV) $py + x = 0$, oder V) $y \cdot p^3 + x \cdot p^2 - y \cdot p + x = 0$

Erstens Lässt man Gleichung IV gelten, so muss man damit noch Gleichung II verbinden. Es gibt aber keine solche Function y von x, welche den beiden Gleichungen IV und II zugleich genügt, d. h. diese beiden Gleichungen widersprechen einander.

Zweitens. Lässt man Gleichung V gelten, so muss man damit wieder die Gleichung II verbinden. Es gibt aber auch keine solche Function y von x, welche den beiden Gleichungen V und II zugleich genügt, d. h. auch diese zwei Gleichungen widersprechen einander.

Man erkennt also, dass die hier gestellte Aufgabe unmöglich ist.

Zweite Auflösung.

Man integrire Gleichung II, und sondere zu diesem Zwecke das Product $y \cdot p$ ab; so bekommt man $y \cdot p = \sqrt{A + 2 \cdot x^2 - y^2}$. Man setze $\sqrt{A + 2 \cdot x^2 - y^2} = x \cdot z$, quadrire beiderseits, und differentiire dann; so bekommt man $y \cdot p = (2 - z^2) \cdot x - x^2 \cdot z \cdot \frac{dz}{dx}$. Man eliminire $y \cdot p$ und $\sqrt{A + 2 \cdot x^2 - y^2}$ aus diesen drei Gleichungen; so bekommt man folgende neue: $\frac{1}{3} \cdot \frac{dz}{z - 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{dz}{z + 2} + \frac{dx}{x} = 0$. Wenn man jetzt (wie schon einmal Seite 20) integrirt, so bekommt man $(z - 1) \cdot (z + 2)^2 \cdot x^3 = B$; und wenn man für z den Ausdruck zurückführt, so gibt sich

$$\text{VI)} \quad \left(-x + \sqrt{A + 2x^2 - y^2}\right) \cdot \left(2x + \sqrt{A + 2x^2 - y^2}\right)^2 = B$$

Verfahrt man nun weiter, wie bei der zweiten Auflösung der zwei vorhergehenden Aufgaben; so wird man auch jetzt erkennen, dass die hier gestellte Aufgabe unmöglich ist.

Aufgabe 79.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen das zu einerlei Abscisse x gehörige Product der Ordinate und Normale auch jedesmal einen gleichgrossen Werth bekommt, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass bei dem zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte die Summe der Abscisse und Subnormale ein grösseres oder kleineres Verhältniss zur Normale hat, als es (das Verhältniss) bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Setzt man p statt $\frac{dy}{dx}$, so soll hier

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad U = \frac{x + y \cdot p}{y \cdot \sqrt{1 + p^2}}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, welche alle bei einerlei Werth des x auch jedesmal für den Ausdruck

$$\text{II)}\quad y^2 \cdot \sqrt{1 + p^2}$$

einerlei aber einen nichtgegebenen Werth erzeugen. Mutirt man, so bekommt man aus I

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{1}{y^2 \cdot (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[- x \cdot (1 + p^2) \cdot \delta y + (y^2 - p \cdot xy) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right]$$

und aus der in II gestellten Bedingung folgt

$$\text{IV)}\quad 2 \cdot (1 + p^2) \cdot \delta y + p \cdot y \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

$$\text{V)}\quad 2 \cdot (1 + p^2) \cdot \delta^2 y + p \cdot y \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + 5 \cdot p \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + y \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 0$$

etc. etc.

Aus den beiden letzteren Gleichungen gibt sich

$$\text{VI)}\quad \delta y = - \frac{p \cdot y}{2 \cdot (1 + p^2)} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 y = - \frac{p \cdot y}{2 \cdot (1 + p^2)} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{3p^2 \cdot y - 2y}{4 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Eliminirt man δy aus Gleichung III, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{2y - px}{2y \cdot (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss $2y - px = 0$ sein. Daraus folgt $\frac{dy}{y} = \frac{2 \cdot dx}{x}$; also ist

$$\text{IX)}\quad ay = x^2$$

d. h. die gesuchte Curve ist die Apollonische Parabel. Mutirt man Gleichung III noch einmal, und eliminirt man δy und $\delta^2 y$; so bekommt man

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = - \frac{a^4 \cdot (a^2 + 6x^2)}{2x \cdot (a^2 + 4x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Ferner ist

$$\text{XI)}\quad U' = \frac{a^2 + 2 \cdot x^2}{x \cdot \sqrt{a^2 + 4 \cdot x^2}}$$

Da aber die in II gestellte Bedingung keine Gleichung ist, so kann der willkürliche Constante a nur dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Curve noch einer weitern Bedingung unterwirft, dass sie z. B.

1) durch einen festen Punkt (n, m) gehe; oder dass

2) die zur Abscisse n gehörige Berührende mit der Abscissenaxe einen Winkel bilde, dessen goniometrische Tangente = g. Hier wäre $\frac{2n}{a} = g$, also $a = \frac{2n}{g}$, und somit hätte die gesuchte Curve die Gleichung $\frac{2n}{g} \cdot y = x^2$.

3) Man kann aber auch den Constanten a dadurch bestimmen, dass man festsetzt,

Digitized by Google

die zur Abscisse n gehörige Normale solle den Werth h haben. Hier wäre $(y \cdot \sqrt{1+p^2})_n = h$, oder $\frac{n^2}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{4n^2}{a^2}} = h$, oder $n^4 \cdot (a^2 + 4n^2) = a^4 \cdot h^2$, woraus sich a bestimmen lässt.

Und so fort.

Aufgabe 80.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen die zu einerlei Abscisse x gehörigen Subnormalen auch jedesmal eine gleichgrosse Länge haben, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man an den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührende zieht, und wenn man diese von zwei in bestimmten Punkten der Abscissenaxe errichteten Perpendikeln begränzt, das Product dieser Perpendikel grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Hier soll also (man sehe Aufgabe 72) das Product

$$\text{I)} \quad U = (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, welche alle bei einerlei Werth des x auch jedesmal für den Ausdruck

$$\text{II)} \quad y \cdot \frac{dy}{dx}$$

einerlei aber einen nichtgegebenen Werth erzeugen. Mutirt man, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta y + ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \delta^2 y + ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

und aus der in II gestellten Bedingung folgt

$$\text{V)} \quad p \cdot \delta y + y \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

$$\text{VI)} \quad p \cdot \delta^2 y + 2 \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + y \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0,$$

Aus den beiden letzten Gleichungen gibt sich aber

$$\text{VII)} \quad \frac{d\delta y}{dx} = -\frac{p}{y} \cdot \delta y$$

$$\text{VIII)} \quad \frac{d\delta^2 y}{dx} = -\frac{p}{y} \cdot \delta^2 y + \frac{2p}{y^2} \cdot \delta y^2$$

Eliminirt man $\frac{d\delta y}{dx}$ aus Gleichung III, so gibt sich

$$\text{IX)} \quad \delta U = \frac{2}{y} \cdot (y^2 - (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p^2) \cdot \delta y$$

Digitized by Google

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$\text{X)}\quad y^2 - (a - x)\cdot(\alpha - x)\cdot p^2 = 0$$

Also

$$\text{XI)}\quad y^2 = (a - x)\cdot(\alpha - x)\cdot p^2$$

und

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(a - x)\cdot(\alpha - x)}}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $(a - x)$ und $(\alpha - x)$ gleiche Vorzeichen haben müssen, damit das Radical nicht imaginär wird; und diese Eigenthümlichkeit ist durch die ganze Aufgabe festzuhalten. Integrirt man letztere Gleichung, so ist

$$\lg\text{nat}\, y = \lg\text{nat}\, A + \lg\text{nat}\left(2x - a - \alpha + 2\cdot\sqrt{(a - x)\cdot(\alpha - x)}\right)$$

oder

$$\text{XII)}\quad y = A\cdot\left(2x - a - \alpha + 2\cdot\sqrt{(a - x)\cdot(\alpha - x)}\right)$$

Eliminirt man aus Gleichung IV das $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d\delta^2 y}{dx}$, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{1}{y^2}\cdot\left(6\cdot(a - x)\cdot(\alpha - x)\cdot p^2 + 2y^2\right)\cdot\delta y^2$$

Dieser Ausdruck reducirt sich aber in Folge der Gleichung X auf $\delta^2 U = 8\cdot\delta y^2$, woran man erkennt, dass

$$U' = A^2\cdot\left(2x - a - \alpha + 2\cdot\sqrt{(a - x)\cdot(\alpha - x)}\right)^2 \times \frac{\left(\sqrt{a - x} + \sqrt{\alpha - x}\right)^2}{\sqrt{(a - x)\cdot(\alpha - x)}}$$

ein Minimum-stand ist.

Da die in II gestellte Bedingung keine Gleichung ist, so kann der willkürliche Constante A nur dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Curve noch irgend einer Nebenbedingung unterwirft. Nebenbedingungen dieser Art sind am Schlusse der vorigen Aufgabe aufgestellt worden.

Aufgabe 81.

Man zieht in den zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt einer ebenen Curve die Berührende. Aus zwei festen Punkten einer gegebenen Graden errichtet man Perpendikel, welche bis zur Berührenden verlängert werden. Dadurch entsteht ein Trapez. Hierauf fällt man von denselben zwei festen Punkten Perpendikel auf die Berührende. Dadurch entsteht wieder ein Trapez. Nun soll man unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen das erste Trapez beständig den bestimmten Werth c^2 behält, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass das zu der bereits nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige zweite Trapez grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Nach der Einleitung zu Aufgabe 74 (man sehe auch fig. 4) ist

$$\text{das zweite Trapez HMNK} = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y + (a + \alpha - 2x)\cdot p}{1 + p^2}$$

$$\text{das erste Trapez HRTK} = \frac{\alpha - a}{2}\cdot\left(2y + (a + \alpha - 2x)\cdot p\right)$$

Digitized by Google

Man hat also jetzt die beiden Gleichungen

$$\text{I)}\quad U = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p}{1 + p^2}$$

und

$$\text{II)}\quad \frac{\alpha - a}{2} \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) = c^2$$

Erste Auflösung.

Aus I bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{2 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot \left[\left(2 \cdot \delta y - 2x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot (1 + p^2) - 2 \cdot p \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right]$$

und aus II bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0, \quad \text{V)}\quad \delta^2 y - x \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ etc.}$$

Betrachtet man δy, $\delta^2 y$ etc. als abhängig, und eliminirt man δy aus III; so gibt sich

$$\text{VI)}\quad \delta U = -\frac{\alpha - a}{(1 + p^2)^2} \cdot p \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Es ist also entweder $p = 0$ oder $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$.

Erstens. Setzt man $p = 0$, so ist $y = A$, d. h. constant. Durch diese Gleichung muss aber auch Gleichung II identisch werden, wesshalb man A statt y, und Null statt p in Gleichung II einzuführen hat. Dadurch bekommt man $(\alpha - a) \cdot A = c^2$, und somit ist $A = \frac{c^2}{\alpha - a}$, so dass man für die gesuchte Function

$$\text{VII)}\quad y = \frac{c^2}{\alpha - a}$$

hat. Diese Gleichung, welche keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann, gehört zu einer mit der Abscissenaxe parallelen Graden, welche zugleich ihre eigene Berührende ist. Das erste und zweite Trapez fallen also hier ganz zusammen. Mutirt man Gleichung III noch einmal, und eliminirt man δy und $\delta^2 y$; so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = -2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass $U' = c^2$ ein Maximum-stand ist. Da der Werth des U' vom Werthe des x ganz unabhängig ist, so kann von einer secundären Beziehung keine Rede sein.

Zweitens. Setzt man $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$, so bekommt man

$$\frac{2 \cdot dx}{a + \alpha - 2x} + \frac{dy}{y} = 0$$

Daraus folgt durch Integration $-\lg \text{nat}\,(a + \alpha - 2x) + \lg \text{nat}\, y = \lg \text{nat}\, E$; also ist $y = E \cdot (a + \alpha - 2x)$. Durch diese Gleichung muss auch Gleichung II erfüllt werden, so dass dieser Umstand noch mit benützt werden kann, den Werth des E zu bestimmen. Führt man nun $E \cdot (a + \alpha - 2x)$ statt y, und $(-2E)$ statt p in II ein; so kommt man zu dem Widerspruch, dass $c^2 = 0$ sei. Die Gleichung $y = E \cdot (a + \alpha - 2x)$ ist also kein Integral von II, und somit braucht dieser zweite Fall nicht weiter beachtet zu werden.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchte Function y von x auch der Gleichung II genügen muss; so wird die gesuchte Function irgend ein Integral der Gleichung II sein. Man integrire also diese Gleichung, und forme sie zu diesem Zwecke um in

Digitized by Google

$$\frac{dy}{\frac{2c^2}{\alpha - a} - 2y} = \frac{dx}{a + \alpha - 2x}$$

Daraus folgt gradezu

$$-\frac{1}{2} \cdot \lg \text{nat} \left(\frac{2 \cdot c^2}{\alpha - a} - 2y\right) = -\frac{1}{2} \cdot \lg \text{nat}\, 2B - \frac{1}{2} \cdot \lg \text{nat}\, (a + \alpha - 2x)$$

oder

$$\lg \text{nat} \left(\frac{2 \cdot c^2}{\alpha - a} - 2y\right) = \lg \text{nat}\, 2B + \lg \text{nat}\, (a + \alpha - 2x)$$

also

$$\text{IX)} \quad y = \frac{c^2}{\alpha - a} - B \cdot (a + \alpha - 2x)$$

Gleichung I geht nun über in

$$\text{X)} \quad U' = \frac{c^2}{1 + 4B^2}$$

An Gleichung IX erkennt man, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des B auch stetig nebeneinander liegende Werthe des y gehören; ebenso erkennt man an Gleichung X, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des B auch stetig nebeneinander liegende Werthe des U' gehören. Um nun zu wissen, wann U' ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist; differentiire man U' nach B, und es gibt sich $\frac{dU'}{dB} = -\frac{8 \cdot B \cdot c^2}{(1 + 4B^2)^2}$. Es kann aber nur dann $\frac{dU'}{dB} = 0$ sein, wenn selbst $B = 0$ ist; und dabei reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XI)} \quad y = \frac{c^2}{\alpha - a}$$

d. h. man hat wieder Gleichung VII. Differentiirt man noch einmal, und setzt dann $B = 0$, so gibt sich

$$\text{XII)} \quad \frac{d^2U'}{dB^2} = -8 \cdot c^2$$

woran man abermals erkennt, dass $U' = c^2$ ein Maximum-stand ist, während von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Es ist beachtenswerth, dass diese zweite Auflösung nur auf den einzigen Fall führt, welcher ein wirkliches Resultat liefert. Der Grund davon ist aber der, dass das in der ersten Auflösung erhaltene zweite Integral $y = E \cdot (a + \alpha - 2x)$ gar kein Integral der Gleichung II ist, und somit die zweite Auflösung, welche ganz allein vom Integral der Gleichung II ausgeht, auch nicht auf das Resultat $y = E \cdot (a + \alpha - 2x)$ führen kann. Die zweite Auflösung ist also ebenso vollständig, wie die erste.

Zusatz. Die Gleichungen VIII und XII sollen dasselbe Prüfungsmittel abgeben; worin besteht also ihre Uebereinstimmung? (Man sehe die beiden Zusätze der Aufgabe 76.) Die Mutation, welche y in Gleichung IX erleiden kann, besteht aus der blossen Werthänderung des Constanten B; aus IX folgt nemlich $\delta y = 2x \cdot \vartheta B$, daraus folgt weiter $\frac{d\delta y}{dx} = 2 \cdot \vartheta B$, und somit ist $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 4 \cdot \vartheta B^2$. Gleichung VIII geht also über in $\delta^2 U = -8c^2 \cdot \vartheta B^2$, wodurch der Zusammenhang zwischen VIII und XII nachgewiesen ist.

Aufgabe 82.

Man zieht in dem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte einer ebenen Curve die Berührende. Aus zwei festen Punkten einer gegebenen Graden errichtet man Perpendikel, welche bis zur Berührenden verlängert werden. Dadurch

Digitized by Google

entsteht ein Trapez. Hierauf fällt man von denselben zwei festen Punkten Perpendikel auf die Berührende. Dadurch entsteht wieder ein Trapez. Nun soll man unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, bei welchen das zu einerlei Abscisse x gehörige erste Trapez auch jedesmal einen gleichgrossen Werth hat, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass das zu der bereits nach Belieben gewählten Abscisse x gehörige zweite Trapez grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) zugleich der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Hier soll (man sehe Einleitung zu Aufgabe 74)

$$\text{I)}\quad U = \frac{\alpha - a}{2} \times \frac{2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p}{1 + p^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, welche alle bei einerlei Werth des x auch jedesmal für den Ausdruck

$$\text{II)}\quad \frac{\alpha - a}{2} \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p)$$

einerlei aber einen nichtgegebenen Werth erzeugen. Man mutire, so bekommt man aus I

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{2 \cdot (1 + p^2)^2} \cdot \left[\left(2 \cdot \delta y - 2x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot (1 + p^2) - 2 \cdot p \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right]$$

und aus der in II gestellten Bedingung folgt

$$\text{IV)}\quad \delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0, \qquad \text{V)}\quad \delta^2 y - x \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} = 0, \text{ etc.}$$

Betrachtet man δy, $\delta^2 y$ etc. als abhängig, und eliminirt man δy aus III; so geht diese Gleichung über in

$$\text{VI)}\quad \delta U = -\frac{\alpha - a}{(1 + p^2)^2} \cdot p \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt entweder $p = 0$ oder $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$.

Erstens. Aus $p = 0$ folgt $y = E$. Da aber die in II gestellte Bedingung keine Gleichung ist, so kann der willkürliche Constante E nur dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Curve noch einer Nebenbedingung unterwirft. Die Gleichung $y = E$ gehört zu der mit der Abscissenaxe parallelen Graden, und deren Ordinaten liegen alle auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe. Man setze also fest, dass die Ordinaten, welche zu besagter Graden gehören, die positiven seien; dabei ist auch E positiv. Mutirt man Gleichung III noch einmal, und eliminirt man dann δy und $\delta^2 y$, so bekommt man $\delta^2 U = -2 \cdot (\alpha - a) \cdot E \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, und es ist $U' = (\alpha - a) \cdot E$, eben weil E als positiv gilt, ein Maximum-stand, während von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Zweitens. Setzt man $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$, so bekommt man

$$y = H \cdot (a + \alpha - 2x)$$

Allein da hier $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$ etc. ist, so kann hier von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein.

Digitized by Google

Aufgabe 83.

Welche Function y von x hat bei jedem Werthe des x die Eigenschaft, dass sie folgenden Ausdruck

$$U = m^4 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - my \cdot \frac{dy}{dx} + (3mx - 5m^2) \cdot \frac{dy}{dx} + (m - 6x) \cdot y + y^2$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht?

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = 2m^4 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \left(2\,m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ \left(-m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y\right) \cdot \delta y$$

Erster Fall. Sucht man für y eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so sind (nach §. 91) δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die Formen von $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ mitgegeben sind. Es müssen also (nach §. 191) folgende drei identische Gleichungen zugleich stattfinden:

$$1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$2) \quad 2 \cdot m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - m \cdot y + 3m \cdot x - 5 \cdot m^2 = 0$$

$$3) \quad - m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y = 0$$

Man hat nun zwei Wege, die gesuchte Function y von x zu bestimmen.

Erstens. Man integrire eine der Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Hier ist aber nur die erste von der zweiten Ordnung, und daraus folgt gradezu

$$4) \quad y = Ax + B$$

Durch diesen Ausdruck müssen aber die Gleichungen 2 und 3 zugleich identisch werden. Durch gehörige Substitution geht Gleichung 2 über in

$$5) \quad m \cdot (2Am - B - 5m) - mx \cdot (A - 3) = 0$$

und Gleichung 3 geht über in

$$6) \quad 2x \cdot (A - 3) + (m + 2B - mA) = 0$$

Diese beiden Gleichungen werden aber identisch, wenn $A = 3$ und $B = m$. Gleichung 4 geht also über in

$$7) \quad y = 3x + m$$

Es ist also y eine völlig bestimmte Function von x. Unter diesen Umständen ist nur

$$\delta^2 U = 2m^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + \left(m \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \delta y\right)^2 + \left(m \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \delta y^2$$

und man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Man eliminire $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ aus den Gleichungen 1, 2, 3, so gelangt man ohne Integration zu den gesuchten Functionen y von x. Da aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ in den Gleichungen 2 und 3 nicht vorkommt, so eliminire man aus diesen zunächst nur $\frac{dy}{dx}$; und man bekommt bezüglich

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x + 5m}{2m} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{m - 6x + 2y}{m}$$

Verbindet man diese beiden Ausdrücke zu einer Gleichung, so ergibt sich $y = 3x + m$. Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = 3$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Wenn man nun für y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Ausdrücke in die Gleichungen 1, 2, 3 einführt, dann werden diese identisch; und somit ist $y = 3x + m$ eine Function, wodurch die Aufgabe gelöst wird.

Das Prüfungsmittel, wie vorher.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

- α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
- β) bei dem grade gewählten Werthe des x alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{II)} \quad \delta U = 2m^4 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \left(2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, müssen die beiden identischen Gleichungen stattfinden

$$\text{8)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ und 9)} \quad 2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2 = 0$$

Aus Gleichung 8 folgt $y = Ax + B$. Führt man nun für y und $\frac{dy}{dx}$ die Ausdrücke in Gleichung 9 ein, so geht sie über in

$$m \cdot (2Am - B - 5m) + mx \cdot (3 - A) = 0$$

und diese Gleichung wird identisch, wenn $A = 3$ und $B = m$. Man hat also jetzt wieder

$$\text{10)} \quad y = 3x + m$$

und weil jetzt $\delta^2 U = 2m^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2m^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ unter allen Umständen positiv bleibt, so findet ein Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

- α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
- β) bei dem grade für x genommenen Werthe alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^3 y}{dx} = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{III)} \quad \delta U = 2m^4 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \left(-m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y\right) \cdot \delta y$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, müssen die beiden identischen Gleichungen stattfinden:

$$\text{11)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{und 12)} \quad -m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y = 0$$

Aus Gleichung 11 folgt $y = A \cdot x + B$. Führt man nun für y und $\frac{dy}{dx}$ die Ausdrücke in Gleichung 12 ein, so geht sie über in

$$2x \cdot (A - 3) + (m + 2B - mA) = 0$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $A = 3$ und $B = m$. Man hat also zum dritten Male

Digitized by Google

$$13)\quad y = 3x + m$$

und weil jetzt $\delta^2 U = 2m^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2 \cdot \delta y^2$ unter allen Umständen positiv bleibt, so findet ein Minimum-stand statt.

Vierter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem grade für x genommenen Werthe alle ihrem zweiten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der zweite Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \left(-m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y\right) \cdot \delta y$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, müssen die beiden identischen Gleichungen stattfinden:

$$14)\quad 2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2 = 0, \text{ und } 15)\quad -m \cdot \frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y = 0$$

Dieses sind zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung; und wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus ihnen eliminirt, so bekommt man zum vierten Male

$$16)\quad y = 3x + m$$

welche Integralgleichung beiden Differentialgleichungen zugleich genügt; und da jetzt

$$\delta^2 U = \left(m \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \delta y\right)^2 + \left(m \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \delta y^2$$

unter allen Umständen positiv bleibt, so findet ein Minimum-stand statt.

Fünfter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem grade gewählten Werthe des x alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen, und gleichzeitig noch

γ) bei dem grade gewählten Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{V)}\quad \delta U = 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss stattfinden

$$17)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Daraus folgt

$$18)\quad y = Fx + G$$

Diese Gleichung ist wegen der beiden willkürlichen Constanten F und G allgemeiner, als die Gleichungen 7, 10, 13 und 16; und weil jetzt $\delta^2 U = 2m^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$ unter allen Umständen positiv ist, so findet ein Minimum-stand statt.

Digitized by Google

Sechster Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem grade gewählten Werthe des x alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen, und gleichzeitig noch

γ) bei dem grade gewählten Werthe des x alle ihrem zweiten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der zweite Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{VI)}\quad \delta U = \left(2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt

$$2m^2 \cdot \frac{dy}{dx} - my + 3mx - 5m^2 = 0$$

oder

$$19)\quad 2m \cdot dy - y \cdot dx + (3x - 5m) \cdot dx = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Factor $e^{-\frac{x}{2m}}$, und man bekommt zunächst

$$\left(2m \cdot e^{-\frac{x}{2m}} \cdot dy - y\, e^{-\frac{x}{2m}} \cdot dx\right) + (3x - 5m) \cdot e^{-\frac{x}{2m}} \cdot dx = 0$$

Daraus folgt $(2my - 6mx - 2m^2) \cdot e^{-\frac{x}{2m}} = H$, oder $y = 3x + m + \frac{H}{2m} \cdot e^{\frac{x}{2m}}$, oder mit Aenderung des Constanten

$$20)\quad y = 3x + m + K \cdot e^{\frac{x}{2m}}$$

Man hätte aber Gleichung 19 auch auf folgende Weise integriren können: Zunächst verwandle man sie in $2m \cdot dy - 6m \cdot dx = (y - 3x - m) \cdot dx$. Daraus folgt

$$\frac{dy - 3 \cdot dx}{y - 3 \cdot x - m} = \frac{dx}{2m}$$

Durch Integration bekommt man $\lg nat \frac{y - 3x - m}{K} = \frac{x}{2m}$, oder $y - 3x - m = K \cdot e^{\frac{x}{2m}}$, so dass man dasselbe Resultat hat, wie zuvor. Diese Gleichung ist wegen des willkürlichen Constanten K allgemeiner, als die Gleichungen 7, 10, 13, 16. Und weil jetzt $\delta^2 U = 2m^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ unter allen Umständen positiv ist, so findet ein Minimumstand statt.

Siebenter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem grade gewählten Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der gesuchten Function bekommt, und gleichzeitig noch

γ) bei dem grade gewählten Werthe des x alle ihrem zweiten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der zweite Differentialquotient der gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad \delta U = \left(-m\cdot\frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y\right)\cdot\delta y$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$21)\quad -m\cdot\frac{dy}{dx} + m - 6x + 2y = 0$$

Sie wird integrabel durch den Factor $e^{-\frac{2x}{m}}$, und man bekommt zunächst

$$-m\cdot e^{-\frac{2x}{m}}\cdot dy + 2y\cdot e^{-\frac{2x}{m}}\cdot dx + (m-6x)\cdot e^{-\frac{2x}{m}}\cdot dx = 0$$

Daraus folgt

$$-my\cdot e^{-\frac{2x}{m}} + m\cdot(3x+m)\cdot e^{-\frac{2x}{m}} = C$$

oder

$$y = 3x + m - \frac{C}{m}\cdot e^{\frac{2x}{m}}$$

oder mit Aenderung des Constanten

$$22)\quad y = 3x + m + E\cdot e^{\frac{2x}{m}}$$

Diese Gleichung ist wegen des willkürlichen Constanten E allgemeiner, als die Gleichungen 7, 10, 13, 16. Weil ferner $\delta^2 U = 2\cdot\delta y^2$ immer positiv ist, so findet ein Minimum-stand statt.

Aufgabe 84.

Welche Function y von x hat bei jedem Werthe des x die Eigenschaft, dass sie folgenden Ausdruck

$$U = h^2\cdot x^2\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2h^2\cdot x\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} + y^2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8x^2\cdot(x^2+h^2)}{h^3}\cdot y$$
$$- \frac{4x^3\cdot(x^2+2h^2)}{h^3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht?

Durch Mutiren bekommt man

$$\delta U = \left[2h^2\cdot x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - 2h^2\cdot x\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \left[-2h^2\cdot x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2y^2\cdot\frac{dy}{dx}\right.$$
$$\left.-\frac{4x^3\cdot(x^2+2h^2)}{h^3}\right]\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \left[2y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8x^2\cdot(x^2+h^2)}{h^3}\right]\cdot\delta y$$

Sucht man eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so müssen folgende drei identischen Gleichungen zugleich stattfinden:

$$1)\quad 2h^2\cdot x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - 2h^2\cdot x\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2)\quad -2h^2\cdot x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 2y^2\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{4x^3\cdot(x^2+2h^2)}{h^3} = 0$$

$$3)\quad 2y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{8x^2\cdot(x^2+h^2)}{h^3} = 0$$

Digitized by Google

Man hat nun zwei Wege, die gesuchte Function y von x zu bestimmen.

Erstens. Man integrire eine der Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung; hier ist es am bequemsten, die Gleichung 1 zu integriren. Diese geht zunächst über in

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Factor $\frac{1}{x^2}$; denn sie formt sich dadurch um in

$$\frac{x \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx}{x^2} = 0$$

woraus $\frac{\frac{dy}{dx}}{x} = C$ folgt. Integrirt man noch einmal, so bekommt man $y = \frac{1}{2} \cdot C \cdot x^2 + B$, oder (mit Veränderung des Constanten C)

$$4) \quad y = Ax^2 + B$$

Durch diese Function müssen aber auch die Gleichungen 2 und 3 zugleich identisch werden. Desshalb führe man für y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Ausdrücke ein, und Gleichung 2 geht über in

$$5) \quad 4 \cdot (A^3 \cdot h^3 - 1) \cdot x^5 + 8h^2 \cdot (A^2 \cdot B \cdot h - 1) \cdot x^3 + 4A \cdot h^3 \cdot (B + h) \cdot (B - h) \cdot x = 0$$

Gleichung 3 geht über in

$$6) \quad 8 \cdot (A^3 \cdot h^3 - 1) \cdot x^4 + 8h^2 \cdot (A^2 \cdot B \cdot h - 1) \cdot x^2 = 0$$

Diese beiden Gleichungen werden identisch, wenn $A = \frac{1}{h}$ und $B = h$. Gleichung 4 geht daher über in

$$7) \quad y = \frac{x^2}{h} + h$$

Es ist also y eine völlig bestimmte Function von x, und unter diesen Umständen ist

$$\delta^2 U = 2 \cdot h^3 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 - 4h^2 \cdot x \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \left(\frac{x^2 + h^2}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \frac{16x \cdot (x^2 + h^2)}{h^3} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y + 8 \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot \delta y^2$$

Untersucht man diesen Ausdruck nach Anleitung des §. 12, so erkennt man, dass er nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten kann; und somit besteht weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand.

Zweitens. Man eliminire $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ aus den Gleichungen 1, 2 und 3, so gelangt man ohne Integration zu der gesuchten Function y von x. Eliminirt man zuerst $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus 1 und 2, so bekommt man $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 \cdot (x^2 + 2h^2)}{h^3 \cdot (y^2 - h^2)}$. Führt man diesen Ausdruck in Gleichung 3 ein, so bekommt man nach gehöriger Reduction $\frac{y \cdot x^4 \cdot (x^2 + 2h^2)^2}{h^3 \cdot (y^2 - h^2)^2} - (x^2 + h^2) = 0$. Dieses ist eine Gleichung des vierten Grades, welche sich in folgende zwei Factoren zerlegt:

$$\left(y^3 + \frac{x^2 + h^2}{h} \cdot y^2 + \frac{x^4 + 2 \cdot h^2 \cdot x^2 - h^4}{h^2} \cdot y - \frac{h^5}{x^2 + h^2}\right) \cdot \left(y - \frac{x^2 + h^2}{h}\right) = 0$$

Lässt man den zweiten Factor dieser Gleichung zu Null werden, so hat man wieder

$$8) \quad y = \frac{x^2}{h} + h$$

Digitized by Google

Dabei ist $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{h}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{h}$; und wenn man diese für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen 1, 2, 3 einsetzt, so werden sie alle zugleich identisch. Uebrigens besteht, wie schon bewiesen ist, hier weder ein Maximum-stand noch Minimumstand.

Aufgabe 85.

Man hat zwei miteinander parallele Graden, und sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man sodann den diesem Punkte der Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und wenn man hierauf die senkrechten Entfernungen dieses Krümmungsmittelpunktes bis zu den zwei parallelen Graden miteinander vervielfacht, das Product beider Entfernungen ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die beiden gegebenen parallelen Graden (fig. 9) seien MN und PQ. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man auch die Abscissenaxe mit den zwei gegebenen Graden parallel nimmt. V sei der zu der grade genommenen Abscisse OG = x gehörige Krümmungsmittelpunkt. VT und VR sind also die beiden in Rede stehenden senkrechten Entfernungen. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)}\quad y' = m$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)}\quad y'' = n;$$

Es ist also WR = m und WT = n. Die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist $WV = y + \frac{1+p^2}{q}$; und desshalb ist $VR = m - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)$ und $VT = n - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)$, wo, wie gewöhnlich zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$ und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wurde. Das hier in Rede stehende Product ist also

$$\text{III)}\quad U = \left(m - y - \frac{1+p^2}{q}\right)\cdot\left(n - y - \frac{1+p^2}{q}\right)$$

Mutirt man, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(2y - m - n + \frac{2\cdot(1+p^2)}{q}\right)\cdot\left(\delta y + \frac{2p}{q}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x das vorgelegte Product grösser oder kleiner gemacht wird, als es bei der nemlichen Abscisse x von allen möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven gemacht werden kann; so sind δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die Formen aller Ableitungen mitgegeben sind (man sehe §. 91). Hier wird $\delta U = 0$, wenn folgende Gleichung besteht

$$\text{V)}\quad 2y - m - n + \frac{2\cdot(1+p^2)}{q} = 0$$

Diese Gleichung formt sich gradezu um in

$$\frac{2\cdot dx}{2y - m - n} + \frac{dp}{1+p^2} = 0$$

und wenn man diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man

Digitized by Google

$$\frac{2 \cdot dy}{2y - m - n} + \frac{p \cdot dp}{1 + p^2} = 0$$

Durch Integration bekommt man

$$\lg nat\,(2y - m - n) + \lg nat\,\sqrt{1 + p^2} = C$$

oder mit Aenderung des Constanten

$$\lg nat\left[(2y - m - n) \cdot \sqrt{1 + p^2}\right] = \lg nat\,A$$

oder

$$(2y - m - n) \cdot \sqrt{1 + p^2} = A$$

Daraus folgt

$$p = \frac{\sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}}{2y - m - n}, \text{ oder } dx = \frac{(2y - m - n) \cdot dy}{\sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}}$$

und wenn man nochmals integrirt, so gibt sich

$$x + B = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{A^2 - (2y - m - n)^2}$$

oder

$$\text{VI)}\quad (x + B)^2 = \frac{1}{4} \cdot A^2 - \frac{1}{4} \cdot (2y - m - n)^2$$

oder

$$\text{VII)}\quad \left(y - \frac{m + n}{2}\right)^2 + (x + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kreises, dessen Durchmesser $= A$ ist, und dessen Mittelpunkt genau mitten zwischen den beiden gegebenen Parallellinien liegt. Er löst insoferne die Aufgabe, als er in jedem seiner Punkte auch zugleich sein eigener Krümmungskreis ist. Die beiden willkürlichen Constanten A und B machen, dass man diesen Kreis noch zwei Nebenbedingungen unterwerfen kann. Dergleichen sind z. B.

1) Der Kreis soll durch zwei feste Punkte (f, g) und (h, k) gehen. Für diese zwei Punkte geht Gleichung VII bezüglich über in

$$\left(g - \frac{m + n}{2}\right)^2 + (f + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2, \text{ und } \left(k - \frac{m + n}{2}\right)^2 + (h + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

2) Die gesuchte Curve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen, und die zu diesem Punkte gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= k$. Aus Gleichung VII folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + B}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (x + B)^2}}$$

Man hat daher jetzt folgende zwei Gleichungen:

$$\left(g - \frac{m + n}{2}\right)^2 + (f + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2, \text{ und } k = -\frac{f + B}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (f + B)^2}}$$

und mittelst dieser beiden Gleichungen lassen sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln. Oder

3) Die gesuchte Curve soll durch den festen Punkt (f, g) gehen, und die zu der bestimmten Abscisse h gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= k$. Hier hat man folgende zwei Gleichungen:

$$\left(g - \frac{m + n}{2}\right)^2 + (f + B)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2, \text{ und } k = -\frac{h + B}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (h + B)^2}}$$

Digitized by Google

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

4) Der Halbmesser und die zur festen Abscisse f gehörige Subnormale sollen bezüglich die Längen h und k haben. Hier bekommt man die Gleichungen

$$h = \frac{A}{2}, \text{ und } k = -\left(\frac{m+n}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (f+B)^2}\right) \cdot \frac{f+B}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (f+B)^2}}$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen. Oder

5) Bei der festen Abscisse f soll der Quotient der Subtangente in die Subnormale den bestimmten Werth g haben; und bei der festen Abscisse h soll derselbe Quotient den festen Werth k haben. Hier bekommt man die beiden Gleichungen

$$g = \frac{(f+B)^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (f+B)^2}, \text{ und } k = \frac{(h+B)^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - (h+B)^2}$$

woraus sich wieder bestimmte Werthe für A und B ermitteln lassen.

Dergleichen Nebenbedingungen kann man in beliebiger Menge aufstellen. Was für Nebenbedingungen man aber auch aufstellen mag, so folgt doch aus Gleichung V ganz unbedingt $y + \frac{1+p^2}{q} = \frac{m+n}{2}$. Dabei geht Gleichung III über in $U' = -\frac{1}{4} \cdot (m-n)^2$ d. h. U' ist negativ und unabhängig von dem beliebigen Werthe des x. Mutirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

woran man erkennt, dass in der That ein Minimum-stand stattfindet, jedoch in dem Sinne, nach welchem in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null entfernt ist.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x das vorgelegte Product grösser oder kleiner gemacht wird, als es von allen den Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben,

gemacht werden kann; so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$, etc. (man sehe den zweiten Fall der 61sten Aufgabe). Gleichung IV reducirt sich also auf

$$\text{IX)} \quad \delta U = \left(2y - m - n + \frac{2 \cdot (1+p^2)}{q}\right) \cdot \left(\frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Daraus folgt aber wieder Gleichung V und VII; und Gleichung VIII reducirt sich auf

$$\text{X)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left(\frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

Und so fort.

Aufgabe 86.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man sodann den diesem Punkte der Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und wenn man diesen hierauf mit zwei festen Punkten (a, b) und (α, β) verbindet, die Summa der Quadrate beider Verbindungslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Digitized by Google

Der Krümmungsmittelpunkt habe die Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; die Entfernung des festen Punktes (a, b) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist also $\sqrt{(\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{y}-b)^2}$; und die Entfernung des festen Punktes (α, β) bis zum Krümmungsmittelpunkte ist $\sqrt{(\mathfrak{x}-\alpha)^2+(\mathfrak{y}-\beta)^2}$. Die Aufgabe führt also zunächst auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = ((\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{y}-b)^2)+((\mathfrak{x}-\alpha)^2+(\mathfrak{y}-\beta)^2)$$

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe der gesuchten Curve durch die beiden festen Punkte (a, b) und (α, β) legt. Dabei ist $b=0$ und $\beta=0$, und Gleichung I reducirt sich auf

$$\text{II)}\quad U = (\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{x}-\alpha)^2+2\cdot\mathfrak{y}^2$$

Nun ist $\mathfrak{x} = x - \frac{(1+p^2)\cdot p}{q}$ und $\mathfrak{y} = y + \frac{1+p^2}{q}$, wo, wie gewöhnlich, zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt ist. Gleichung II geht nun über in

$$\text{III)}\quad U = \left(x-a-\frac{(1+p^2)\cdot p}{q}\right)^2+\left(x-\alpha-\frac{(1+p^2)\cdot p}{q}\right)^2+2\cdot\left(y+\frac{1+p^2}{q}\right)^2$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Durch Mutiren bekommt man

$$\begin{aligned}\text{IV)}\quad \delta U &= \frac{4}{q}\cdot(1+p^2+y\cdot q)\cdot\delta y\\ &+\frac{2}{q^2}\cdot(6p\cdot(1+p^2)^2-(1+3p^2)\cdot(2x-a-\alpha)\cdot q+4ypq)\cdot\frac{d\delta y}{dx}\\ &+\frac{2\cdot(1+p^2)}{q^3}\cdot((2x-a-\alpha)\cdot pq-2yq-2\cdot(1+p^2)^2)\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\end{aligned}$$

Erster Fall. Lässt man dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe; so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{V)}\quad 1+p^2+q\cdot y=0$$
$$\text{VI)}\quad 6p\cdot(1+p^2)^2-(1+3p^2)\cdot(2x-a-\alpha)\cdot q+4ypq=0$$
$$\text{VII)}\quad (2x-a-\alpha)\cdot pq-2yq-2\cdot(1+p^2)^2=0$$

Diese Gleichungen werden einfacher, wenn man z statt $\left(x-\frac{a+\alpha}{2}\right)$ und dz statt dx setzt; denn sie gehen bezüglich über in

$$\text{VIII)}\quad 1+p^2+q\cdot y=0$$
$$\text{IX)}\quad 3p\cdot(1+p^2)^2-(1+3p^2)\cdot zq+2ypq=0$$
$$\text{X)}\quad z\cdot pq-y\cdot q-(1+p^2)^2=0$$

Gleichung VIII ist die einfachste; sie kann auch auf folgende Weise

$$1+p\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{dp}{dz}\cdot y=0$$

oder auf folgende Weise $dz+p\cdot dy+y\cdot dp=0$ geschrieben werden; und daraus folgt zunächst

$$\text{XI)}\quad z+p\cdot y=A$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit $z\cdot dz+y\cdot dy=A\cdot dz$, und daraus folgt weiter

$$\text{XII)}\quad z^2+y^2=2Az+B$$

Man sehe nun zu, ob durch diese Gleichung auch IX und X identisch werden. Aus XII folgt

$$y=(\sqrt{1})\cdot\sqrt{B+2Az-z^2},\quad p=\frac{(A-z)\cdot(\sqrt{1})}{\sqrt{B+2Az-z^2}}\ \text{und}\ q=-\frac{(A^2+B)\cdot(\sqrt{1})}{(B+2Az-z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Digitized by Google

Hier hat das Radical $(\sqrt{1})$ entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung. Führt man nun diese Ausdrücke in Gleichung IX ein, so bekommt man nach gehörigen Reductionen

$$\frac{A \cdot (A^2 + B) \cdot (3A^2 + B - 4Az + 2z^2) \cdot (\sqrt{1})}{(B + 2Az - z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $A = 0$ ist. Gleichung XII zieht sich also zurück auf

$$\text{XIII)} \quad z^2 + y^2 = B$$

und dadurch werden die Gleichungen VIII und IX zugleich identisch; man hat also noch zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung X identisch wird. Aus XIII folgt

$$y = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{B - z^2}, \quad p = -\frac{z \cdot (\sqrt{1})}{\sqrt{z^2 - B}} \text{ und } q = -\frac{B \cdot (\sqrt{1})}{(B - z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Das Radical $(\sqrt{1})$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung. Führt man aber diese für y, p, q zuletzt hergestellten Ausdrücke in Gleichung X ein, so findet man, dass sie in der That identisch wird. Führt man für z seinen Ausdruck wieder zurück, so geht Gleichung XIII über in

$$\text{XIV)} \quad y^2 + \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2 = B$$

und durch diese Gleichung werden die Gleichungen V, VI, VII zugleich identisch. Letztere Gleichung stellt aber einen jeden beliebigen Kreis vor, dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt, und zwar da, wo $x = \frac{a + \alpha}{2}$ ist. Gleichung III geht nun über in

$$\text{XV)} \quad U' = 2 \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2$$

d. h. U' ist constant und unabhängig von x und von dem willkürlichen Constanten B. Mutirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{XVI)} \quad \delta^2 U = 4 \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$
$$+ 4 \cdot \left(\frac{1 + 3 \cdot p^2}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p + p^3}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit der gesuchten Curve jedesmal gemeinschaftlich haben

$\alpha\alpha$) den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt, und

$\beta\beta$) die zu der grade gewählten Abscisse x gehörige Berührende;

so muss jetzt stattfinden $\delta y = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. Desshalb reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{XVII)} \quad \delta U = \frac{2 \cdot (1 + p^2)}{q^3} \cdot ((2x - a - \alpha) \cdot p \cdot q - 2y \cdot q - 2 \cdot (1 + p^2)) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Es findet also nur die Gleichung VII oder X statt. Wenn man $(+ p^2 \cdot qy - p^2 \cdot qy)$ zu Gleichung X addirt, so geht sie über in

$$(1 + p^2) \cdot qy + (1 + p^2)^2 - (py + z) \cdot pq = 0$$

Digitized by Google

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt, so bekommt man zunächst

$$\frac{qy + 1 + p^2}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(py + z) \cdot pq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und es gibt sich

$$\text{XVIII)} \quad \frac{py + z}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = C$$

Aus dieser Gleichung folgt $y = -\frac{z}{p} + \frac{C \cdot \sqrt{1+p^2}}{p}$; und wenn man auf beiden Seiten differentiirt, und dann $p \cdot dz$ statt dy setzt; so bekommt man

$$p \cdot (1 + p^2) \cdot dz + \left(\frac{C}{\sqrt{1+p^2}} - z\right) \cdot dp = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt, so bekommt man zunächst

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} \cdot dz - \frac{z \cdot dp}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}} + \frac{C \cdot dp}{p^2 \cdot (1+p^2)} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und es gibt sich

$$\text{XIX)} \quad \frac{z \cdot \sqrt{1+p^2}}{p} + C \cdot \left(-\frac{1}{p} - \text{arc tg } p\right) = E$$

Führt man $\left(x - \frac{a+\alpha}{2}\right)$ statt z in die Gleichungen XVIII und XIX zurück; so kann man für x und y folgende Ausdrücke herstellen

$$\text{XX)} \quad x = \frac{a+\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot (C + E \cdot p + C \cdot p \cdot \text{arc tg } p)$$

$$\text{XXI)} \quad y = \frac{1}{p \cdot \sqrt{1+p^2}} \cdot (C \cdot p^2 - E \cdot p - C \cdot p \cdot \text{arc tg } p)$$

Die hier gesuchte Curve ist, wie es oft geschieht, durch zwei Gleichungen gegeben, und kann durch ihre Tangenten construirt werden. Wollte man aber eine Gleichung nur zwischen x und y, so hätte man aus XX und XXI das p zu eliminiren. Mutirt man bei Gleichung XVII den in den eckigen Klammern stehenden Factor noch einmal, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{2 \cdot (1+p^2)}{q^3} \cdot ((2x - a - \alpha) \cdot p - 2y) \cdot \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2$$

Aus Gleichung X folgt aber $(2x - a - \alpha) \cdot p - 2y = 2 \cdot \frac{(1+p^2)^2}{q}$, und somit ist

$$\delta^2 U = 4 \cdot (1 + p^2) \cdot \left(\frac{1+p^2}{q^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2$$

woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zur grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben, und gleichzeitig noch

Digitized by Google

γ) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihrem zweiten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der zweite Differentialquotient der gesuchten Curve annimmt;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\frac{d^2 \delta y}{dx^2} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d^2 \delta^2 y}{dx^2} = 0$ etc. Desshalb reducirt sich Gleichung IV auf

$$\text{XXII)} \quad \delta U = \frac{2}{q^2} \cdot [6p \cdot (1 + p^2)^2 - (1 + 3p^2) \cdot (2x - a - \alpha) \cdot q + 4ypq] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Es findet also jetzt nur die einzige Gleichung IV oder IX statt. Wenn man ($3y \cdot p^3 \cdot q + y \cdot p \cdot q - 3y \cdot p^3 \cdot q - y \cdot p \cdot q$) zu IX addirt, so kann man ihr folgende Form geben

$$3y \cdot p \cdot q \cdot (1 + p^2) + 3 \cdot p \cdot (1 + p^2)^2 - q \cdot (yp + z) - 3p^2 \cdot q \cdot (yp + z) = 0$$

oder

$$3p \cdot (1 + p^2) \cdot (yq + 1 + p^2) - (yp + z) \cdot (q + 3 \cdot p^2 \cdot q) = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{3 \cdot (p + p^3)^{\frac{4}{3}}}$ multiplicirt, so bekommt man zunächst

$$\frac{y \cdot q + 1 + p^2}{\sqrt[3]{p + p^3}} - \frac{(y \cdot p + z) \cdot (q + 3 \cdot p^2 \cdot q)}{3 \cdot \sqrt[3]{(p + p^3)^4}} = 0$$

Integrirt man, so bekommt man $\frac{y \cdot p + z}{\sqrt[3]{p + p^3}} = F$. Daraus folgt

$$\text{XXIII)} \quad yp + z = F \cdot \sqrt[3]{p + p^3}$$

Wenn man Gleichung XXIII auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man zunächst $y \cdot dp + p \cdot dy + dz = \frac{F}{3} \cdot \frac{(1 + 3p^2) \cdot dp}{(p + p^3)^{\frac{2}{3}}}$; und wenn man diese ganze Gleichung mit $p = \frac{dy}{dz}$ multiplicirt, so bekommt man $py \cdot dp + (p^2 + 1) \cdot dy = \frac{F}{3} \cdot \frac{(p + 3p^3) \cdot dp}{(p + p^3)^{\frac{2}{3}}}$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ multiplicirt; sie geht dabei über in

$$\frac{py \cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} + dy \cdot \sqrt{1 + p^2} = F \times \frac{(1 + 3 \cdot p^2) \cdot p \cdot dp}{3 \cdot (p + p^3)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 + p^2}}$$

oder in

$$\frac{d\,(y \cdot \sqrt{1 + p^2})}{dz} = F \times \left(\frac{d \sqrt[3]{p + p^3}}{dp}\right) \times \left(\frac{d \sqrt{1 + p^2}}{dp}\right) \cdot dp$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XXIV)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = G + F \cdot \int \left(\frac{d \sqrt[3]{p + p^3}}{dp}\right) \times \left(\frac{d \sqrt{1 + p^2}}{dp}\right) \cdot dp$$

oder auch

$$\text{XXV)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = G + \frac{F \cdot p \cdot \sqrt[3]{p + p^3}}{\sqrt{1 + p^2}} - F \cdot \int \frac{p^{\frac{1}{3}} \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{7}{6}}}$$

Führt man wieder $\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)$ statt z in Gleichung XXIII zurück, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XXVI)}\quad y \cdot p + x - \frac{a + \alpha}{2} = F \cdot \sqrt[3]{p + p^3}$$

Auch die jetzige Curve ist durch zwei Gleichungen gegeben, und man hat zu verfahren, wie schon im zweiten Falle bemerkt wurde. Das Prüfungsmittel wird hergestellt, indem man bei Gleichung XXII den in den eckigen Klammern stehenden Factor mutirt, und dabei beachtet, dass $\delta y = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, etc. ist.

Aufgabe 87.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, und wenn man dann den diesem Punkte der Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt sucht, das von den Coordinaten dieses Krümmungsmittelpunktes gebildete rechtwinkelige Dreieck ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Es sei (fig. 9) der Punkt V der Krümmungsmittelpunkt, so ist OVW das hier in Rede stehende Dreieck, und dessen Inhalt ist $= \frac{1}{2} \cdot OW \cdot WV$; da aber $OW = x - \frac{(1 + p^2) \cdot p}{q}$, und $VW = y + \frac{1 + p^2}{q}$, so führt die hiesige Aufgabe auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{(1 + p^2) \cdot p}{q}\right) \cdot \left(y + \frac{1 + p^2}{q}\right)$$

und dieser soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden.

Durch Mutiren bekommt man

$$\begin{aligned}\text{II)}\quad \delta U = {} & \frac{1}{2q} \cdot (qx - p - p^3) \cdot \delta y \\ & + \frac{1}{2 \cdot q^2} \cdot (2pqx - qy - 3 \cdot p^2 \cdot qy - 1 - 6p^2 - 5 \cdot p^4) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ & + \frac{1}{2 \cdot q^3} \cdot (pqy - xq + 2p + 2p^3) \cdot (1 + p^2) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\end{aligned}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der 85[ten] Aufgabe; so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{III)}\quad qx - p - p^3 = 0$$

$$\text{IV)}\quad 2pqx - qy - 3p^2 \cdot qy - 1 - 6 \cdot p^2 - 5p^4 = 0$$

$$\text{V)}\quad pqy - xq + 2p + 2p^3 = 0$$

Gleichung III ist die einfachste; sie soll also auch zuerst integrirt werden. Zu diesem Zwecke forme man sie um in $\frac{q}{p + p^3} - \frac{1}{x} = 0$, oder in $\frac{dp}{p \cdot (1 + p^2)} - \frac{dx}{x} = 0$, oder $\frac{dp}{p} - \frac{p \cdot dp}{1 + p^2} = \frac{dx}{x}$. Diese Gleichung kann man gradezu integriren, wodurch sich

$$C + \lg\text{ nat } p - \lg\text{ nat } \sqrt{1 + p^2} = \lg\text{ nat } x$$

ergibt. Mit Veränderung des Constanten kann man auch $\lg\text{ nat } \frac{A \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} = \lg\text{ nat } x$ setzen. Daraus folgt $\frac{A \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} = x$, so dass sich $p = \frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}}$ ergibt, und man durch abermaliges Integriren

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad y = B - \sqrt{A^2 - x^2}$$

oder

$$\text{VII)}\quad (y - B)^2 + x^2 = A^2$$

bekommt. Dieses ist bekanntlich die Gleichung eines Kreises, dessen Ordinatenaxe durch den Mittelpunkt geht, während die Abscissenaxe in einer Entfernung $= B$ vom Mittelpunkte absteht. Man sehe nun zu, ob durch die Gleichung VI auch die Gleichungen IV und V identisch werden. Aus IV folgt $p = \frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}}$ und $q = \frac{A^2}{\sqrt{(A^2 - x^2)^3}}$ und indem man diese Ausdrücke in IV einsetzt, und dem Radical $\sqrt{A^2 - x^2}$ entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung beilegt, bekommt man

$$\frac{A^2 \cdot B \cdot (A^2 + 2x^2)}{\sqrt{(A^2 - x^2)^5}} = 0$$

Diese Gleichung wird identisch, wenn $B = 0$, und Gleichung VII zieht sich zurück auf

$$\text{VIII)}\quad y^2 + x^2 = A^2$$

Dadurch werden die Gleichungen III und IV zugleich identisch; und man hat noch zu untersuchen, ob dadurch auch Gleichung V identisch wird. Aus VIII folgt

$$y = \sqrt{A^2 - x^2},\ p = -\frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}} \text{ und } q = -\frac{A^2}{\sqrt{(A^2 - x^2)^3}}$$

Das Radical hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung. Führt man nun diese zuletzt für y, p, q hergestellten Ausdrücke in Gleichung V ein, so findet man, dass sie in der That identisch wird. Dabei wird aber auch $y + \frac{1 + p^2}{q} = 0$, und somit geht jetzt Gleichung I über in

$$\text{IX)}\quad U' = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Wenn man jetzt noch einmal mutirt, so wird man finden, dass der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck keinen Theilsatz mit δy^2 enthält. Das $\delta^2 U$ kann also (nach §. 12) nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten, und somit findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe; so reducirt sich Gleichung II auf

$$\delta U = \frac{1}{2 \cdot q^3} \cdot (pq \cdot y - x \cdot q + 2p + 2p^3) \cdot (1 + p^2) \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2}$$

Es findet also jetzt nur die einzige Gleichung V statt; und wenn man $(ypq - ypq)$ dazu addirt, so gibt sich

$$2p \cdot (yq + p^2 + 1) - (yp + x) \cdot q = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{p^3}}$ multiplicirt, so bekommt man $\frac{y \cdot q + 1 + p^2}{\sqrt{p}} - \frac{(y \cdot p + x) \cdot q}{2 \cdot \sqrt{p^3}} = 0$. Integrirt man, so gibt sich $\frac{y \cdot p + x}{\sqrt{p}} = C$, oder

$$\text{X)}\quad y \cdot p + x = C \cdot \sqrt{p}$$

Wenn man jetzt auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man zunächst $y \cdot dp + p \cdot dy + dx = \frac{C \cdot dp}{2 \cdot \sqrt{p}}$. Man multiplicire diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$, so geht sie über in $y \cdot p \cdot dp + (1 + p^2) \cdot dy = \frac{C \cdot \sqrt{p}}{2} \cdot dp$; und wenn man diese Gleichung weiter mit $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ multiplicirt, so gibt sich

Digitized by Google

$$\frac{y \cdot p \cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} + dy \cdot \sqrt{1 + p^2} = \frac{C \cdot \sqrt{p}}{2 \cdot \sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XI)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = E + \frac{C}{2} \cdot \int \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

Diese Gleichung kann man auch in folgender Form darstellen:

$$\text{XII)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = E + C \cdot \int \left(\frac{d\sqrt{p}}{dp}\right) \times \left(\frac{d\sqrt{1 + p^2}}{dp}\right) \cdot dp$$

Die gesuchte Curve ist also durch zwei Gleichungen (X und XI oder XII) gegeben.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe; so reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{XIII)} \quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot q^2} \cdot (2pqx - qy - 3 \cdot p^2 \cdot qy - 1 - 6 \cdot p^2 - 5 \cdot p^4) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Es findet also jetzt nur die einzige Gleichung IV statt. Dieser Gleichung sieht man es nicht so leicht an, wie man sie integriren kann; da sie aber durch VIII identisch wird, so muss VIII entweder ein besonderes oder ein singuläres Integral von IV sein. Differentiirt man VIII, so bekommt man $p \cdot y + x = 0$; und man kann zunächst versuchen, ob diese Gleichung ein besonderes Integral von IV ist, dessen allgemeines Integral folgende Form haben mag:

$$\text{XIV)} \quad (py + x) \cdot (g + c \cdot p^2)^n = F$$

Differentiirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$(g + c \cdot p^2)^{n-1} \cdot (2nc \cdot pqx + g \cdot qy + c \cdot (1 + 2n) \cdot p^2 \cdot qy + g + (g + c) \cdot p^2 + c \cdot p^4) = 0$$

und daraus kann nur folgen

$$\text{XV)} \quad 2nc \cdot pqx + g \cdot qy + c \cdot (1 + 2n) \cdot p^2 \cdot qy + g + (g + c) \cdot p^2 + c \cdot p^4 = 0$$

Vergleicht man nun in IV und XV Theilsatz um Theilsatz, so gelangt man zu den einzelnen Gleichungen:

$$2nc = 2,\ g = -1,\ c \cdot (1 + 2n) = -3,\ g + c = -6,\ c = -5$$

und diesen fünf Gleichungen wird genügt, wenn $c = -5$, $g = -1$, $n = -\frac{1}{5}$; so dass die in XIV angenommene Form in der That eine richtige ist, und übergeht in

$$\text{XVI)} \quad \frac{py + x}{\sqrt[5]{-1 - 5 \cdot p^2}} = F$$

Multiplicirt man hier den Nenner weg, so bekommt man

$$py + x = (\sqrt[5]{-1}) \cdot F \cdot \sqrt[5]{1 + 5 \cdot p^2}$$

und wenn man gleichzeitig noch G anstatt $(\sqrt[5]{-1}) \cdot F$ setzt, so kann man statt letzterer Gleichung auch schreiben

$$\text{XVII)} \quad yp + x = G \cdot \sqrt[5]{1 + 5 \cdot p^2}$$

Wenn man hier auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man zunächst $y \cdot dp + p \cdot dy + dx = G \cdot \frac{2p \cdot dp}{(1 + 5 \cdot p^2)^{\frac{4}{5}}}$; und wenn man alles mit p multiplicirt, so bekommt man

Digitized by Google

$$(1 + p^2) \cdot dy + py \cdot dp = G \cdot \frac{2 \cdot p^2 \cdot dp}{(1 + 5 \cdot p^2)^{\frac{4}{5}}}$$

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ multiplicirt, so geht sie über in

$$dy \cdot \sqrt{1 + p^2} + \frac{py \cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} = G \times \frac{2p^2 \cdot dp}{(1 + 5 \cdot p^2)^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{1 + p^2}}$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XVIII)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = H + G \cdot \int \frac{2p}{(1 + 5 \cdot p^2)^{\frac{4}{5}}} \times \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

Man kann auch dem unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucke eine andere Form geben, wobei letztere Gleichung übergeht in

$$\text{XIX)} \quad y \cdot \sqrt{1 + p^2} = H + G \cdot \int \left(\frac{d \sqrt[5]{1 + 5 \cdot p^2}}{dp} \right) \cdot \left(\frac{d \sqrt{1 + p^2}}{dp} \right) \cdot dp$$

Auch die jetzige Curve ist durch zwei Gleichungen (XVII und XVIII oder XIX) gegeben.

Aufgabe 88.

Es sind zwei in einer Ebene gelegene, sich schneidende und auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogene, Graden gegeben. Man sucht eine auf das nemliche Coordinatensystem bezogene Curve, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann den diesem Punkte der Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt aufsucht, und wenn man hierauf von diesem Krümmungsmittelpunkte Perpendikel auf die beiden gegebenen Graden fällt, das Product beider Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die Linien MN und PQ seien (fig. 10) die beiden gegebenen Graden, und V sei der zur Abscisse OG gehörige Krümmungsmittelpunkt der gesuchten Curve. VR und VT sind also die zwei in Rede stehenden Perpendikel. Die Gleichung der Linie MN sei

$$\text{I)} \quad A \cdot x' + B \cdot y' + C = 0$$

und die Gleichung der Linie PQ sei

$$\text{II)} \quad \mathfrak{A} \cdot x'' + \mathfrak{B} \cdot y'' + \mathfrak{C} = 0$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes V seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; so ist die Entfernung des Punktes V von der Linie MN bekanntlich

$$\text{III)} \quad VR = \frac{A \cdot \mathfrak{x} + B \cdot \mathfrak{y} + C}{\mp\sqrt{A^2 + B^2}}$$

und des Punktes V Entfernung von der Linie PQ ist ebenso

$$\text{IV)} \quad VT = \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{C}}{\mp\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}$$

Erst wenn man die gesuchte Curve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich, zu entscheiden, welche Bedeutung man einem jeden der Radicale $\mp\sqrt{A^2 + B^2}$ und $\mp\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Product ist also

$$\text{V)} \quad U = \frac{(A \cdot \mathfrak{x} + B \cdot \mathfrak{y} + C) \cdot (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{C})}{(\mp\sqrt{A^2 + B^2}) \cdot \mp\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$$

Digitized by Google

Nun ist $\mathfrak{x} = x - \frac{p \cdot (1 + p^2)}{q}$, und $\mathfrak{y} = y + \frac{1 + p^2}{q}$; und wenn man für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ diese Ausdrücke in V einführt, und zur Abkürzung noch $\mathfrak{Q}$ statt $\frac{1}{(\sqrt{A^2 + B^2}) \cdot (\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$ setzt, so geht V über in

$$\text{VI)} \quad U = Q \cdot \left[Ax + By + C + \frac{1 + p^2}{q} \cdot (B - Ap)\right] \cdot \left[\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C} + \frac{1 + p^2}{q} \cdot (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}p)\right]$$

Wenn man jetzt diesen Ausdruck mutirt, so ergeben sich sehr weitläufige Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, und es wäre bei deren Integration ein nicht geringer Grad von Aufmerksamkeit nöthig. Desshalb ist es räthlich, sich vor Allem umzuschauen, ob man nicht einen einfacheren Ausdruck statt Gleichung VI gewinnen kann.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, wenn man eine der gegebenen Graden als Abscissenaxe annimmt, und den Anfangspunkt der Coordinaten in jenen Punkt verlegt, wo sich die beiden gegebenen Graden schneiden.

Unter A und $\mathfrak{A}$ sind bekanntlich die Sinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden; ebenso sind unter B und $\mathfrak{B}$ die Cosinus der Winkel zu verstehen, welche von den gegebenen Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen werden. Soll nun die durch Gleichung I dargestellte Grade MN als Abscissenaxe und KY' als Ordinatenaxe angenommen werden, so ist $A = 0$ und $B = 1$; und Gleichung I reducirt sich zunächst auf $y' + C = 0$. Weil aber jetzt $y' = 0$ sein muss bei jedem Werthe des x, so ist auch $C = 0$; und der Ausdruck III reducirt sich zunächst auf $VR = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \left(y + \frac{1 + p^2}{q}\right)$, wie zu erwarten war. Allein da VR jetzt des Krümmungsmittelpunktes Entfernung von der Abscissenaxe ist, so weiss man, ohne die Curve zu kennen, auch jetzt schon, dass das Radical $\sqrt{1}$ nur seine positive Bedeutung repräsentirt; denn nur dadurch bekommt man für des Krümmungsmittelpunktes Ordinate den bekannten Ausdruck

$$\text{VII)} \quad VR = y + \frac{1 + p^2}{q}$$

Da ferner die durch Gleichung II dargestellte Grade durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so ist $\mathfrak{C} = 0$, und Gleichung II reducirt sich zunächst auf $\mathfrak{A} \cdot x'' + \mathfrak{B} \cdot y'' = 0$, oder auf $y'' + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot x'' = 0$; und wenn man zur Abkürzung $(-m)$ statt $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ setzt, so ist $y'' - m \cdot x'' = 0$. Der Ausdruck IV geht also über in

$$\text{VIII)} \quad VT = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \left(-mx + y + \frac{1 + p^2}{q} \cdot (1 + mp)\right)$$

Erst wenn man die gesuchte Curve und den Krümmungsmittelpunkt gefunden hat, ist es möglich, zu entscheiden, welche Bedeutung man dem Radical $\sqrt{1 + m^2}$ beilegen muss. Das in Rede stehende Product ist also

$$\text{IX)} \quad U = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \left(y + \frac{1 + p^2}{q}\right) \cdot \left(-mx + y + \frac{1 + p^2}{q} \cdot (1 + mp)\right)$$

Mutirt man nun, so bekommt man

$$\text{X)} \quad \delta U = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \left[\left(2y - mx + \frac{(2 + mp) \cdot (1 + p^2)}{q}\right) \cdot \delta y \right.$$
$$+ \frac{1}{q} \cdot \left(my + 4yp - 2mxp + 3m \cdot y \cdot p^2 + \frac{(m + 4p + 5m \cdot p^2) \cdot (1 + p^2)}{q}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$\left. - \frac{1 + p^2}{q^2} \cdot \left(2y - mx + myp + \frac{2 \cdot (1 + mp) \cdot (1 + p^2)}{q}\right) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]$$

Digitized by Google

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der 85sten Aufgabe; so müssen folgende drei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{XI)}\quad 2y - mx + \frac{(2 + mp) \cdot (1 + p^2)}{q} = 0 .$$

$$\text{XII)}\quad my + 4yp - 2mxp + 3my \cdot p^2 + \frac{(m + 4p + 5m \cdot p^2) \cdot (1 + p^2)}{q} = 0$$

$$\text{XIII)}\quad 2y - mx + myp + \frac{2 \cdot (1 + mp) \cdot (1 + p^2)}{q} = 0$$

Gleichung XI ist die einfachste; sie soll auch zuerst integrirt werden. Zunächst geht sie über in $2yq + 2 + 2p^2 - mxq + mp + mp^3 = 0$. Man addire $(mpqy - mpqy)$ zu dieser Gleichung, so kann man sie auf folgende Weise schreiben

$$(qy + 1 + p^2) \cdot (2 + mp) - (py + x) \cdot mq = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{(2 + mp)^2}$ multiplicirt; und thut man dieses, so geht sie über in

$$\frac{qy + 1 + p^2}{2 + mp} - \frac{(py + x) \cdot mq}{(2 + mp)^2} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren; und es gibt sich

$$\text{XIV)}\quad \frac{py + x}{2 + m \cdot p} = H$$

Daraus folgt $yp - mHp = 2H - x$; und integrirt man wieder, so bekommt man

$$\frac{1}{2} \cdot y^2 - mHy = 2Hx - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot G$$

oder

$$y^2 - 2mHy = 4Hx - x^2 + G$$

oder

$$y^2 - 2mHy + m^2 \cdot H^2 + x^2 - 4Hx + 4H^2 = G + (4 + m^2) \cdot H^2$$

oder

$$\text{XV)}\quad (y - mH)^2 + (x - 2H)^2 = G + (4 + m^2) \cdot H^2$$

Dieses ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt da liegt, wo $x = 2H$ und $y = mH$ ist. Aus XV folgt

$$y = mH + (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{G + m^2 \cdot H^2 - x^2 + 4 \cdot Hx}$$

und daraus folgt weiter

$$p = (\sqrt{1}) \cdot \frac{-x + 2H}{\sqrt{G + m^2 \cdot H^2 - x^2 + 4H \cdot x}}$$

und

$$q = (\sqrt{1}) \cdot \frac{-G - (m^2 + 4) \cdot H^2}{(G + m^2 \cdot H^2 - x^2 + 4H \cdot x)^{\frac{3}{2}}} .$$

Diese für y, p, q hergestellten Ausdrücke hat man nun in die Gleichungen XII und XIII einzuführen; und man findet, dass diese identisch werden, wenn $H = 0$. Gleichung XV reducirt sich also auf

$$\text{XVI)}\quad y^2 + x^2 = G$$

Dieses ist aber die Gleichung eines jeden beliebigen Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten, d. h. im Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Graden liegt. Mutirt man noch einmal, und beachtet man, dass jetzt sowohl $y + \frac{1 + p^2}{q} = 0$ als auch $-mx + \frac{mp \cdot (1 + p^2)}{q} = 0$ wird; so bleibt nur

Digitized by Google

$$\delta^2U = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \left[\left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\right.$$

$$\left. + m \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{1+3p^2}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p \cdot (1+p^2)}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)\right]$$

Der innerhalb der eckigen Klammern stehende Factor kann, wie man gradezu erkennt, nicht immer einerlei Zeichen behalten; und somit findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der 86sten Aufgabe; so zieht Gleichung X sich zurück auf

$$\delta U = -\frac{1+p^2}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left(2y - mx + mpy + \frac{2 \cdot (1+mp) \cdot (1+p^2)}{q}\right) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Man hat also jetzt nur die einzige Gleichung

$$\text{XVII)} \quad 2y - mx + mpy + \frac{2 \cdot (1+mp) \cdot (1+p^2)}{q} = 0$$

oder

$$2yq + mpyq + 2 \cdot (1+p^2) \cdot (1+mp) - mxq = 0$$

Wenn man hier $(mpyq - mpyq)$ addirt, so kann man letzterer Gleichung auch folgende Form geben

$$2yq \cdot (1+mp) + 2 \cdot (1+p^2) \cdot (1+mp) - mq \cdot (yp + x) = 0$$

oder

$$2 \cdot (yq + p^2 + 1) \cdot (1+mp) - mq \cdot (yp + x) = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{2 \cdot (1+mp)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{yq + p^2 + 1}{(1+mp)^{\frac{1}{2}}} - \frac{mq \cdot (yp + x)}{2 \cdot (1+mp)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Diese Gleichung kann man gradezu integriren, und es gibt sich

$$\text{XVIII)} \quad \frac{yp + x}{\sqrt{1+mp}} = E$$

Daraus folgt $yp + x = E \cdot \sqrt{1+mp}$; und wenn man hier auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man $y \cdot dp + p \cdot dy + dx = \frac{E}{2} \cdot \frac{m \cdot dp}{\sqrt{1+mp}}$. Man multiplicire diese Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$, so gibt sich $yp \cdot dp + (1+p^2) \cdot dy = \frac{E}{2} \cdot \frac{mp \cdot dp}{\sqrt{1+m \cdot p}}$; und wenn man diese Gleichung mit dem einförmigen Ausdrucke $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ multiplicirt, so geht sie über in

$$\frac{yp \cdot dp}{\sqrt{1+p^2}} + dy \cdot \sqrt{1+p^2} = \frac{E}{2} \cdot \frac{m}{\sqrt{1+mp}} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot dp$$

Durch Integration bekommt man

$$\text{XIX)} \quad y \cdot \sqrt{1+p^2} = F + \frac{E}{2} \cdot \int \frac{m}{\sqrt{1+mp}} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot dp$$

oder, wenn man lieber folgende Form will

$$\text{XX)} \quad y \cdot \sqrt{1+p^2} = F + E \cdot \int \left(\frac{d\sqrt{1+mp}}{dp}\right) \times \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dp}\right) \cdot dp$$

Digitized by Google

Die hier gesuchte Curve ist also durch zwei Gleichungen (XVIII und XIX oder XX) gegeben.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 86sten Aufgabe; so zieht Gleichung X sich zurück auf

$$\delta U = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(my + 4yp - 2mxp + 3my \cdot p^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(m + 4p + 5m \cdot p^2) \cdot (1 + p^2)}{q} \right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Man hat also nur die einzige Gleichung

$$\text{XXI)} \quad my + 4yp - 2mxp + 3my \cdot p^2 + \frac{(m + 4p + 5m \cdot p^2) \cdot (1 + p^2)}{q} = 0$$

oder

$$\text{XXII)} \quad myq + 4ypp - 2mx \cdot pq + 3my \cdot p^2 \cdot q + m + 4p$$
$$+ 6m \cdot p^2 + 4p^3 + 5m \cdot p^4 = 0$$

Dieser Gleichung sieht man es nicht so leicht an, wie man sie integriren kann; da sie aber durch Gleichung XVI identisch wird, so muss XVI entweder ein besonderes oder ein singuläres Integral von Gleichung XXI sein. Differentiirt man XVI, so bekommt man $py + x = 0$; und man kann zunächst versuchen, ob diese Gleichung ein besonderes Integral von XXI ist, dessen allgemeines Integral folgende Form haben mag

$$\text{XXIII)} \quad (py + x) \cdot (a + b \cdot p + g \cdot p^2)^c = K$$

Differentiirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$(a + bp + g \cdot p^2)^{c-1} \cdot (a \cdot yq + b \cdot (1 + c) \cdot ypq + 2cgxpq + g \cdot (1 + 2c) \cdot y \cdot p^2 \cdot q$$
$$+ a + b \cdot p + (a + g) \cdot p^2 + b \cdot p^3 + g \cdot p^4 + bc \cdot x \cdot q) = 0$$

Aus dieser Gleichung kann aber nur folgen

$$ayq + b \cdot (1 + c) \cdot ypq + 2cgxpq + g \cdot (1 + 2c) \cdot y \cdot p^2 \cdot q$$
$$+ a + b \cdot p + (a + g) \cdot p^2 + b \cdot p^3 + g \cdot p^4 + bc \cdot x \cdot q = 0$$

Vergleicht man diese Gleichung Theilsatz um Theilsatz mit Gleichung XXII, so gelangt man zu folgenden einzelnen Gleichungen $a = m$, $b \cdot (1 + c) = 4$, $2cg = -2m$, $g \cdot (1 + 2c) = 3m$, $b = 4$, $a + g = 6m$, $g = 5m$, $bc = 0$. Diese acht Gleichungen können aber nicht alle zugleich bestehen; und man erkennt, dass die in XXIII angenommene Form kein erstes Integral der Gleichung XXII sein kann. Man mache nun den Versuch mit folgender Form

$$\text{XXIV)} \quad (yp + x) \cdot (g + a \cdot p)^b \cdot (f + h \cdot p)^c = K$$

Differentiirt man, so gibt sich

$$(g + a \cdot p)^{b-1} \cdot (f + h \cdot p)^{c-1} \cdot (fg \cdot yq + (af + gh + abf + cgh) \cdot y \cdot pq$$
$$+ ah \cdot (b + c) \cdot x \cdot pq + (abf + cgh) \cdot xq + ah \cdot (1 + b + c) \cdot y \cdot p^2 \cdot q + fg$$
$$+ (af + gh) \cdot p + (ah + fg) \cdot p^2 + (af + gh) \cdot p^3 + ah \cdot p^4) = 0$$

Daraus kann aber nur folgen

$$fg \cdot yq + (af + gh + abf + cgh) \cdot ypq + ah \cdot (b + c) \cdot x \cdot pq$$
$$+ (abf + cgh) \cdot x \cdot q + ah \cdot (1 + b + c) \cdot y \cdot p^2 \cdot q + fg + (af + gh) \cdot p$$
$$+ (ah + fg) \cdot p^2 + (af + gh) \cdot p^3 + ah \cdot p^4 = 0$$

Vergleicht man diese Gleichung Theilsatz um Theilsatz mit XXII, so ergeben sich folgende einzelne Gleichungen: $fg = m$, $af + gh + abf + cgh = 4$, $ah \cdot (b + c) = -2m$, $abf + cgh = 0$, $ah \cdot (1 + b + c) = 3m$, $af + gh = 4$, $ah + fg = 6m$, $ah = 5m$. Allen diesen Gleichungen wird genügt, wenn

$$a = \frac{2 + \sqrt{4 - 5 \cdot m^2}}{m}, \; b = \frac{2 - \sqrt{4 - 5 \cdot m^2}}{5 \cdot \sqrt{4 - 5 \cdot m^2}}, \; c = \frac{-2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5 \cdot \sqrt{4 - 5m^2}}$$

$$f = m, \; g = 1, \; h = 2 - \sqrt{4 - 5 \cdot m^2}$$

Digitized by Google

Gleichung XXIV geht also über in

$$(yp + x)\cdot\left(1 + \frac{2 + \sqrt{4 - 5m^2}}{m}\cdot p\right)^{\frac{2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}} \times$$

$$\left(m + (2 - \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{-2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}} = K$$

oder

$$(yp + x)\cdot\frac{\left(m + (2 + \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}}}{(m)^{\frac{2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}}} \times$$

$$\left(m + (2 - \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{-2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}} = K$$

und wenn man den willkürlichen Constanten K ändert, so kann man statt letzterer Gleichung auch setzen

$$(yp + x)\cdot\left(m + (2 + \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}} \times$$

$$\left(m + (2 - \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{-2 - \sqrt{4 - 5\cdot m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5\cdot m^2}}} = L$$

oder

$$\text{XXV)}\quad (yp + x)\cdot\frac{\left(m + (2 + \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{2 - \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}}}{\left(m + (2 - \sqrt{4 - 5m^2})\cdot p\right)^{\frac{2 + \sqrt{4 - 5m^2}}{5\cdot\sqrt{4 - 5m^2}}}} = L$$

Wenn man letztere Gleichung differentiirt, und dann alle Vereinfachungen vornimmt; so gelangt man wieder zu Gleichung XXII. Dass aber dieses Geschäft am bequemsten auszuführen ist, wenn man Gleichung XXV vorerst in eine logarithmische umsetzt; daran braucht hier nicht mehr erinnert zu werden. Man bezeichne zur Abkürzung den gebrochenen Factor der Gleichung XXV kurzweg mit $\frac{1}{\chi(p)}$; so geht sie über in $\frac{y\cdot p + x}{\chi(p)} = L$, oder

$$y\cdot p + x = L\cdot\chi(p)$$

Differentiirt man diese letztere Gleichung, so gibt sich

$$y\cdot dp + p\cdot dy + dx = L\cdot d\chi(p)$$

und wenn man mit $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ multiplicirt, so gibt sich weiter

$$\frac{p\cdot y\cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} + dy\cdot\sqrt{1 + p^2} = L\cdot\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\cdot d\chi(p)$$

oder

$$\frac{d\,(y\cdot\sqrt{1 + p^2})}{dx} = L\cdot\left(\frac{d\,\sqrt{1 + p^2}}{dp}\right)\cdot\left(\frac{d\chi(p)}{dp}\right)\cdot dp$$

Durch Integration bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad y\cdot\sqrt{1 + p^2} = M + L\cdot\int\left(\frac{d\,\sqrt{1 + p^2}}{dp}\right)\cdot\left(\frac{d\chi(p)}{dp}\right)\cdot dp$$

Digitized by Google

Auch die hier gesuchte Curve ist durch zwei Gleichungen (XXV und XXVI) gegeben. Das Radical $\sqrt{4 - 5 \cdot m^2}$ hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung.

Aufgabe 89.

Man hat eine Menge von unter sich parallelen Graden, und man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. In den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt dieser Curve legt man den Krümmungskreis, welcher eine jede dieser Parallellinien zweimal durchschneidet, so dass jedes der auf diesen Parallellinien abgeschnittenen Stücke eine Sehne des Krümmungskreises bildet. Die gesuchte Curve soll in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate aller obgenannten Sehnen entweder ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die unter sich parallelen Graden (fig. 11) seien MP, NQ etc. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe senkrecht auf die besagten Parallellinien zieht. Wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, und x' und y' die Coordinaten des Krümmungskreises sind; so ist

$$\text{I)}\quad (y' - \mathfrak{y})^2 + (x' - \mathfrak{x})^2 = \rho^2$$

die Gleichung des Krümmungskreises. Daraus folgt

$$\text{II)}\quad y' = \mathfrak{y} + \sqrt{\rho^2 - (x' - \mathfrak{x})^2}$$

Nun ist $\mathfrak{y} = y + \frac{1 + p^2}{q}$, $\mathfrak{x} = x - \frac{p + p^3}{q}$, und $\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$; und wenn man diese Ausdrücke in II einführt, so bekommt man

$$\text{III)}\quad y' = y + \frac{1 + p^2}{q} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (x' - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (x' - x)^2}$$

Das Radical hat sowohl seine positive als negative Bedeutung; und man erkennt, dass es für y' zwei verschiedene Ausdrücke gibt, d. h. zu jeder beliebigen Abscisse x' gibt es zwei verschiedene Ordinaten. Setzt man die Abscisse OM $= a_1$, so geht dabei Gleichung III über in

$$\text{IV)}\quad y'_{a_1} = y + \frac{1 + p^2}{q} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (a_1 - x)^2}$$

Dadurch sind die zu OM gehörigen Ordinaten Mm und Mw zugleich ausgedrückt; und zwar ist

$$Mm = y + \frac{1 + p^2}{q} - \sqrt{\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (a_1 - x)^2}$$

und

$$Mw = y + \frac{1 + p^2}{q} + \sqrt{\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (a_1 - x)^2}$$

Die Sehne mw ist also $=$ Mw $-$ Mm, d. h. es ist

$$mw = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (a_1 - x)^2}$$

und daraus folgt

$$\text{V)}\quad mw^2 = 4 \cdot \left[\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p + p^3}{q} - (a_1 - x)^2\right]$$

Setzt man ferner die Abscisse ON $= a_2$, so bekommt man auf gleiche Weise

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad nv^2 = 4 \cdot \left[\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_2 - x) \cdot \frac{p+p^3}{q} - (a_2 - x)^2\right]$$

und so fort. Und setzt man endlich die letzte Abscisse $OR = a_n$, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad rs^2 = 4 \cdot \left[\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_n - x) \cdot \frac{p+p^3}{q} - (a_n - x)^2\right]$$

Die Aufgabe führt also auf folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\text{VIII)}\quad U = {} & 4 \cdot \left[\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_1 - x) \cdot \frac{p+p^3}{q} - (a_1 - x)^2\right] \\ & + 4 \cdot \left[\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_2 - x) \cdot \frac{p+p^3}{q} - (a_2 - x)^2\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 4 \cdot \left[\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2 \cdot (a_n - x) \cdot \frac{p+p^3}{q} - (a_n - x)^2\right]\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man noch umformen in

$$\begin{aligned}\text{IX)}\quad U = {} & 4n \cdot \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 + 8n \cdot \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot \frac{p+p^3}{q} \\ & - 4 \cdot [(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots\ldots + (a_n - x)^2]\end{aligned}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\begin{aligned}\text{X)}\quad \delta U = {} & \frac{8n}{q^2} \cdot \left[2p \cdot (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot (1 + 3p^2) \cdot q\right] \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ & - \frac{8n}{q^3} \cdot \left[(1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}\right) pq\right] \cdot (1+p^2) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\end{aligned}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der 85sten Aufgabe, so müssen folgende zwei Gleichungen zugleich bestehen:

$$\text{XI)}\quad 2p \cdot (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot (1 + 3p^2) \cdot q = 0$$

$$\text{XII)}\quad (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot p \cdot q = 0$$

Man erkennt aber gradezu, dass es keine Function von x gibt, welche diese beiden Gleichungen zugleich identisch macht.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Berührenden mit der Berührenden der gesuchten Curve parallel haben;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. (Man sehe den dritten Fall der 61sten Aufgabe.) Gleichung X reducirt sich also auf

$$\text{XIII)}\quad \delta U = -\frac{8n}{q^3} \cdot \left[(1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot p \cdot q\right] \cdot (1+p^2) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Man hat also jetzt die einzige Gleichung

$$\text{XIV)}\quad (1+p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot p \cdot q = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man $\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) = z$ setzt; denn dabei geht sie über in $(1 + p^2) + z \cdot pq = 0$, oder in $\frac{1}{z} + \frac{pq}{1 + p^2} = 0$, oder in $\frac{dz}{z} + \frac{p \cdot dp}{1 + p^2} = 0$; und daraus folgt $\lg nat\, z + \lg nat \sqrt{1 + p^2} = \lg nat\, A$, oder $z \cdot \sqrt{1 + p^2} = A$. Daraus folgt weiter $p = \frac{1}{z} \cdot \sqrt{A^2 - z^2}$, oder $dy = \frac{dz}{z} \cdot \sqrt{A^2 - z^2}$. Wenn man abermals integrirt, so gibt sich

$$\text{XV)} \quad y = B + \sqrt{A^2 - z^2} + \frac{A}{2} \cdot \lg nat \frac{-A + \sqrt{A^2 - z^2}}{+A + \sqrt{A^2 - z^2}}$$

Das Radical hat entweder durchweg seine positive oder durchweg seine negative Bedeutung. Uebrigens hat man statt z wieder $\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$ zurückzuführen.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihrem zweiten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der zweite Differentialquotient der gesuchten Curve annimmt;

so ist jetzt $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$ etc. Gleichung X reducirt sich also auf

$$\text{XVI)} \quad \delta U = \frac{8n}{q^2} \cdot \left[2p \cdot (1 + p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot (1 + 3p^2) \cdot q\right] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Man hat daher jetzt die einzige Gleichung

$$\text{XVII)} \quad 2p \cdot (1 + p^2) + \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot (1 + 3 \cdot p^2) \cdot q = 0$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man z anstatt $\left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$ setzt; denn dabei geht sie über in $2p \cdot (1 + p^2) + z \cdot (1 + 3p^2) \cdot q = 0$, oder in $\frac{1}{z} + \frac{(1 + 3p^2) \cdot q}{2p \cdot (1 + p^2)} = 0$, oder in $\frac{dz}{z} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dp}{p} + \frac{2p \cdot dp}{1 + p^2}\right) = 0$. Daraus folgt

$$\lg nat\, z + \frac{1}{2} \cdot (\lg nat\, p + \lg nat\, (1 + p^2)) = \lg nat\, C$$

oder

$$2 \cdot \lg nat\, z + \lg nat\, [p \cdot (1 + p^2)] = 2 \cdot \lg nat\, C$$

oder

$$\lg nat\, (z^2) + \lg nat\, [p \cdot (1 + p^2)] = \lg nat\, (C^2)$$

oder $z \cdot \sqrt{p \cdot (1 + p^2)} = C$. Führt man hier für z seinen Ausdruck zurück, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad \left(x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \cdot \sqrt{p \cdot (1 + p^2)} = C$$

Aus dieser Gleichung folgt $x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{C}{\sqrt{p \cdot (1 + p^2)}}$; und wenn man jetzt auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$dx = -\frac{C}{2} \cdot \frac{(1 + 3 \cdot p^2) \cdot dp}{p \cdot (1 + p^2) \cdot \sqrt{p \cdot (1 + p^2)}}$$

Digitized by Google

Multiplicirt man beiderseits mit $\frac{dy}{dx} = p$, so gibt sich

$$dy = -\frac{C}{2} \times \frac{(1 + 3p^2) \cdot dp}{(1 + p^2) \cdot \sqrt{p \cdot (1 + p^2)}}$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XIX)} \quad y = E - C \cdot \int \frac{1}{1 + p^2} \times \left(\frac{d \sqrt{p \cdot (1 + p^2)}}{dp} \right) \cdot dp$$

oder, wenn man lieber folgende Form will

$$\text{XX)} \quad y = E - \frac{C \cdot p}{\sqrt{p \cdot (1 + p^2)}} - 2C \cdot \int \left(\frac{p}{1 + p^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot dp$$

Die jetzige Curve ist also durch zwei Gleichungen (XVIII und XIX oder XX) gegeben, in welchen alle Radicale die nemliche (d. h. entweder durchweg die positive oder durchweg die negative) Bedeutung haben.

Aufgabe 90.

Man sucht unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, welche bei einerlei Abscisse x

1) auch einerlei Subtangente und
2) eine gleichgrösse Ordinate des Krümmungsmittelpunktes

haben, diejenige heraus, die in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, der zu diesem Punkte gehörige Krümmungshalbmesser grösser oder kleiner wird, als er bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
β) den oben gestellten zwei Bedingungen genügen,

gemacht werden kann.

Die vorgelegte Aufgabe führt zunächst auf den Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

welcher ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, wo die beiden Ausdrücke

$$\text{II)} \quad \frac{y}{p}, \text{ und III)} \quad y + \frac{1 + p^2}{q}$$

bei einerlei Werthe des x bezüglich einerlei jedoch nichtgegebene Werthe behalten.

Das zweideutige Radical in Gleichung I rührt davon her, dass die Lage des Krümmungshalbmessers unbestimmt ist, indem jeder Halbmesser des Krümmungskreises als Krümmungshalbmesser betrachtet werden muss.

Aus Gleichung I folgt

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} \cdot \left(3p \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \right)$$

Aus den in II und III gegebenen Bedingungen folgt

$$\text{V)} \quad \delta y = + \frac{y}{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

und

$$\text{VI)} \quad \delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

Führt man den in V für δy aufgestellten Ausdruck in VI ein, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = + \frac{(2 \cdot p^2 + y \cdot q) \cdot q}{p \cdot (1 + p^2)} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Gleichung IV geht also jetzt über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{p \cdot q} \cdot (p^2 - q \cdot y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$\text{IX)}\quad p^2 - q \cdot y = 0$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $p \cdot dy - y \cdot dp = 0$. Multiplicirt man mit $\frac{1}{p^2}$, so gibt sich $\frac{p \cdot dy - y \cdot dp}{p^2} = 0$; und daraus folgt durch Integration $\frac{y}{p} = m$, oder $y = m \cdot p$, oder $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{m}$. Integrirt man wieder, so bekommt man $\lg \text{nat}\, y - \lg \text{nat}\, A = \frac{x}{m}$, oder $\lg \text{nat} \left(\frac{y}{A}\right) = \frac{x}{m}$, oder $\frac{y}{A} = e^{\frac{x}{m}}$; und daraus folgt

$$\text{X)}\quad y = A \cdot e^{\frac{x}{m}}$$

Hier sind A und m die zwei (durch die Integration eingegangenen) willkürlichen Constanten.

Die gesuchte Curve ist also die sogenannte **logistische**, und hat, wie auch immer die Integrationsconstanten bestimmt werden mögen, folgende zwei Eigenschaften:

1) Weil $e^{\frac{x}{m}}$ positiv bleibt bei jedem Werthe des x und des m; so erkennt man an Gleichung X, dass y dasselbe Zeichen behält, wie der Constante A, d. h. alle Ordinaten liegen auf der nemlichen Seite der Abscissenaxe, und diese kann niemals von der Curve durchschnitten werden.

2) Differentiirt man Gleichung X, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{x}{m}} = \frac{y}{m}$$

$$\text{XII)}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{m^2} \cdot e^{\frac{x}{m}} = \frac{y}{m^2}$$

An dieser letzteren Gleichung erkennt man, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ und y immer dasselbe (positive oder negative) Vorzeichen gemein haben, d. h. dass die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung gegen die Abscissenaxe convex ist.

Man mutire Gleichung IV noch einmal, eliminire δy, $\delta^2 y$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, und berücksichtige, dass $p^2 = y \cdot q$ ist (wie aus Gleichung IX folgt); so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \frac{1 - 2 \cdot p^2}{(1 + p^2)^2} \cdot \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

oder

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \frac{m^2 - 2 \cdot y^2}{m^2 + y^2} \times \frac{m}{y} \cdot (m^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Ferner ist

$$\text{XV)}\quad U' = \frac{m^2 + y^2}{m^2} \times \frac{m}{y} \cdot (m^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Man sieht nun, dass sowohl der für $\delta^2 U$ als auch der für U' hergestellte Ausdruck den gemeinschaftlichen Factor $\frac{m}{y} \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ enthalten. Somit wird man sich (man sehe §. 114, a., S. 170, und vergleiche die hinter Gleichung VIII der 76sten Aufgabe stehende Anmerkung) auf folgende Weise entscheiden:

Digitized by Google

a) Gibt man dem zweideutigen Radical diejenige Bedeutung, bei welcher das Product $\frac{m}{y} \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ positiv wird; so ist auch U' positiv, und

aa) bei all denen Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ positiv ist, ist auch $\delta^2 U$ positiv, und unser positives U' ein Minimum-stand; dagegen

bb) bei all denen Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ negativ ist, ist auch $\delta^2 U$ negativ, und unser positives U' ein Maximum-stand; und

cc) in dem Falle, wo $2 \cdot y^2 = m^2$, also $\delta^2 U = 0$ ist, findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

b) Gibt man dem zweideutigen Radical die Bedeutung, bei welcher das Product $\frac{m}{y} \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ negativ wird, so ist auch U' negativ; und

aa) bei all denen Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ positiv ist, ist $\delta^2 U$ negativ, somit unser negatives U' ein Maximum-stand, jedoch in dem Sinne, nach welchem in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt; dagegen

bb) bei all denen Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ negativ ist, ist $\delta^2 U$ positiv, somit unser negatives U' ein Minimum-stand, jedoch in dem Sinne, nach welchem in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht; und

cc) in dem Falle, wo $2 \cdot y^2 = m^2$, also $\delta^2 U = 0$ ist, findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Man kann sich also, wenn man will, auch auf folgende Weise entscheiden:

α) Bei den Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ positiv wird, haben U' und $\delta^2 U$ einerlei Vorzeichen; und somit werden bei all diesen Werthen des x von der gesuchten Curve kürzere Krümmungshalbmesser geliefert, als von allen jenen Curven, die der gesuchten stetsfort nächstanliegen, und zugleich den in der Aufgabe gestellten zwei Bedingungen genügen.

β) Bei den Werthen des x, bei welchen die Differenz $(m^2 - 2 \cdot y^2)$ negativ wird, haben U' und $\delta^2 U$ entgegengesetzte Vorzeichen; und somit werden bei all diesen Werthen von der gesuchten Curve längere Krümmungshalbmesser geliefert, als von allen jenen Curven, die der gesuchten stetsfort nächstanliegen, und zugleich den in der Aufgabe gestellten zwei Bedingungen genügen.

γ) In dem Falle, wo $2 \cdot y^2 = m^2$, also $\delta^2 U = 0$ ist, muss nicht nothwendig der von der gesuchten Curve gelieferte Krümmungshalbmesser länger oder kürzer sein, als jeder der Krümmungshalbmesser, welche von allen den Curven geliefert werden, die der gesuchten stetsfort nächstanliegen, und den in der Aufgabe gestellten zwei Bedingungen genügen.

Weil die in II und III gestellten Bedingungen keine Gleichungen sind, so können die beiden Constanten A und m nur dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Curve noch zweien Nebenbedingungen unterwirft, z. B.

1) Die gesuchte Curve soll durch die zwei festen Punkte (a, b) und (α, β) gehen. Für diese Punkte geht Gleichung X bezüglich über in

$$b = A \cdot e^{\frac{a}{m}} \text{ und } \beta = A \cdot e^{\frac{\alpha}{m}}$$

Daraus folgt zunächst $m = \frac{\alpha - a}{\lg \operatorname{nat}\left(\frac{\beta}{b}\right)} = \frac{a - \alpha}{\lg \operatorname{nat}\left(\frac{b}{\beta}\right)}$; und somit gibt sich der Werth des A von selbst. Man vergesse aber nicht, dass die hiesige Curve ganz auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe liegt, dass also die beiden festen Ordinaten entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sein müssen.

Digitized by Google

2) Die gesuchte Curve soll durch einen festen Punkt (a, b) gehen, und die zur Abscisse α gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel bilden, dessen goniometrische Tangente = h. Hier hat man die beiden Gleichungen

$$b = A \cdot e^{\frac{a}{m}} \text{ und } h = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{\alpha}{m}}$$

woraus sich die beiden Constanten A und m bestimmen lassen.

3) Die gesuchte Curve soll zwar durch keinen festen Punkt gehen, aber die zu den Abscissen a und α gehörigen Berührenden sollen mit der Abscissenaxe solche Winkel bilden, deren goniometrischen Tangenten bezüglich die Werthe g und h haben. Hier hat man die beiden Gleichungen

$$g = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{a}{m}} \text{ und } h = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{\alpha}{m}}$$

woraus sich die beiden Constanten A und m bestimmen lassen.

Und dergleichen Nebenbedingungen mehr.

Aufgabe 91.

Man sucht unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, welche bei einerlei Abscisse x

1) auch einerlei Subnormale und
2) eine gleichgrosse Ordinate des Krümmungsmittelpunktes

haben, diejenige heraus, die in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, ihr zu diesem Punkte gehöriger Krümmungshalbmesser grösser oder kleiner wird, als er bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
β) den oben gestellten zwei Bedingungen genügen,

gemacht werden kann.

Hier soll wieder der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, wo die beiden Ausdrücke

$$\text{II)} \quad y \cdot p, \text{ und III)} \quad y + \frac{1 + p^2}{q}$$

bei einerlei Werthe des x bezüglich einerlei aber nichtgegebene Werthe behalten.

Hier rührt, wie schon in voriger Aufgabe bemerkt, das in Gleichung I befindliche zweideutige Radical davon her, dass die Lage des Krümmungshalbmessers unbestimmt ist, indem jeder Halbmesser des Krümmungskreises als Krümmungshalbmesser betrachtet werden muss.

Aus Gleichung I folgt

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} \cdot \left(3p \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Aus den in II und III gegebenen Bedingungen folgt

$$\text{V)} \quad \delta y = -\frac{y}{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

und

$$\text{VI)} \quad \delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

Führt man den in V hergestellten Ausdruck in VI ein, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{q\cdot(2\cdot p^2 - y\cdot q)}{p\cdot(1+p^2)}\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Gleichung IV geht also über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{p\cdot q}\cdot(p^2 + y\cdot q)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$\text{IX)}\quad p^2 + y\cdot q = 0$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $p\cdot dy + y\cdot dp = 0$. Integrirt man, so gibt sich $y\cdot p = A$. Daraus folgt $y\cdot dy = A\cdot dx$; und daraus folgt durch abermalige Integration

$$\text{X)}\quad y^2 = 2Ax + B$$

Die gesuchte Curve ist also die Apollonische Parabel, wo A und B die zwei (durch die Integration eingegangenen) willkürlichen Constanten vorstellen, welche, eben weil die in II und III vorgeschriebenen Bedingungen keine Gleichungen sind, nur dadurch bestimmt werden können, dass man die gesuchte Curve noch zweien Nebenbedingungen unterwirft, wie dergleichen schon in voriger Aufgabe aufgestellt wurden. Man mutire Gleichung IV noch einmal, eliminire δy, $\delta^2 y$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, und berücksichtige, dass $y\cdot q = -p^2$ ist (wie aus Gleichung IX folgt); so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \frac{3}{(1+p^2)^2}\cdot\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Differentiirt man Gleichung X, so bekommt man $y\cdot p = A$, und $y\cdot q + p^2 = 0$, woraus $p = \frac{A}{y}$ und $q = \frac{-A^2}{y^3}$ folgt. Die Gleichungen I und XI gehen also bezüglich über in

$$U' = \frac{(A^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-A^2},\ \text{und}\ \delta^2 U = 3\cdot\left(\frac{y^2}{A^2+y^2}\right)^2\cdot\frac{(A^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-A^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Hieran erkennt man, dass $\delta^2 U$ dasselbe Vorzeichen hat, wie U'. Man wird sich also (nach §. 114, a., S. 170) auf folgende Weise entscheiden:

a) Gibt man dem zweideutigen Radical seine negative Bedeutung, so hat der Krümmungshalbmesser einen positiven Werth bei jedem Werthe des x. Dabei ist auch $\delta^2 U$ positiv, d. h. der Krümmungshalbmesser der gefundenen Curve ist ein Minimum-stand.

b) Gibt man dem zweideutigen Radical seine positive Bedeutung, so hat der Krümmungshalbmesser einen negativen Werth bei jedem Werthe des x. Dabei ist auch $\delta^2 U$ negativ, d. h. der negative Krümmungshalbmesser der gefundenen Curve ist ein Maximum-stand, was jedoch nur in dem Sinne zu nehmen ist, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Man kann sich also, wenn man will, auch auf folgende Weise entscheiden:

Weil bei allen Werthen des x die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke einerlei Zeichen haben, so werden bei allen Werthen des x von der gesuchten Curve kürzere Krümmungshalbmesser geliefert, als von allen jenen Curven, welche der gesuchten stetsfort nächstanliegen, und den in der Aufgabe gestellten zwei Bedingungen genügen.

Aufgabe 92.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, der zwischen der Subnormale und dem Krümmungshalbmesser dieses Punktes stattfindende Unterschied ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Die vorgelegte Aufgabe führt zunächst auf den Ausdruck

Digitized by Google

2) Die gesuchte Curve soll durch einen festen Punkt (a, b) gehen, und die zur Abscisse α gehörige Berührende soll mit der Abscissenaxe einen Winkel bilden, dessen goniometrische Tangente = h. Hier hat man die beiden Gleichungen

$$b = A \cdot e^{\frac{a}{m}} \text{ und } h = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{\alpha}{m}}$$

woraus sich die beiden Constanten A und m bestimmen lassen.

3) Die gesuchte Curve soll zwar durch keinen festen Punkt gehen, aber die zu den Abscissen a und α gehörigen Berührenden sollen mit der Abscissenaxe solche Winkel bilden, deren goniometrischen Tangenten bezüglich die Werthe g und h haben. Hier hat man die beiden Gleichungen

$$g = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{a}{m}} \text{ und } h = \frac{A}{m} \cdot e^{\frac{\alpha}{m}}$$

woraus sich die beiden Constanten A und m bestimmen lassen.

Und dergleichen Nebenbedingungen mehr.

Aufgabe 91.

Man sucht unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, welche bei einerlei Abscisse x

1) auch einerlei Subnormale und
2) eine gleichgrosse Ordinate des Krümmungsmittelpunktes

haben, diejenige heraus, die in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, ihr zu diesem Punkte gehöriger Krümmungshalbmesser grösser oder kleiner wird, als er bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
β) den oben gestellten zwei Bedingungen genügen,

gemacht werden kann.

Hier soll wieder der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, wo die beiden Ausdrücke

$$\text{II)} \quad y \cdot p, \text{ und III) } y + \frac{1 + p^2}{q}$$

bei einerlei Werthe des x bezüglich einerlei aber nichtgegebene Werthe behalten.

Hier rührt, wie schon in voriger Aufgabe bemerkt, das in Gleichung I befindliche zweideutige Radical davon her, dass die Lage des Krümmungshalbmessers unbestimmt ist, indem jeder Halbmesser des Krümmungskreises als Krümmungshalbmesser betrachtet werden muss.

Aus Gleichung I folgt

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} \cdot \left(3p \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Aus den in II und III gegebenen Bedingungen folgt

$$\text{V)} \quad \delta y = -\frac{y}{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

und

$$\text{VI)} \quad \delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1 + p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

Führt man den in V hergestellten Ausdruck in VI ein, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{q\cdot(2\cdot p^2 - y\cdot q)}{p\cdot(1+p^2)}\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Gleichung IV geht also über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{p\cdot q}\cdot(p^2 + y\cdot q)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$\text{IX)}\quad p^2 + y\cdot q = 0$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $p\cdot dy + y\cdot dp = 0$. Integrirt man, so gibt sich $y\cdot p = A$. Daraus folgt $y\cdot dy = A\cdot dx$; und daraus folgt durch abermalige Integration

$$\text{X)}\quad y^2 = 2Ax + B$$

Die gesuchte Curve ist also die Apollonische Parabel, wo A und B die zwei (durch die Integration eingegangenen) willkürlichen Constanten vorstellen, welche, eben weil die in II und III vorgeschriebenen Bedingungen keine Gleichungen sind, nur dadurch bestimmt werden können, dass man die gesuchte Curve noch zweien Nebenbedingungen unterwirft, wie dergleichen schon in voriger Aufgabe aufgestellt wurden. Man mutire Gleichung IV noch einmal, eliminire δy, $\delta^2 y$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, und berücksichtige, dass $y\cdot q = -p^2$ ist (wie aus Gleichung IX folgt); so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \frac{3}{(1+p^2)^2}\cdot\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Differentiirt man Gleichung X, so bekommt man $y\cdot p = A$, und $y\cdot q + p^2 = 0$, woraus $p = \frac{A}{y}$ und $q = \frac{-A^2}{y^3}$ folgt. Die Gleichungen I und XI gehen also bezüglich über in

$$U' = \frac{(A^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-A^2},\ \text{und}\ \delta^2 U = 3\cdot\left(\frac{y^2}{A^2+y^2}\right)^2\cdot\frac{(A^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-A^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Hieran erkennt man, dass $\delta^2 U$ dasselbe Vorzeichen hat, wie U'. Man wird sich also (nach §. 114, a., S. 170) auf folgende Weise entscheiden:

a) Gibt man dem zweideutigen Radical seine negative Bedeutung, so hat der Krümmungshalbmesser einen positiven Werth bei jedem Werthe des x. Dabei ist auch $\delta^2 U$ positiv, d. h. der Krümmungshalbmesser der gefundenen Curve ist ein Minimum-stand.

b) Gibt man dem zweideutigen Radical seine positive Bedeutung, so hat der Krümmungshalbmesser einen negativen Werth bei jedem Werthe des x. Dabei ist auch $\delta^2 U$ negativ, d. h. der negative Krümmungshalbmesser der gefundenen Curve ist ein Maximum-stand, was jedoch nur in dem Sinne zu nehmen ist, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Man kann sich also, wenn man will, auch auf folgende Weise entscheiden:

Weil bei allen Werthen des x die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke einerlei Zeichen haben, so werden bei allen Werthen des x von der gesuchten Curve kürzere Krümmungshalbmesser geliefert, als von allen jenen Curven, welche der gesuchten stetsfort nächstanliegen, und den in der Aufgabe gestellten zwei Bedingungen genügen.

Aufgabe 92.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, der zwischen der Subnormale und dem Krümmungshalbmesser dieses Punktes stattfindende Unterschied ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Die vorgelegte Aufgabe führt zunächst auf den Ausdruck

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad U = y \cdot p - \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Die Subnormale eines jeden Punktes einer ebenen Curve hat bekanntlich jedesmal ihre bestimmte Lage. Erst wenn die gesuchte Curve gefunden, lässt sich ermitteln, ob der für die Subnormale stattfindende Ausdruck $y \cdot p$ positiv oder negativ ist.

Der Krümmungshalbmesser hat (wie schon in den beiden vorigen Aufgaben bemerkt worden) keine bestimmte Lage, indem jeder Halbmesser des Krümmungskreises als Krümmungshalbmesser betrachtet werden muss. Die Unbestimmtheit dieser Lage ist auch angedeutet durch die Zweideutigkeit des Radicals in dem Ausdrucke $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$

Hat man die gesuchte Curve gefunden, und für das Product $y \cdot p$ einen positiven Ausdruck erhalten; so gebe man dem Radical diejenige Bedeutung, bei welcher auch $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ positiv wird. Wenn aber aus der für die gesuchte Curve stattfindenden Gleichung sich für das Product $y \cdot p$ ein negativer Ausdruck ergibt; so gebe man dem Radical diejenige Bedeutung, bei welcher auch $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ negativ wird. Es müssen nemlich $y \cdot p$ und $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ immer entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sein, weil nur unter dieser Bedingung der in Gleichung I befindliche Ausdruck auf eine Subtraction führt, während er, wenn $y \cdot p$ und $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ einander entgegengesetzt wären, auf eine Addition führen würde.

Mutirt man, so gibt sich zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = p \cdot \delta y + \left(y - \frac{3 \cdot p \cdot (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der 85sten Aufgabe; so müssen gleichzeitig die drei identischen Gleichungen

$$\text{III)}\quad p = 0$$

$$\text{IV)}\quad y - \frac{3 \cdot p \cdot (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} = 0$$

$$\text{V)}\quad (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

stattfinden. Der Gleichung III und IV wird gleichzeitig genügt, wenn $y = 0$; allein dabei würde Gleichung V auf den Widerspruch $1 = 0$ führen, d. h. auf den Widerspruch, dass die bestimmte Zahl 1 gleich Null sei. Es kann also die in diesem ersten Falle gestellte Allgemeinheit nicht stattfinden.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 86sten Aufgabe; so reducirt Gleichung II sich auf

$$\text{VI)}\quad \delta U = \left(y - \frac{3 \cdot p \cdot (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt

$$\text{VII)}\quad y - \frac{3 \cdot p \cdot (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} = 0.$$

welche Gleichung sich gradezu umformt in $\frac{1}{3} \cdot \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dy}{y}$, woraus sich nach und nach ergibt

Digitized by Google

$$\lg \text{nat } A + \frac{1}{3} \cdot \lg \text{nat } (p + \sqrt{1 + p^2}) = \lg \text{nat } y$$

oder

$$\text{VIII)} \quad A^3 \cdot (p + \sqrt{1 + p^2}) = y^3$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ohneweiters folgende bilden

$$\text{IX)} \quad 2 \cdot A^3 \cdot \frac{y^3 \cdot dy}{y^6 - A^6} = dx$$

woraus durch abermaliges Integriren sich

$$\text{X)} \quad \frac{A}{3} \cdot \left[(\sqrt{3}) \cdot \text{arc tg} \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{y^2 + 2A^2} - \frac{1}{2} \cdot \lg \text{nat} \frac{y^4 + A^2 \cdot y^2 + A^4}{(y^2 - A^2)^2}\right] = x + B$$

ergibt. Man kann also die gesuchte Curve noch zweien Nebenbedingungen unterwerfen, um die beiden Integrationsconstanten A und B zu bestimmen.

Mutirt man Gleichung VI noch einmal, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad \delta^2 U = -\frac{3 \cdot (1 + 2 \cdot p^2)}{q \cdot \sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Aus Gleichung VII folgt aber

$$\text{XII)} \quad \frac{y}{3 \cdot p} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{q}$$

Wenn man hier beiderseits mit $(1 + p^2)$ multiplicirt, so bekommt man $\frac{y \cdot (1 + p^2)}{3 \cdot p} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$; und Gleichung I geht über in

$$\text{XIII)} \quad U' = \frac{y}{3 \cdot p} \cdot (2 \cdot p^2 - 1)$$

Wenn man aber Gleichung XII beiderseits mit $(1 + p^2)$ dividirt, so bekommt man $\frac{y}{3 \cdot p \cdot (1 + p^2)} = \frac{1}{q \cdot \sqrt{1 + p^2}}$; und Gleichung XI geht über in

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = -\frac{y}{p} \times \frac{1 + 2 \cdot p^2}{1 + p^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Aus Gleichung VIII folgt aber

$$\text{XV)} \quad p = \frac{y^6 - A^6}{2 \cdot A^3 \cdot y^3}$$

Führt man diesen Ausdruck für p in Gleichung XIII und XIV ein; so ergeben sich für U' und $\delta^2 U$ Ausdrücke, welche kein Radical enthalten. Und so fort.

Aufgabe 93.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, welche

1) bei einerlei Abscisse auch einerlei Normale haben, und wo
2) der Krümmungshalbmesser jedesmal gleich ist dem Producte eines constanten Parameters und der zur dritten Potenz erhobenen goniometrischen Secante des von der Abscissenaxe und der Berührenden eingeschlossenen Winkels,

diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, die Summe der (zu diesem Punkte gehörigen) dreifachen Ordinate und der Ordinate des Krümmungsmittelpunktes grösser oder kleiner wird, als sie (die Summe) bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
β) den oben gestellten zwei Bedingungen genügen,

gemacht werden kann.

Digitized by Google

Wenn p die goniometrische Tangente des von der Berührenden und von der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkels ist, so ist $\sqrt{1+p^2}$ die goniometrische Secante desselben. Erst wenn man weiss, wie gross dieser Winkel ist, kann man entscheiden, welche Bedeutung das zweideutige Radical $\sqrt{1+p^2}$ repräsentirt.

Nun ist $y + \frac{1+p^2}{q}$ die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes; und so ist die Aufgabe jetzt folgende: Es soll

$$\text{I)}\quad U = 3y + y + \frac{1+p^2}{q}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, welche alle bei einerlei Werthe des x auch jedesmal für den Ausdruck

$$\text{II)}\quad y \cdot \sqrt{1+p^2}$$

einerlei aber einen nichtgegebenen Werth liefern, und welche alle auch die Gleichung

$$\text{III)}\quad \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = a \cdot (1+p^2)^{\frac{2}{2}}$$

bei jedem Werthe des x identisch machen. Hier ist a der in der Aufgabe besagte unveränderliche Parameter. Aus I folgt

$$\text{IV)}\quad \delta U = 4 \cdot \delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Aus II folgt

$$\text{V)}\quad \delta y = -\frac{p \cdot y}{1+p^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Wenn man in Gleichung III den gemeinschaftlichen Factor unterdrückt, so reducirt sie sich auf $\frac{1}{q} = a$; und daraus folgt $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, etc.

Gleichung IV geht also über in

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{-4pq \cdot y + 2 \cdot p \cdot (1+p^2)}{(1+p^2) \cdot q} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus gibt sich die identische Gleichung

$$\text{VII)}\quad -4pq \cdot y + 2 \cdot p \cdot (1+p^2) = 0$$

welche sich gradezu umsetzen lässt in

$$\frac{2p \cdot dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$$

Daraus folgt nach und nach

$$\lg \text{ nat } (1+p^2) = \lg \text{ nat } y + B$$

oder

$$\lg \text{ nat } (1+p^2) = \lg \text{ nat } \frac{y}{m}$$

oder

$$1 + p^2 = \frac{y}{m}$$

Sondert man p ab, so gibt sich $p = \sqrt{\frac{y-m}{m}}$, oder $dy \cdot \sqrt{\frac{m}{y-m}} = dx$, woraus durch abermaliges Integriren

$$2 \cdot \sqrt{m \cdot (y-m)} = x + A$$

folgt. Letztere Gleichung formt sich gradezu um in

$$\text{VIII)}\quad y = \frac{x^2}{4m} + \frac{A}{2m} \cdot x + \frac{A^2 + 4m^2}{4m}$$

Durch diese Function muss nun Gleichung III identisch werden; und dieses geschieht, wenn $m = \frac{a}{2}$. Dabei geht VIII über in

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad y = \frac{x^2}{2a} + \frac{A}{a} \cdot x + \frac{A^2 + a^2}{2a}$$

wo der Constante A noch willkürlich ist. Da aber die in II ausgesprochene Bedingung keine Gleichung ist, so kann der Constante A nur dadurch bestimmt werden, dass man die gefundene Curve noch einer Nebenbedingung unterwirft. Mutirt man noch einmal, so bekommt man nach gehörigen Eliminationen und Reductionen

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = 4a \cdot \left(\frac{p}{1 + p^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass es von a abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 94.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven, welche bei einerlei Abscisse

1) auch einerlei Ordinate, und
2) einerlei Abscisse des Krümmungsmittelpunktes

haben, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, das von den Coordinaten des zu diesem Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunktes gebildete rechtwinkelige Dreieck grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch
β) den oben gestellten zwei Bedingungen genügen,

gemacht werden kann.

Die Aufgabe führt (man vergleiche Aufgabe 87) auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{p \cdot (1 + p^2)}{q}\right) \cdot \left(y + \frac{1 + p^2}{q}\right)$$

und dieser soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während y nur aus der Zahl derjenigen einander stetsfort nächstanliegenden Functionen gewählt werden darf, wo die beiden Ausdrücke

$$\text{II)}\quad y,\ \text{und}\ \text{III)}\quad x - \frac{p \cdot (1 + p^2)}{q}$$

bei einerlei Werthe des x bezüglich einerlei jedoch nichtgegebene Werthe behalten.
Aus Gleichung I folgt im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{2q} \cdot [qx - p(1 + p^2)] \cdot \delta y$$
$$+ \frac{1}{2q^2} \cdot [2pqx - qy - 3 \cdot p^2 \cdot qy - 1 - 6 \cdot p^2 - 5 \cdot p^4] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot q^3} \cdot [pqy - xq + 2p \cdot (1 + p^2)] \cdot (1 + p^2) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Aus der in II gestellten Bedingung folgt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. Aus der in III gestellten Bedingung folgt, dass der Werth des $\frac{d\delta y}{dx}$ und des $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ voneinander abhängig sind; und wenn man $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ als abhängig behandeln will, so folgt aus III, dass

$$\text{V)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{(1 + 3 \cdot p^2) \cdot q}{p \cdot (1 + p^2)} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Gleichung IV geht also über in

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{1 + p^2}{2p \cdot q^2} \cdot [p \cdot (1 + p^2) - x \cdot q] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss die identische Gleichung

$$\text{VII)}\quad p(1 + p^2) - xq = 0$$

stattfinden, welche (in der 87sten Aufgabe) schon integrirt ist, und wo sich

$$\text{VIII)}\quad y = B - \sqrt{A^2 - x^2}$$

oder

$$\text{IX)}\quad (y - B)^2 + x^2 = A^2$$

ergeben hat. Die gesuchte Curve ist also ein Kreis, dessen Ordinatenaxe durch den Mittelpunkt geht. Da aber die in II und III gestellten Bedingungen keine Gleichungen sind, so können die Constanten A und B nur dadurch bestimmt werden, dass man die gesuchte Curve noch zwei Nebenbedingungen unterwirft. Mutirt man noch einmal, so bekommt man nach gehörigen Eliminationen und Reductionen

$$\delta^2 U = \frac{1 + 3 \cdot p^2}{2p^2 \cdot q^2} \cdot [p\,(1 + p^2) - x \cdot q] \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

d. h. es ist $\delta^2 U = 0$. Ebenso findet man $\delta^3 U = 0$, $\delta^4 U = 0$ etc., so dass $U' = 0$ weder als Maximum-stand noch als Minimum-stand gelten kann.

Aufgabe 95.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende, und errichtet in zwei festen Punkten der Abscissenaxe Perpendikel. In diesen beiden Perpendikeln liegen aber die zu besagten zwei festen Punkten gehörigen Ordinaten sowohl der Curve selbst als auch der Berührenden. Wenn man nun beidemal die zwischen der Ordinate der Curve selbst und zwischen der Ordinate der Berührenden stattfindende Differenz nimmt; welche Curve ist es, die in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass das Product beider Differenzen ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

Das gesuchte Product (fig. 1) ist hier $U = RP \cdot TQ$; y und x sind die zum Berührungspunkte S gehörigen Coordinaten; y_a ist die zur Abscisse a gehörige Ordinate der Curve, und ebenso ist y_α die zur Abscisse α gehörige Ordinate der Curve; die den Abscissen a und α entsprechenden Ordinaten der in S berührenden Graden sind bezüglich $RH = y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx}$, und $TK = y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}$. Es ist also $RP = \left(y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx} - y_a\right)$, und $TQ = \left(y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx} - y_\alpha\right)$. Setzt man nun zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$, so ist

$$U = (y + (a - x) \cdot p - y_a) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p - y_\alpha)$$

Daraus folgt durch Mutiren

$$\text{I)}\quad \delta U = [2 \cdot y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y$$
$$+ [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2\,(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- [y + (\alpha - x) \cdot p - y_\alpha] \cdot \delta y_a - [y + (a - x) \cdot p - y_a] \cdot \delta y_\alpha$$

und

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta^2 y$$
$$+ [a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$- [y + (\alpha - x) \cdot p - y_\alpha] \cdot \delta^2 y_a - [y + (a - x) \cdot p - y_a] \cdot \delta^2 y_\alpha$$
$$+ 2 \cdot \delta y^2 + 2\,(a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$
$$- 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_a - 2\,(\alpha - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a - 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_\alpha - 2\,(a - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_\alpha$$
$$+ 2 \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha$$

Digitized by Google

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven machen können; so sind δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, δy_a, δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. (Man sehe §. 91—92; auch Band I. S. 219 und 222.) Es müssen also folgende vier Gleichungen zugleich bestehen:

1) $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0$

2) $(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0$

3) $y + (\alpha - x) \cdot p - y_\alpha = 0$

4) $y + (a - x) \cdot p - y_a = 0$

Addirt man Gleichung 3 und 4, so bekommt man 1. Multiplicirt man Gleichung 3 mit $(a - x)$, und Gleichung 4 mit $(\alpha - x)$, und addirt beide Producte, so gibt sich Gleichung 2. Man erkennt also: wenn es eine Function gibt, welche die Gleichungen 3 und 4 gleichzeitig identisch macht, so macht diese Function auch die Gleichungen 1 und 2 identisch. Eliminirt man p aus 3 und 4, so gibt sich

$$5)\quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}$$

Daraus folgt $p = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a}$; und wenn man diese für y und p hergestellten Ausdrücke substituirt, so werden die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 zugleich identisch. Man hat also hier die Gleichung einer graden Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Grade auch zugleich ihre eigene Berührende ist. Uebrigens sind y_a und y_α noch ganz unbestimmt; und somit kann man die gefundene Grade noch zwingen, irgend zwei Bedingungen zu genügen, z. B. durch zwei gegebene Punkte zu gehen. Sind nun (n, m) und (k, h) diese Punkte, so geht für diese Punkte die Gleichung 5 bezüglich über in

$$6)\quad m = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot n + \frac{\alpha y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}$$

$$7)\quad h = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot k + \frac{\alpha y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}$$

wodurch sich y_a und y_α vollkommen bestimmen lassen. In Folge der Gleichungen 3 und 4 erkennt man, dass $TQ = 0$ und $RP = 0$; es ist also auch $U' = 0$. Gleichung II reducirt sich jetzt auf

$$\begin{aligned}\delta^2 U = {} & 2 \cdot \delta y^2 + 2\,(a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \\ & - 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_a - 2 \cdot (\alpha - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a - 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_\alpha \\ & - 2 \cdot (a - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_\alpha - 2 \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann aber (man sehe §. 13) nicht beständig einerlei Zeichen behalten, namentlich weil die beiden Elemente δy_a^2 und δy_α^2 dabei fehlen. Es findet also jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Der Gleichung 5 hätte man auch die einfachere Form $y = Ax + B$ geben können, wo A und B zwei noch ganz willkürliche Constanten sind. Wenn man dann $(Ax + B)$, A, $(A\alpha + B)$ und $(Aa + B)$ bezüglich an die Stelle von y, p, y_α und y_a überall in den Gleichungen 1, 2, 3, 4 einsetzt, so werden sie alle vier identisch bei jedem Werthe des A und des B. Es ist aber diese rückwärts gehende Probe jedesmal unerlässlich, wovon man sich schon in den Aufgaben 55—60 zur Genüge überzeugt hat:

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern bei denen auch

β) die Summe der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten denselben

Digitized by Google

Werth bekommt, wie die Summe der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten der gesuchten Curve;

so muss jetzt zwischen der gesuchten Curve und allen in Betracht zu ziehenden Nachbarcurven folgende Gleichung

$$y_a + y_\alpha = \left(y_a + x \cdot \delta y_a + \frac{x^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a \ldots\ldots\right) + \left(y_\alpha + x \cdot \delta y_\alpha + \frac{x^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \ldots\right)$$

bestehen. Da aber letztere Gleichung für ein im Momente des Verschwindens befindliches x gelten soll; so muss einzeln stattfinden $\delta y_a + \delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a + \delta^2 y_\alpha = 0$ etc. Wenn man nun δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. als abhängig betrachtet, so ist $\delta y_\alpha = -\delta y_a$; $\delta^2 y_\alpha = -\delta^2 y_a$, etc. Eliminirt man nun δy_α aus Gleichung I, so bekommt man

$$\begin{aligned} \delta U = & [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y \\ & + [(a + \alpha - 2x) y + 2 (a - x)(\alpha - x) p - (a - x) y_\alpha - (\alpha - x) y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ & - [(\alpha - a) \cdot p - y_\alpha + y_a] \cdot \delta y_a \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$8)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0$$

$$9)\quad (a + \alpha - 2x) y + 2 (a - x)(\alpha - x) p - (a - x) y_\alpha - (\alpha - x) y_a = 0$$

$$10)\quad (\alpha - a) \cdot p - y_\alpha + y_a = 0$$

Eliminirt man p aus 8 und 10, so ergibt sich

$$11)\quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a} = A \cdot x + B$$

Diese Gleichung gehört einer graden Linie an, und genügt den drei Gleichungen 8, 9, 10, kann also die Aufgabe lösen. Da aber y_α und y_a noch ganz unbestimmt sind; so kann man der Aufgabe selbst, damit sie eine bestimmte Auflösung habe, noch zwei Bedingungen zufügen, z. B. dass die gesuchte Linie durch zwei gegebene Punkte gehe, oder dass sie durch einen Punkt gehe und zugleich die Summe $y_a + y_\alpha = K$ einen bestimmt gegebenen Werth habe, etc. Ferner geht Gleichung II über in

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \\ & - 2 (\alpha - a) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a - 2 \cdot \delta y_a^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann aber (man vergleiche §. 12) nicht beständig einerlei Zeichen haben, namentlich weil δy^2 und δy_a^2 entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es findet also weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr gemeinschaftlich haben

$\alpha\alpha$) den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungspunkt, und

$\beta\beta$) die beiden zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte;

so findet einzeln statt $\delta y = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc.

Mancher Anfänger möchte behaupten: wenn einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc., in welchen Ausdrücken der Werth des x noch ganz unbestimmt ist; so muss auch bei den bestimmten Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ einzeln stattfinden $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc., so dass durch die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. die Zahl der zu vergleichenden Curven nicht enger eingeschränkt wird, als es schon durch die Gleichungen $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. geschehen ist. Dieses wäre ganz richtig, wenn die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. identische Functionen wären. Obgleich aber der Werth des x unbestimmt ist, so ist er doch bei allen zu vergleichenden Functionen der nemliche unveränderliche Werth; und für einen solchen nach Belieben angenommenen aber festzuhaltenden Werth des x, und für keinen andern, müssen auch die allgemeinen Gleichungen $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. stattfinden. (Man sehe §. 181, und die Anmerkung in B. I. S. 477.)

Digitized by Google

Unter diesen Umständen reducirt sich nun Gleichung I auf

$$\delta U = [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x)(\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$12) \quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit dem nach bekannter Methode leicht aufzufindenden Factor $\frac{1}{2 \cdot [(a - x)(\alpha - x)]^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt; dadurch bekommt man

$$\frac{2(a - x)(\alpha - x) \cdot dy - (2x - a - \alpha) y \cdot dx}{2 \cdot [(a - x) \cdot (\alpha - x)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{[(a - x) y_\alpha + (\alpha - x) y_a] \cdot dx}{2 \cdot [(a - x) \cdot (\alpha - x)]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{y}{\sqrt{(a - x)(\alpha - x)}} + \frac{(a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}} = C$$

oder

$$13) \quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a} + C \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}$$

Daraus folgt $p = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} + C \cdot \frac{-a - \alpha + 2x}{2 \cdot \sqrt{(a - x)(\alpha - x)}}$; und wenn man diese für y und p hergestellten Ausdrücke in 12 einsetzt, so wird diese Gleichung identisch bei jedem beliebigen Werthe des y_a, des y_α und des C. Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man diese Curve noch drei Bedingungen unterwerfen, um die Werthe der drei Stücke y_a, y_α und C zu bestimmen. Sind aber die Werthe von y_a und y_α vorgeschrieben, so kann man diese Curve nur einer einzigen Bedingung unterwerfen. Soll sie z. B. durch den festen Punkt (n, m) gehen, so ist

$$C = \frac{(\alpha - a) \cdot m + (a - n) \cdot y_\alpha - (\alpha - n) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - n) \cdot (\alpha - n)}}$$

Gleichung 13 geht also jetzt über in

$$14) \quad \frac{(\alpha - a) y + (a - x) y_\alpha - (\alpha - x) y_a}{(\alpha - a) m + (a - n) y_\alpha - (\alpha - n) y_a} = \sqrt{\frac{(a - x)(\alpha - x)}{(a - n)(\alpha - n)}}$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung II auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass ein Maximum-stand stattfindet, wenn $x > a$ und $x < \alpha$; dagegen findet ein Minimum-stand statt, wenn entweder $x > a$ und $x > \alpha$, oder wenn $x < a$ und $x < \alpha$. Ferner ist jetzt

$$U' = -\left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{2 \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2,$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a}{(\alpha - a) \cdot \sqrt{(a - x) \cdot (\alpha - x)}}\right)^2$$

oder

$$U' = -\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2 \cdot C^2$$

Digitized by Google

Unter den hier zu bemerkenden Specialitäten ist besonders die hervorzuheben, wo $\mathrm{E} = 0$. Dabei geht Gleichung 13 über in

$$(\alpha - a) \cdot y + (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0$$

und daraus folgt

$$y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}$$

Diese Gleichung ist aber eine Specialität von Nr. 13, und somit kein singuläres Integral zu Nr. 12; übrigens stimmt sie mit Nr. 5 und 11 überein.

Vierter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte gemeinschaftlich haben, und

γ) deren zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührenden alle mit der Berührenden der gesuchten Curve parallel laufen;

so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. Gleichung I reducirt sich also jetzt auf

$$\delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y$$

Damit nun $\delta U = 0$ werde, so muss sein

$$15)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0$$

Der jetzt integrirende Factor ist $\frac{1}{(2x - a - \alpha)^2}$, und somit hat man letztere Gleichung in folgende umzuformen:

$$-\frac{(2x - a - \alpha) \cdot dy - 2y \cdot dx}{(2x - a - \alpha)^2} - \frac{(y_a + y_\alpha) \cdot dx}{(2x - a - \alpha)^2} = 0$$

Daraus gibt sich durch Integration

$$-\frac{y}{2x - a - \alpha} + \frac{y_a + y_\alpha}{2 \cdot (2x - a - \alpha)} + \mathrm{E} = 0$$

oder

$$16)\quad y = 2\mathrm{E} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot [y_a + y_\alpha - 2\mathrm{E} \cdot (a + \alpha)]$$

Erstens. Sind die Werthe von y_a und y_α gegeben, d. h. soll die gesuchte Grade durch die zwei festen Punkte (a, y_a) und (α, y_α) gehen; so geht Gleichung 16 bezüglich über in

$$17)\quad y_a = 2\mathrm{E} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot [y_a + y_\alpha - 2\mathrm{E} \cdot (a + \alpha)]$$

und in

$$18)\quad y_\alpha = 2\mathrm{E} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot [y_a + y_\alpha - 2\mathrm{E} \cdot (a + \alpha)]$$

und aus jeder dieser beiden Gleichungen folgt $\mathrm{E} = \frac{y_\alpha - y_a}{2 \cdot (\alpha - a)}$, so dass jetzt Gleichung 16 übergeht in

$$19)\quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot y_a - a \cdot y_\alpha}{\alpha - a}$$

Zweitens. Lässt man aber die gesuchte Grade durch die zwei festen Punkte (n, m) und (k, h) gehen, wobei also die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben sind; so geht Gleichung 16 bezüglich über in

$$20)\quad m = 2\mathrm{E} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot [y_a + y_\alpha - 2\mathrm{E} \cdot (a + \alpha)]$$

und

$$21)\quad h = 2\mathrm{E} \cdot k + \frac{1}{2} \cdot [y_a + y_\alpha - 2 \cdot \mathrm{E} \cdot (a + \alpha)]$$

Digitized by Google

Daraus folgt

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{m - h}{n - k}, \text{ und } y_a + y_\alpha = \frac{2nh - 2mk}{n - k} + \frac{m - h}{n - k} \cdot (a + \alpha)$$

und Gleichung 16 geht über in

$$22)\quad y = \frac{m - h}{n - k} \cdot x + \frac{nh - mk}{n - k}$$

aus welcher Gleichung sich gradezu die Werthe von y_a und y_α ergeben, wenn man bezüglich a oder α an die Stelle des x einsetzt.

Uebrigens ist unter allen Umständen $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$; und somit findet ein Minimum-stand statt.

Und dergleichen Fälle mehr.

(Diese Aufgabe, als solche, stammt von Hrn. Dr. Martin Ohm her. Was er darüber mitgetheilt hat, ist hier im ersten Falle aufgenommen. Der Inhalt des zweiten, dritten und vierten Falles ist von mir.)

Aufgabe 96.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende, und errichtet in zwei festen Punkten der Abscissenaxe Perpendikel. In diesen Perpendikeln liegen aber die zu besagten zwei festen Punkten gehörigen Ordinaten sowohl der Curve selbst als auch der Berührenden. Wenn man nun beidemal die zwischen der Ordinate der Curve selbst und zwischen der Ordinate der Berührenden stattfindende Differenz, und ferner noch die hierher gehörige Sehne der Curve nimmt; welche Curve ist es, die in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass das um das Quadrat dieser Sehne verminderte Product jener beiden Differenzen ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

(Fig. 1.) Hier soll $U = PR \cdot TQ - PQ^2$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Es ist aber $PQ^2 = (OK - OH)^2 + (KQ - HP)^2 = (\alpha - a)^2 + (y_\alpha - y_a)^2$; man hat also jetzt

$$U = [y + (a - x) \cdot p - y_a] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p - y_\alpha] - [(\alpha - a)^2 + (y_\alpha - y_a)^2]$$

Daraus folgt durch Mutiren

$$\text{I)}\quad \delta U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta y$$
$$+ [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x)(\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- [y + (\alpha - x) \cdot p + 2y_a - 3y_\alpha] \cdot \delta y_a - [y + (a - x) \cdot p + 2y_\alpha - 3y_a] \cdot \delta y_\alpha$$

und

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha] \cdot \delta^2 y$$
$$+ [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a] \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$- [y + (\alpha - x) \cdot p + 2y_a - 3y_\alpha] \cdot \delta^2 y_a - [y + (a - x) \cdot p + 2y_\alpha - 3y_a] \cdot \delta^2 y_\alpha$$
$$+ 2 \cdot \delta y^2 + 2(a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2(a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$
$$- 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_a - 2(\alpha - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a - 2 \cdot \delta y_a^2 - 2 \cdot \delta y \cdot \delta y_\alpha$$
$$- 2 \cdot (a - x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_\alpha + 6 \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha - 2 \cdot \delta y_\alpha^2$$

Erster Fall. Lässt man dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe; so müssen folgende vier Gleichungen zugleich stattfinden:

1) $2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p - y_a - y_\alpha = 0$
2) $(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x) \cdot p - (a - x) \cdot y_\alpha - (\alpha - x) \cdot y_a = 0$
3) $y + (\alpha - x) \cdot p + 2y_a - 3y_\alpha = 0$
4) $y + (a - x) \cdot p + 2y_\alpha - 3y_a = 0$

Digitized by Google

Addirt man Gleichung 3 und 4, so bekommt man Gleichung 1. Diesen vier Gleichungen wird aber gleichzeitig genügt, wenn

$$5)\quad y = B$$

d. h. wenn y constant ist. Man hat also jetzt die mit der Abscissenaxe parallele Grade, welche man noch zwingen kann, durch einen festen Punkt zu gehen. Ist aber (n, m) dieser feste Punkt, so ist $B = m$, d. h. es ist $y = m$ die Gleichung der gesuchten Linie. Weil y constant ist, so ist $y = y_a = y_\alpha = m$, und $p = 0$. Es ist also

$$6)\quad U = -(\alpha - a)^2$$

Gleichung II reducirt sich auf

$$\delta^2 U = 2\cdot\delta y^2 + 2\cdot(a+\alpha-2x)\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + 2\cdot(a-x)\cdot(\alpha-x)\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$
$$-2\cdot\delta y\cdot\delta y_a - 2\cdot(\alpha-x)\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta y_a - 2\cdot\delta y_a^2 - 2\cdot\delta y\cdot\delta y_\alpha$$
$$-2(a-x)\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta y_\alpha + 6\cdot\delta y_a\cdot\delta y_\alpha - 2\cdot\delta y_\alpha^2$$

Dieser Ausdruck kann aber (man sehe §. 13) nicht beständig einerlei Zeichen behalten; und somit findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern bei denen auch

β) der Unterschied der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten denselben Werth bekommt, wie der Unterschied der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten der gesuchten Curve;

so muss jetzt zwischen der gesuchten Curve und allen in Betracht zu ziehenden Nachbarcurven folgende Gleichung bestehen:

$$y_\alpha - y_a = \left(y_\alpha + \varkappa\cdot\delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_\alpha + \ldots\right) - \left(y_a + \varkappa\cdot\delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_a \ldots\ldots\right)$$

Da aber diese Gleichung bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten soll, so muss einzeln stattfinden $\delta y_\alpha = \delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = \delta^2 y_a$ etc. Wenn man nun δy_α als abhängig aus Gleichung I eliminirt, so ergibt sich

$$\delta U = [2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha]\cdot\delta y$$
$$+ [(a+\alpha-2x)\cdot y + 2(a-x)(\alpha-x)\cdot p - (a-x)\cdot y_\alpha - (\alpha-x)\cdot y_a]\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$-[2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha]\cdot\delta y_a$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$7)\quad 2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha = 0$$
$$8)\quad (a+\alpha-2x)\cdot y + 2(a-x)\cdot(\alpha-x)\cdot p - (a-x)\cdot y_\alpha - (\alpha-x)\cdot y_a = 0$$
$$9)\quad 2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha = 0$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen sind einander ganz gleich. Wenn man p aus 7 und 8 eliminirt, so bekommt man

$$10)\quad y = \frac{y_\alpha - y_a}{\alpha - a}\cdot x + \frac{\alpha\cdot y_a - a\cdot y_\alpha}{\alpha - a} = A\cdot x + B$$

welches die Gleichung einer graden Linie ist, und den Gleichungen 7, 8 und 9 zugleich genügt. Da aber y_a und y_α ganz unbestimmt sind; so kann man der Aufgabe selbst, damit sie eine bestimmte Auflösung habe, noch zwei Bedingungen zufügen, z. B. dass die gesuchte Linie durch irgend zwei gegebene Punkte gehe, oder dass sie nur durch einen gegebenen Punkt gehe, und dass zugleich die Differenz $y_\alpha - y_a = K$ einen gegebenen Werth habe, etc.

Gleichung II geht nun über in

Digitized by Google

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (a + \alpha - 2x) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot (a - x)(\alpha - x) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$- 4 \cdot \delta y \cdot \delta y_a - 2(a + \alpha - 2x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y_a + 2 \cdot \delta y_a^2$$

Untersucht man diesen Ausdruck nach §. 12, so wird man erkennen, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern bei denen auch

β) das von der Abscissendifferenz $(\alpha - a)$, von den beiden zugehörigen Gränzordinaten und von der zugehörigen Sehne begränzte Trapez den gleichen Inhalt bekommt, wie das auf die nemliche Weise begränzte Trapez der gesuchten Curve;

so muss jetzt zwischen der gesuchten Curve und allen in Betracht zu ziehenden Nachbarcurven folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{2} \cdot (\alpha - a) \cdot (y_a + y_\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\alpha - a) \cdot \left[\left(y_a + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \ldots\ldots\right) + \left(y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \ldots\ldots\right)\right]$$

Daraus folgt $\delta y_\alpha = -\delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = -\delta^2 y_a$, etc. etc.

Und dergleichen Fälle mehr.

(Diese Aufgabe, als solche, stammt von Hrn. Dr. Martin Ohm her. Was er darüber mitgetheilt hat, ist hier im ersten Falle aufgenommen. Der Inhalt des zweiten und dritten Falles ist von mir.)

Aufgabe 97.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührende. Von zwei zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten der gesuchten Curve fällt man Perpendikel auf diese Berührende. Welche Curve hat aber in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass das Product beider Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

Die Gleichung irgend einer graden Linie sei

$$\text{I)} \quad \mathfrak{A} \cdot x' + \mathfrak{B} \cdot y' + \mathfrak{C} = 0$$

so ist bekanntlich die senkrechte Entfernung eines Punktes (a, b) von dieser Linie gegeben durch

$$\text{II)} \quad \frac{\mathfrak{A} \cdot a + \mathfrak{B} \cdot b + \mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}$$

Die nach Belieben gewählte Abscisse (fig. 12) sei $OQ = x$, und die zugehörige Berührende sei SV; so ist deren Gleichung bekanntlich $y' - y = (x' - x) \cdot p$, oder

$$\text{III)} \quad p \cdot x' - y' + y - p \cdot x = 0$$

Die erste feste Abscisse sei $OP = a$, so ist $Ps = y_a$; und die Länge des von s auf SV gefällten Perpendikels gibt sich nach Formel II, d. h. es ist

$$\text{IV)} \quad sS = \frac{a \cdot p - y_a + y - px}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{(a - x) \cdot p - y_a + y}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Die zweite feste Abscisse sei $OR = \alpha$, so ist $Rv = y_\alpha$; und für die Länge des Perpendikels vV gibt sich auf ähnliche Weise

$$\text{V)} \quad vV = \frac{(\alpha - x) \cdot p - y_\alpha + y}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Digitized by Google

Das hier in Rede stehende Product ist also:

$$\text{VI)}\quad U = \frac{((a-x)\cdot p - y_a + y)\cdot((\alpha - x)\cdot p - y_\alpha + y)}{1+p^2}$$

Unter den verschiedenen Fällen, welche auch bei dieser Aufgabe aufgestellt werden können, soll nur derjenige besonders untersucht werden, wo dieselbe Einschränkung gilt, wie beim dritten Falle der 95sten Aufgabe. Verfahrt man hier wie dort; so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U = \frac{1}{(1+p^2)^2}\cdot[(2\cdot(a-x)(\alpha-x)\cdot p + (a+\alpha-2x)\cdot y - (a-x)\cdot y_\alpha$$
$$-(\alpha-x)\cdot y_a)\cdot(1+p^2) - 2p\cdot((a-x)\cdot p - y_a + y)\cdot((\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y)]\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\text{VIII)}\quad (2\cdot(a-x)\cdot(\alpha-x)\cdot p + (a+\alpha-2x)\cdot y - (a-x)\cdot y_\alpha - (\alpha-x)\cdot y_a)\cdot(1+p^2)$$
$$-2p\cdot((a-x)\cdot p - y_a + y)\cdot((\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y) = 0$$

Um diese Gleichung zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{dp}{(1+p^2)^2}$; und es ist

$$\frac{\left\{\begin{matrix}[2(a-x)(\alpha-x)p + (a+\alpha-2x)y - (a-x)y_\alpha - (\alpha-x)y_a](1+p^2)\cdot dp \\ -2p\cdot[(a-x)p - y_a + y]\cdot[(\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y]\cdot dp\end{matrix}\right\}}{(1+p^2)^2} = 0$$

Da $dy = p\cdot dx$, so ist folgender Ausdruck

$$[2y + (a+\alpha-2x)p - y_a - y_\alpha](1+p^2)\cdot dy$$
$$-[2y + (a+\alpha-2x)p - y_a - y_\alpha](1+p^2)p\cdot dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung, und man kann ihn zum Zähler des letzten Bruches addiren, ohne dass er sich ändert. Es ist also auch vollkommen genau

$$\frac{\left\{\begin{matrix}[2(a-x)(\alpha-x)p + (a+\alpha-2x)y - (a-x)y_\alpha - (\alpha-x)y_a](1+p^2)\cdot dp \\ -2p[(a-x)\cdot p - y_a + y]\cdot[(\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y]\cdot dp \\ +[2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha]\cdot(1+p^2)\cdot dy \\ -[2y + (a+\alpha-2x)\cdot p - y_a - y_\alpha]\cdot(1+p^2)\cdot p\cdot dx\end{matrix}\right\}}{(1+p^2)^2} = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$\text{IX)}\quad \frac{[(a-x)\cdot p - y_a + y]\cdot[(\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y]}{1+p^2} = A$$

oder

$$\text{X)}\quad [(a-x)\cdot p - y_a + y]\cdot[(\alpha-x)\cdot p - y_\alpha + y] = A\cdot(1+p^2)$$

Setzt man nun $A\cdot(1+p^2)$ statt des gleichbedeutenden Ausdruckes in Gleichung VIII ein, so bekommt man

$$[2(a-x)(\alpha-x)\cdot p + (a+\alpha-2x)\cdot y - (a-x)\cdot y_\alpha - (\alpha-x)\cdot y_a]\cdot(1+p^2)$$
$$-2A\cdot p\cdot(1+p^2) = 0$$

oder

$$2[(a-x)(\alpha-x) - A]\cdot p + (a+\alpha-2x)\cdot y - (a-x)\cdot y_\alpha - (\alpha-x)\cdot y_a = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{1}{2\cdot[(a-x)(\alpha-x)-A]^{\frac{3}{2}}}$

Dadurch geht letztere Gleichung zunächst über in

$$\frac{2\cdot[(a-x)(\alpha-x) - A]\cdot dy - (2x - a - \alpha)\cdot y\cdot dx}{2\cdot[(a-x)(\alpha-x) - A]^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\frac{[(a-x)\cdot y_\alpha + (\alpha-x)\cdot y_a]\cdot dx}{2\cdot[(a-x)\cdot(\alpha-x) - A]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und es gibt sich

$$\frac{y}{\sqrt{(a-x)(\alpha-x)-A}}+\frac{(\alpha-a)\cdot[(a-x)\cdot y_\alpha-(\alpha-x)\cdot y_a]-2A\cdot(y_a+y_\alpha)}{[4A+(\alpha-a)^2]\cdot\sqrt{(a-x)(\alpha-x)-A}}=B$$

oder

$$\text{XI)}\quad [4A+(\alpha-a)^2]\cdot y+(\alpha-a)\cdot[(a-x)\cdot y_\alpha-(\alpha-x)\cdot y_a]-2A\cdot(y_a+y_\alpha) = [4A+(\alpha-a)^2]\cdot B\cdot\sqrt{(a-x)(\alpha-x)-A}$$

Dieses soll die Integralgleichung zu Gleichung VIII sein. Da aber Gleichung VIII nur eine Differentialgleichung der ersten Ordnung ist, so ist in Gleichung XI ein Constanter zuviel eingegangen. Man stelle also aus Gleichung XI für y und für p die Ausdrücke her, substituire sie in VIII, und bestimme dann A durch B, oder B durch A, je nachdem das eine oder das andere am bequemsten ist. (In dieser Hinsicht vergleiche man Aufgabe 73 oder 74.)

Sind die Werthe von y_a und y_α nicht gegeben, so kann man die hier gefundene Curve noch drei Bedingungen unterwerfen, weil ausser y_a und y_α auch noch einer der Constanten A oder B zu bestimmen ist.

Sind aber die Werthe von y_a und y_α gegeben, so kann man die hier gefundene Curve nur einer einzigen Bedingung unterwerfen.

(Man vergleiche den dritten Fall der 95sten Aufgabe.)

Wie man noch andere Fälle dieser Aufgabe hervorheben kann, ist bekannt.

Aufgabe 98.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten sowie auch in dem zu einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkte berührt. Diese drei berührenden Graden schliesen ein Dreieck ein. Wenn nun die gesuchte Curve in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass besagtes Dreieck ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; welche Curve ist die gesuchte?

Die gesuchte Curve (fig. 13) sei MVN, die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Belieben gewählte Abscisse x sei OR. Die drei in Rede stehenden Berührenden sind also MT, NT und KH. Das auf vorgeschriebene Weise begränzte Dreieck ist KHT. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez GKTL} + \text{Trapez TLFH} - \text{Trapez GKHF}$$

oder

$$U=\frac{1}{2}\cdot(GK+TL)\cdot(OL-OG)+\frac{1}{2}(TL+HF)\cdot(OF-OL) -\frac{1}{2}\cdot(GK+HF)\cdot(OF-OG).$$

oder

$$\text{I)}\quad U=\frac{1}{2}\cdot[GK\cdot(OL-OF)+TL\cdot(OF-OG)+HF\cdot(OG-OL)]$$

Ist nun OR = x und RV = y, so ist die Gleichung der in V berührenden Graden bekanntlich $y'-y=(x'-x)\cdot\frac{dy}{dx}$, oder

$$\text{II)}\quad y'=\frac{dy}{dx}\cdot x'+y-\frac{dy}{dx}\cdot x$$

Ist OP = a und PM = y_a, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden

$$\text{III)}\quad y''=\left(\frac{dy}{dx}\right)_a\cdot x''+y_a-\left(\frac{dy}{dx}\right)_a\cdot a$$

Ist ferner OQ = α und QN = y_α, so ist die Gleichnng der in N berührenden Graden

$$\text{IV)}\quad y'''=\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot x'''+y_\alpha-\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot\alpha$$

Digitized by Google

Da, wo die Berührenden KH und MT einander schneiden, ist $x' = x''$, und $y' = y''$; und aus den Gleichungen II und III folgt

$$\text{V)}\quad OG = x' = x'' = \frac{x \cdot p - a \cdot p_a - y + y_a}{p - p_a}$$

$$\text{VI)}\quad GK = y' = y'' = \frac{(x - a) \cdot p \cdot p_a + y_a \cdot p - y \cdot p_a}{p - p_a}$$

Da, wo die Berührenden NT und KH einander schneiden, ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$; und aus den Gleichungen II und IV folgt

$$\text{VII)}\quad OF = x' = x''' = \frac{x \cdot p - \alpha \cdot p_\alpha - y + y_\alpha}{p - p_\alpha}$$

$$\text{VIII)}\quad FH = y' = y''' = \frac{(x - \alpha) \cdot p \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p - y \cdot p_\alpha}{p - p_\alpha}$$

Da, wo die Berührenden MT und NT einander schneiden, ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus den Gleichungen III und IV folgt

$$\text{IX)}\quad OL = x'' = x''' = \frac{a \cdot p_a - \alpha \cdot p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

$$\text{X)}\quad LT = y'' = y''' = \frac{(a - \alpha) \cdot p_a \cdot p_\alpha + y_\alpha \cdot p_a - y_a \cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

Diese für OG, OF, OL, GK, LT und FH gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I einzuführen, und dann weiter zu verfahren, wie bekannt.

Aufgabe 99.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Sie wird in den zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten berührt. Von dem zu einer nach Willkür genommenen Abscisse x gehörigen Punkte besagter Curve fällt man Perpendikel auf die beiden Berührenden. Die beiden Perpendikel und die beiden Berührenden schliessen ein Viereck ein, durch dessen vier Ecke, weil die zwei entgegengesetzten Winkel jedesmal zusammen zwei Rechte betragen, man einen Kreis legen kann. Wenn nun die gesuchte Curve in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass besagtes Viereck ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; welche Curve ist die gesuchte?

Die gesuchte Curve (fig. 14) sei MVN, die festen Abscissen a und α seien OP und OQ, und die nach Willkür gewählte Abscisse x sei OR. Die zwei in Rede stehenden Berührenden sind MT und NT; der zur Abscisse x gehörige Punkt der Curve ist V; die zwei in Rede stehenden Perpendikel sind also VW und VS. Das auf vorgeschriebene Weise erzeugte Viereck ist also VWTS. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez WKLT} + \text{Trapez LTSH} - \text{Trapez VWKR} - \text{Trapez VSHR}$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \cdot (WK + TL) \cdot (OL - OK) + \frac{1}{2} \cdot (TL + SH) \cdot (OH - OL)$$
$$- \frac{1}{2} \cdot (WK + VR) \cdot (OR - OK) - \frac{1}{2} \cdot (VR + SH) \cdot (OH - OR)$$

oder

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot [(WK - SH) \cdot (OL - OR) + (VR - TL) \cdot (OK - OH)]$$

Ist $OP = a$ und $PM = y_a$, so ist die Gleichung der in M berührenden Graden MT

$$\text{II)}\quad y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot x' + y_a - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot a$$

Digitized by Google

Da nun OR = x und RV = y, so ist die Gleichung der durch den Punkt V gehenden und auf MT senkrechten Graden VW folgende:

$$\text{III)}\quad y'' = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_a}\cdot x'' + y + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_a}\cdot x$$

Ist OQ = α und QN = y_α, so ist die Gleichung der in N berührenden Graden NT

$$\text{IV)}\quad y''' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot x''' + y_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot\alpha$$

und die Gleichung der durch V gehenden und auf NT senkrechten Graden VS ist folgende:

$$\text{V)}\quad y'''' = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha}\cdot x'''' + y + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha}\cdot x$$

Da, wo die Linien MT und VW einander schneiden, ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus den Gleichungen II und III folgt

$$\text{VI)}\quad OK = x' = x'' = \frac{a\cdot p_a^2 + x + (y - y_a)\cdot p_a}{1 + p_a^2}$$

$$\text{VII)}\quad KW = y' = y'' = \frac{(x - a)\cdot p_a + y_a + y\cdot p_a^2}{1 + p_a^2}$$

Da, wo die Linien NT und VS einander schneiden, ist $x''' = x''''$ und $y''' = y''''$ und aus den Gleichungen IV und V folgt

$$\text{VIII)}\quad OH = x''' = x'''' = \frac{\alpha\cdot p_\alpha^2 + x + (y - y_\alpha)\cdot p_\alpha}{1 + p_\alpha^2}$$

$$\text{IX)}\quad HS = y''' = y'''' = \frac{(x - \alpha)\cdot p_\alpha + y_\alpha + y\cdot p_\alpha^2}{1 + p_\alpha^2}$$

Da, wo die Berührenden MT und NT einander schneiden, ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$; und aus den Gleichungen II und IV folgt

$$\text{X)}\quad OL = x' = x''' = \frac{a\cdot p_a - \alpha\cdot p_\alpha - y_a + y_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

$$\text{XI)}\quad LT = y' = y''' = \frac{(a - \alpha)\cdot p_a\cdot p_\alpha + y_\alpha\cdot p_a - y_a\cdot p_\alpha}{p_a - p_\alpha}$$

Da, wo die Linien VW und VS einander schneiden, ist $x'' = x''''$ und $y'' = y''''$; und aus den Gleichungen III und V folgt

$$\text{XII)}\quad OR = x'' = x'''' = x$$

$$\text{XIII)}\quad RV = y'' = y'''' = y$$

Diese für OK, OR, OL, OH, KW, RV, LT und HS gefundenen Ausdrücke hat man jetzt in Gleichung I einzuführen, und dann weiter zu verfahren, wie bekannt ist.

Aufgabe 100.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Man legt in die zu zwei festen Abscissen gehörigen Punkte die Krümmungskreise, und zieht durch deren Mittelpunkte zwei miteinander parallele Graden. Man legt aber auch in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt der gesuchten Curve den Krümmungskreis, und fällt von dessen Mittelpunkt Perpendikel auf die beiden obgenannten parallelen Graden. Beide Perpendikel fallen aber ganz ineinander, und unterscheiden sich nur durch ihre Grösse. Wenn nun die gesuchte Curve in

Digitized by Google

ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, das das Product der beiden in Rede stehenden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; welche Curve ist die gesuchte?

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, wenn man (fig. 15) die Coordinaten der gesuchten Curve so annimmt, dass die Abscissenaxe parallel wird mit den (durch die zu den festen Abscissen gehörigen Krümmungsmittelpunkte gezogenen) zwei parallelen Graden. Der zur ersten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei K, und der zur zweiten festen Abscisse gehörige Krümmungsmittelpunkt sei G. Die in der Aufgabe besagten parallelen Graden sind also EF und BC. Man gebe nun der Abscissenaxe die Lage OX parallel mit BC, und der Ordinatenaxe die Lage OY senkrecht auf OX. Der ersten festen Abscisse entspreche der Punkt P, und der zweiten festen Abscisse entspreche der Punkt R. Die nach Willkür genommene Abscisse sei OQ, und der dazu gehörige Krümmungsmittelpunkt sei H. Die in der Aufgabe besagten zwei in eine einzige Grade fallenden Perpendikel sind also HJ und HL; und das in Rede stehende Product ist

$$\text{I)}\quad U = HL \cdot HJ$$

oder

$$\text{II)}\quad U = (WK - MH) \cdot (NG - MH)$$

Setzt man OQ = x und QT = y, so ist $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; setzt man OP = a, so ist $WK = y_a + \frac{1+p_a^2}{q_a}$; und setzt man $OR = \alpha$, so ist $NG = y_\alpha + \frac{1+p_\alpha^2}{q_\alpha}$. Gleichung II geht also über in

$$\text{III)}\quad U = \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right] \cdot \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right]$$

Mutirt man nun, so gibt sich

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right] \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a$$
$$+ \left[\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)\right] \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha$$
$$+ \left[2y + \frac{2\cdot(1+p^2)}{q} - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha\right] \cdot \left(\delta y + \frac{2p}{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q^2} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Soll nun die gesuchte Curve aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, so müssen folgende drei Gleichungen

$$\text{V)}\quad \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right) = 0$$

$$\text{VI)}\quad \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right) = 0$$

$$\text{VII)}\quad 2y + \frac{2\cdot(1+p^2)}{q} - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a - \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha = 0$$

gleichzeitig nebeneinander bestehen; dieses ist aber nur möglich, wenn

$$\text{VIII)}\quad \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a = \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha$$

stattfindet. Man setze zur Abkürzung g anstatt $\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_a$ und anstatt $\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha$; so geht jede der drei obigen Gleichungen über in

$$\text{IX)}\quad y + \frac{1+p^2}{q} = g$$

Digitized by Google

Daraus folgt $\frac{q}{1+p^2} + \frac{1}{y-g} = 0$; und wenn man auf beiden Seiten mit $p = \frac{dy}{dx}$ multiplicirt, so bekommt man $\frac{p \cdot dp}{1+p^2} + \frac{dy}{y-g} = 0$; daraus folgt $(y-g) \cdot \sqrt{1+p^2} = h$, und daraus folgt weiter $dx = \frac{(y-g) \cdot dy}{\sqrt{h^2-(y-g)^2}}$. Integrirt man abermals, so gibt sich $x + k = -\sqrt{h^2-(y-g)^2}$, oder

$$\text{X)} \quad (y-g)^2 + (x+k)^2 = h^2$$

Der Kreis ist also die gesuchte Curve, welcher insoferne die Aufgabe löst, als er in jedem seiner Punkte auch sein eigener Krümmungskreis ist. Bei Bestimmung der Constanten muss aber Gleichung VIII mitbenützt werden. Allein Gleichung VIII geht über in $g = g$, woraus nichts gefolgert werden kann; und sonach erkennt man, dass die gesuchte Curve noch drei verschiedenen Nebenbedingungen unterworfen werden kann.

Da die hier gesuchte Curve ein Kreis ist, so fallen alle Krümmungsmittelpunkte derselben in einen einzigen Punkt zusammen. Es fallen also die drei Punkte K, H und G in einen einzigen Punkt, und die zwei Linien BC und EF in eine einzige Linie zusammen. Es ist also $U' = 0$ unabhängig von den zwei festen Werthen a und α, und unabhängig von dem willkürlichen Werthe des x.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 101.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve, und legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die zu den Abscissen a und α gehörigen Krümmungsmittelpunkte mit dem zu der Abscisse x gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Wenn nun die gesuchte Curve in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; welche Curve ist die gesuchte?

Es seien (fig. 16) die festen Abscissen $OP = a$ und $OR = \alpha$; und die nach Willkür genommene Abscisse sei $OQ = x$. Der zu $OP = a$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist K, der zu $OR = \alpha$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist G, und der zu $OQ = x$ gehörige Krümmungsmittelpunkt ist H. Die beiden Verbindungslinien sind KH und GH. Die Aufgabe verlangt also: es soll

$$\text{I)} \quad U = KH^2 + GH^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Statt I kann man auch setzen

$$\text{II)} \quad U = [(HM - KW)^2 + (OM - OW)^2] + [(HM - GN)^2 + (ON - OM)^2]$$

oder

$$\text{III)} \quad U = OW^2 + 2 \cdot OM^2 + ON^2 + KW^2 + 2 \cdot HM^2 + GN^2 \\ - 2 \cdot OM \cdot (OW + ON) - 2 \cdot HM \cdot (KW + GN)$$

Hier ist $OM = x - \frac{(1+p^2) \cdot p}{q}$, und $MH = y + \frac{1+p^2}{q}$; ferner $OW = a - \frac{(1+p_a^2) \cdot p_a}{q_a}$ und $WK = y_a + \frac{1+p_a^2}{q_a}$; und ebenso ist $ON = \alpha - \frac{(1+p_\alpha^2) \cdot p_\alpha}{q_\alpha}$, und $NG = y_\alpha + \frac{1+p_\alpha^2}{q_\alpha}$.

Diese Ausdrücke hat man in III einzusetzen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

Digitized by Google

Aufgabe 102.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. Man legt in die zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkte die Krümmungskreise. Man legt aber auch in den zu der nach Willkür gewählten Abscisse x gehörigen Punkt den Krümmungskreis. Man verbindet die drei Krümmungsmittelpunkte miteinander. Dadurch entsteht ein Dreieck. Wenn nun die gesuchte Curve in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass des besagten Dreiecks Inhalt ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; welche Curve ist die gesuchte?

Hier soll (fig. 16)

$$\text{I)}\quad U = \text{Dreieck } KHG$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Statt I kann man auch setzen

$$\text{II)}\quad U = \text{Trapez } WKHM + \text{Trapez } HMNG - \text{Trapez } KWNG$$

oder

$$U = \frac{1}{2}(KW + HM)\cdot(OM - OW) + \frac{1}{2}\cdot(HM + GN)\cdot(ON - OM)$$
$$- \frac{1}{2}\cdot(KW + GN)\cdot(ON - OW)$$

oder

$$\text{III)}\quad U = \frac{1}{2}\cdot[KW\cdot(OM - ON) + HM\cdot(ON - OW) + GN\cdot(OW - OM)]$$

Hier hat man die schon in voriger Aufgabe für OW, WK, OM, MH, ON, NG aufgestellten Ausdrücke einzuführen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

B) Aufgaben, wo zwei gleichzeitig bestehende Functionen mit einem und demselben absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht werden.

Aufgabe 103.

Man soll für y und z solche Functionen von x suchen, welche bei jedem Werthe des x die Eigenschaft haben, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = a^2 - y^2 - z^2 + xz\cdot\frac{dy}{dx} + xy\cdot\frac{dz}{dx} - b^2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - c^2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Mutirt man, und setzt dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = (-2y + \mathfrak{p}x)\cdot\delta y + (-2z + px)\cdot\delta z + (xz - 2b^2\cdot p)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ (xy - 2c^2\cdot\mathfrak{p})\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = (-2y + \mathfrak{p}x)\cdot\delta^2 y + (-2z + px)\cdot\delta^2 z + (xz - 2b^2\cdot p)\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ (xy - 2c^2\cdot\mathfrak{p})\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx} - 2\cdot\delta y^2 - 2\cdot\delta z^2 + 2x\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ 2x\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta z}{dx} - 2b^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2c^2\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man für y und z solche Functionen, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den gegebenen Ausdruck grösser oder kleiner machen, als ihn bei demselben Werthe des x alle möglichen, den gesuchten Functionen stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so sind δy und δz sowohl der Form als auch dem Werthe nach voneinander unabhängig. Ein Gleiches gilt

Digitized by Google

zwischen $\frac{d\delta y}{dx}$ und zwischen $\frac{d\delta z}{dx}$. Dem Werthe nach sind aber auch δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ voneinander unabhängig, wenn gleich mit der Form des δy auch die Form des $\frac{d\delta y}{dx}$ mitgegeben ist. Ein Gleiches gilt zwischen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$. (Man sehe §. 91, etc.) Es müssen also jetzt, damit $\delta U = 0$ werden kann, die vier identischen Gleichungen

$$1)\quad -2y + \mathfrak{p}x = 0,\qquad 2)\quad -2z + px = 0$$
$$3)\quad xz - 2b^2 \cdot p = 0,\qquad 4)\quad xy - 2c^2 \cdot \mathfrak{p} = 0$$

gleichzeitig bestehen. Eliminirt man $\mathfrak{p}$ aus 1 und 4, so bekommt man

$$5)\quad y \cdot (4c^2 - x^2) = 0$$

Eliminirt man ferner p aus 3 und 2, so bekommt man

$$6)\quad z \cdot (4b^2 - x^2) = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber $y = 0$ und $z = 0$, d. h. y und z sind identische Functionen von x; und da dadurch die Gleichungen 1, 2, 3, 4 zugleich erfüllt werden, so ist nur noch zu untersuchen, ob dabei $\delta^2 U$ beständig einerlei Zeichen behält oder nicht. Gleichung III reducirt sich aber jetzt auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2 + 2x \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} - 2b^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2c^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Untersucht man aber diesen Ausdruck (nach Anleitung der §§. 11, 12, 13), so erkennt man, dass er nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten kann; es findet also weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Sucht man für y und z nur diejenigen Functionen, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner machen, als er gemacht werden kann, wenn man

1) an die Stelle des y diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   β) bei dem grade gewählten Werthe des x denselben Werth bekommen, wie die für y gesuchte Function; und wenn man
2) an die Stelle des z diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   β) bei dem grade gewählten Werthe des x denselben Werth bekommen, wie die für z gesuchte Function;

so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc. Gleichung II reducirt sich also auf

$$\text{IV)}\quad \delta U = (x \cdot z - 2b^2 \cdot p) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (x \cdot y - 2c^2 \cdot \mathfrak{p}) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Da nun $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d\delta z}{dx}$ sowohl dem Werthe nach als auch der Form nach voneinander ganz unabhängig sind; so kann nur $\delta U = 0$ werden, wenn die zwei identischen Gleichungen

$$7)\quad xz - 2b^2 \cdot p = 0, \text{ und } 8)\quad xy - 2c^2 \cdot \mathfrak{p} = 0$$

bestehen. Eliminirt man x aus diesen beiden Gleichungen, so gibt sich

$$2z \cdot \mathfrak{p} = \frac{2 \cdot b^2}{c^2} \cdot y \cdot p$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$9)\quad z^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot y^2 + A$$

oder mit Aenderung des Constanten A in $\frac{b^2}{c^2} \cdot B$

$$10)\quad z^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot (y^2 + B)$$

Daraus folgt $z = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{y^2 + B}$; und Gleichung 7 geht über in $\frac{2 \cdot b \cdot c \cdot dy}{\sqrt{y^2 + B}} = x \cdot dx$. Man integrire, so bekommt man

$$2bc \cdot \lg \text{nat} \left(y + \sqrt{y^2 + B}\right) + C = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

oder

$$11)\quad 4bc \cdot \lg \text{nat} \left(y + \sqrt{y^2 + B}\right) + 2C = x^2$$

Wenn man hier den Constanten C in $2bc \cdot \lg \text{nat} \frac{1}{m}$ verändert, so geht Gleichung 14 über in

$$12)\quad 4bc \cdot \lg \text{nat} \frac{y + \sqrt{y^2 + B}}{m} = x^2$$

Daraus folgt $y + \sqrt{y^2 + B} = m \cdot e^{\frac{x^2}{4bc}}$; und wenn man y auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens bringt, und beiderseits auf das Quadrat erhebt, so bekommt man zuletzt

$$13)\quad y = \frac{m}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{4bc}} - \frac{B}{2m} \cdot e^{-\frac{x^2}{4bc}}$$

Eliminirt man y aus 10, so bekommt man

$$14)\quad z = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot e^{\frac{x^2}{4bc}} - \frac{B}{2m} \cdot e^{-\frac{x^2}{4bc}}\right)$$

In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung III auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot b^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

welcher Ausdruck unter allen Umständen negativ bleibt. Es findet also ein Maximumstand statt.

D r i t t e r F a l l Sucht man für y und z nur diejenigen Functionen, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner machen, als er gemacht werden kann, wenn man

1) an die Stelle des y diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   - α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   - β) bei dem grade genommenen Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient den gleichen Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der für y gesuchten Function bekommt; und wenn man
2) an die Stelle des z diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   - α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   - β) bei dem grade genommenen Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient den gleichen Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der für z gesuchten Function bekommt;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$V)\quad \delta U = (-2y + px) \cdot \delta y + (-2z + px) \cdot \delta z$$

Da nun δy und δz sowohl dem Werthe nach als auch der Form nach voneinander unabhängig sind, so kann nur $\delta U = 0$ werden, wenn die zwei identischen Gleichungen

$$15)\quad -2y + px = 0, \text{ und } 16)\quad -2z + px = 0$$

stattfinden. Eliminirt man x aus diesen beiden Gleichungen, so gibt sich $2z \cdot p = 2y \cdot p$; und wenn man integrirt, so bekommt man

$$17)\quad z^2 = y^2 + C$$

Daraus folgt $z = \sqrt{y^2 + C}$; und Gleichung 16 geht über in $\frac{dy}{\sqrt{y^2 + C}} = \frac{2 \cdot dx}{x}$. Man integrire, so bekommt man

$$18)\quad \lg \text{nat} \left(y + \sqrt{y^2 + C}\right) = E + \lg \text{nat}\, x^2$$

Wenn man hier den Constanten E in $\lg \text{nat} \frac{1}{n}$ umändert; so bekommt man

Digitized by Google

$$19)\quad \lg\text{ nat}\,(y + \sqrt{y^2 + C}) = \lg\text{ nat}\,\frac{x^2}{n}$$

Daraus folgt gradezu

$$20)\quad y + \sqrt{y^2 + C} = \frac{x^2}{n}$$

Man bringe y auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, und erhebe beiderseits aufs Quadrat; so bekommt man

$$21)\quad y = \frac{x^2}{2 \cdot n} - \frac{n \cdot C}{2 \cdot x^2}$$

Eliminirt man jetzt y aus 17, so bekommt man

$$22)\quad z = \frac{x^2}{2 \cdot n} + \frac{n \cdot C}{2 \cdot x^2}$$

Gleichung III reducirt sich jetzt in Folge alles Vorhergehenden auf

$$23)\quad \delta^2 U = -2 \cdot (\delta y^2 + \delta z^2)$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen negativ; also findet ein Maximum-stand statt.

Vierter Fall. Sucht man für y und z nur diejenigen Functionen, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner machen, als er gemacht werden kann, wenn man

1) an die Stelle des y diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   β) bei dem grade genommenen Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth geben, welchen der erste Differentialquotient der für y gesuchten Function bekommt; und wenn man
2) an die Stelle des z diejenigen Functionen setzt, welche nicht nur
   α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
   β) bei dem grade gewählten Werthe des x den gleichen Werth bekommen, wie die für z gesuchte Function;

so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\delta z = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc. Gleichung I reducirt sich also auf

$$\text{VI)}\quad \delta U = (-2y + \mathfrak{p} \cdot x) \cdot \delta y + (xy - 2 \cdot c^2 \cdot \mathfrak{p}) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, müssen die zwei identischen Gleichungen

$$25)\quad -2y + \mathfrak{p} \cdot x = 0, \text{ und } 26)\quad xy - 2 \cdot c^2 \cdot \mathfrak{p} = 0$$

stattfinden. Eliminirt man $\mathfrak{p}$ aus beiden Gleichungen, so bekommt man

$$27)\quad y \cdot (4c^2 - x^2) = 0$$

Daraus folgt aber nur $y = 0$, d. h. y muss eine identische Function sein. In Folge der Gleichung $y = 0$ reduciren sich die Gleichungen 25 und 26 auf $\mathfrak{p} = 0$, und daraus folgt $z = K$, d. h. z ist constant. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung III auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2 + 2x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} - 2c^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Dieser Ausdruck ist aber nur so lange negativ, als $(4c^2 - x^2)$ positiv oder Null ist, d. h. für alle von $(-2c)$ bis $(+2c)$ erstreckten Werthe des x. Und für alle diese Werthe des x findet ein Maximum-stand statt.

Aufgabe 104.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man diese mit zwei

Digitized by Google

in festen Punkten einer gegebenen Graden senkrechten Ebenen begränzt, die so begränzte Berührungslinie ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als die zu derselben Abscisse x gehörigen und von denselben zwei festen Ebenen begränzten Berührungslinien aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven.

Die gegebene Grade (fig. 17) sei OX. Man lege die beiden sich rechtwinkelig schneidenden Coordinatenebenen XY und XZ in die Linie OX, so wird OX die Abscissenaxe. Nun nehme man einen beliebigen Punkt O in derselben an, und lege hierein die auf OX senkrechte Coordinatenebene YZ. Der willkürlich gewählte Berührungspunkt S habe die Projectionen s und s', und seine Abscisse sei Og = x. Die gesuchte Curve PSQ habe die Projectionen psq und p's'q'. Die in S berührende Grade RST habe die Projectionen rst und r's't'. Die beiden auf der gegebenen Graden OX senkrechten Ebenen, von welchen die Berührende RST begränzt wird, seien gegeben durch ihre Spuren M'M und N'N; und deren feste Abscissen seien Oh = a und Ok = α. Die Länge der auf vorgeschriebene Weise begränzten Berührungslinien ist also

$$\text{I)}\quad RST = \sqrt{hk^2 + (kt - hr)^2 + (k't' - h'r')^2}$$

Die Gleichungen für die Projectionen einer berührenden Graden sind bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ und } z' - z = (x' - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

oder

$$y' = y + (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ und } z' = z + (x' - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

Hier sind x', y', z' die veränderlichen Coordinaten der Berührenden, dagegen x, y, z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in welchem man grade die Berührung wählt. Für die bestimmten Punkte h', k', h, k ist bezüglich

$$h'r' = y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx},\quad k't' = y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$hr = z + (a - x) \cdot \frac{dz}{dx},\quad kt = z + (\alpha - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

Man bekommt also für die Länge RST durch gehörige Substitution in I

$$\text{II)}\quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Weil die Abscissendifferenz (α — a) positiv ist, so ist auch das ganze (bei der Abscisse a anfangende und bis zur Abscisse α erstreckte) Stück RST der Berührenden positiv. Dazu ist aber nöthig, dass man dem Radical seine positive Bedeutung beilege, welche ihm durch die ganze Untersuchung bleiben muss. Man mutire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left[p \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right]$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left[p \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + \frac{\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(p \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right]$$

Es leuchtet von selbst ein, dass (wie schon in Aufgabe 68 näher nachgewiesen ist) die Länge der so begränzten Berührungslinie nicht abhängig ist von ihrer Entfernung von den beiden Coordinatenebenen XY und XZ, sondern nur von den Winkeln, welche sie mit diesen Coordinatenebenen macht; denn alle zwischen den beiden Gränzebenen parallele Graden sind einander gleich. Was aber hier aus einfacher Betrachtung folgt, stimmt ganz mit Gleichung III überein; denn da sie keine mit δy und δz behafteten

Digitized by Google

Theilsätze enthält, so hat die Mutation von y und z keinen Einfluss auf U (d. h. auf die Länge der Berührenden), und nur die Mutation von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ hat Einfluss darauf.

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven machen können; so sind $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d\delta z}{dx}$ sowohl der Form als auch dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Es kann also nur $\delta U = 0$ werden, wenn gleichzeitig folgende zwei Gleichungen stattfinden:

$$1)\quad p = 0, \qquad \text{und} \quad 2)\quad \mathfrak{p} = 0$$

Daraus folgt

$$3)\quad y = A, \qquad \text{und} \quad 4)\quad z = B$$

wo A und B willkürliche Constanten sind. Diese Gleichungen gehören zu einer mit den Coordinatenebenen XY und XZ parallelen Graden, welche insofern die Aufgabe löst, als jede Grade auch ihre eigene Berührende ist. Man kann nun die gesuchte Linie noch zwingen, durch einen festen Punkt (n, m, l) zu gehen.

Unter einem festen Punkte (n, m, l) im Raume versteht man bekanntlich einen Punkt mit der bestimmten Abscisse n, und mit den ebenfalls bestimmten Ordinaten m und l.

Damit aber die gesuchte Linie durch den festen Punkt (n, m, l) gehe, muss sein

$$5)\quad y = A = m, \qquad \text{und} \quad 6)\quad z = B = l$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung IV auf

$$\delta^2 U = (\alpha - a) \cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]$$

Weil $(\alpha - a)$ positiv ist, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; und sonach ist $U' = (\alpha - a)$ ein Minimum-stand. Davon hätte man sich schon durch einfache Betrachtung überzeugen können, ohne dass es nöthig gewesen wäre, das Prüfungsmittel auf theoretischem Wege herzustellen. Da ferner $U' = (\alpha - a)$ vom Werthe des x ganz unabhängig ist, so kann von einem secundären Zustande keine Rede sein.

Zweiter Fall. Es ist bekanntlich $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe X und der in der Coordinatenebene XY liegenden Projection der Berührungslinie eingeschlossen wird. Ebenso ist $\frac{dz}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe X und der in der Coordinatenebene XZ liegenden Projection der Berührungslinie eingeschlossen wird.

Sucht man also nur diejenige Curve, die bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Curven machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern bei denen allen

β) die zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungslinien so gelegen sind, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Projectionen parallel laufen mit der betreffenden Projection der zur gesuchten Curve gehörigen Berührungslinie;

so ist jetzt $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc. Gleichung III zieht sich also zurück auf

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot p \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt $p = 0$, also ist wieder $y = A$, d. h. constant, während z unbestimmt, d. h. eine ganz beliebige Function von x ist; und stellt man diese durch $\varkappa(x)$ dar, so hat man für die Gleichungen der gesuchten Curve

$$7)\quad y = A, \qquad \text{und} \quad 8)\quad z = \varkappa(x)$$

Die jetzt erhaltene räumliche Curve ist also jede beliebige ebene Curve, welche in der

Digitized by Google

Entfernung $y = A$ mit der Coordinatenebene XZ parallel läuft. Unter diesen Umständen zieht sich nun Gleichung IV zurück auf

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\pi(x)}{dx}\right)^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Daran erkennt man, dass $U' = \sqrt{1 + \left(\frac{d\pi(x)}{dx}\right)^2}$ ein Minimum-stand ist. Davon kann man sich aber schon durch folgende einfache Betrachtung überzeugen:

Unter allen Curven, welche auf der durch $z = \pi(x)$ gegebenen Cylinderfläche möglich sind, liefert diejenige, die durch den Schnitt einer mit der Coordinatenebene XZ parallelen Ebene entstanden ist, die kürzeste auf vorgeschriebene Weise begränzte Berührungslinie. Sollte nun die gesuchte Curve auf irgend einer durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegebenen Fläche liegen müssen, so hat man nur statt y überall A zu setzen. Dabei bekommt man $F(x, A, z) = 0$, woraus sich dann $z = \pi(x)$ entwickeln lässt, so dass die jetzt gesuchte Curve ganz und mit allen ihren Punkten

1) in der Fläche $F(x, y, z) = 0$
2) in der aus $F(x, A, z) = 0$ sich ergebenden Cylinderfläche $z = \pi(x)$, und
3) in der durch $y = A$ gegebenen und mit der Coordinatenebene XZ parallelen Ebene

liegt.

Da aber jetzt $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\pi(x)}{dx}\right)^2}$ vom Werthe des x abhängig ist, so kann man noch solche Werthe des x suchen, bei denen ein Maximum-werth oder Minimum-werth stattfindet.

Aufgabe 105.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man diese mit zwei in bestimmten Punkten einer gegebenen Graden errichteten Perpendikeln begränzt, das Product dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die gegebene Grade (fig. 17) sei OX. Man lege die beiden sich rechtwinkelig schneidenden Coordinatenebenen XY und XZ in die Linie OX, so wird OX die Abscissenaxe. Nun nehme man einen beliebigen Punkt O in derselben an, und lege hierein die auf OX senkrechte Coordinatenebene YZ. Die gesuchte Curve PSQ habe die Projectionen psq und p's'q'. Der beliebig gewählte Berührungspunkt S habe die Projectionen s und s'. Die in S berührende Grade RST habe die Projectionen rst und r's't'.

Diejenigen auf der Abscissenaxe stehenden Perpendikel, von welchen die in S berührende Grade begränzt wird, seien HR und KT, deren Projectionen bezüglich hr h'r', und kt, k't' sind, so dass $HR = \sqrt{hr^2 + h'r'^2}$ und $KT = \sqrt{kt^2 + k't'^2}$ ist. Es soll also

$$U = HR \cdot KT = \left(\sqrt{hr^2 + h'r'^2}\right) \cdot \left(\sqrt{kt^2 + k't'^2}\right)$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Erst wenn die gesuchte Curve gefunden ist, kann man beurtheilen, ob die beiden Radicale gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, d. h. ob das in Rede stehende Product selbst positiv oder negativ ist. Es ist aber bequem, wenn man vorerst

$$\text{I)} \quad U = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{(hr^2 + h'r'^2) \cdot (kt^2 + k't'^2)}$$

setzt, und die Zweideutigkeit des Productes durch den Factor $(\sqrt{1})$ bemerkbar macht. Die Gleichungen für die Projectionen einer berührenden Graden sind im Allgemeinen

Digitized by Google

$$y' - y = (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad z' - z = (x' - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

oder

$$y' = y + (x' - x) \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad z' = z + (x' - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

Hier sind x', y', z' die veränderlichen Coordinaten der Berührenden; dagegen x, y, z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes S der Curve, in welchem man grade die Berührung wählt. Ist nun $Oh = a$ und $Ok = \alpha$, so ist

$$h'r' = y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx}, \quad k't' = y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$hr = z + (a - x) \cdot \frac{dz}{dx}, \quad kt = z + (\alpha - x) \cdot \frac{dz}{dx}$$

Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$; so geht Gleichung I über in

II) $U = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{[(y + (a - x)p)^2 + (z + (a - x)\mathfrak{p})^2] \times [(y + (\alpha - x)p)^2 + (z + (\alpha - x)\mathfrak{p})^2]}$

Variirt man, und setzt dann zur weitern Abkürzung

$$y + (a - x) \cdot \frac{dy}{dx} = u, \quad z + (a - x) \cdot \frac{dz}{dx} = \mathfrak{u}$$

$$y + (\alpha - x) \cdot \frac{dy}{dx} = w, \quad z + (\alpha - x) \cdot \frac{dz}{dx} = \mathfrak{w}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad \delta U = & \frac{1}{U} \cdot [u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2)] \cdot \delta y \\ & + \frac{1}{U} \cdot [\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2)] \cdot \delta z \\ & + \frac{1}{U} \cdot [u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) + w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x)] \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ & + \frac{1}{U} \cdot [\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) + \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x)] \cdot \frac{d\delta z}{dx} \end{aligned}$$

Erster Fall Sucht man eine solche Curve, welche bei einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse x alle möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden, Nachbarcurven machen können; so müssen (man sehe den ersten Fall der 103ten Aufgabe) folgende vier Gleichungen gleichzeitig bestehen:

1) $u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) = 0$
2) $\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) = 0$
3) $u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) + w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x) = 0$
4) $\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) + \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x) = 0$

Aus diesen vier Gleichungen folgt zunächst

5) $u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) = - w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2)$
6) $\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) = - \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2)$
7) $u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) = - w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x)$
8) $\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) = - \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x)$

Dividirt man 6 in 5, so bekommt man

$$9) \quad \frac{u}{\mathfrak{u}} = \frac{w}{\mathfrak{w}}$$

Dividirt man ebenso 8 in 7, so bekommt man wieder

$$10) \quad \frac{u}{\mathfrak{u}} = \frac{w}{\mathfrak{w}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$11) \quad u \cdot \mathfrak{w} = w \cdot \mathfrak{u}$$

Digitized by Google

Führt man nun für u, w, u, w die Ausdrücke wieder zurück, so geht Gleichung 11 über in

$$12)\quad y \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{z} \cdot p$$

Daraus folgt $\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$; und somit ist

$$13)\quad z = Ey$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche in der Axe OX liegt, und auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht. Die gesuchte räumliche Curve liegt also in der durch letztere Gleichung gegebenen Ebene, d. h. ist von einfacher Krümmung. Aus Gleichung 13 folgt noch

$$14)\quad \mathfrak{p} = Ep$$

Führt man diese für z und $\mathfrak{p}$ gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen 1, 2, 3, 4 ein, so bekommt man

$$15)\quad (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p] = 0$$

$$16)\quad E \cdot (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot [2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p] = 0$$

$$17)\quad (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 (a - x) (\alpha - x) p] = 0$$

$$18)\quad E \cdot (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot [(a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 (a - x) (\alpha - x) \cdot p] = 0$$

Es bedarf wohl keines weitern Nachweises, dass die gesuchte Function die beiden Elemente a und α zugleich enthalten muss; desshalb können auch nur die letzten Factoren dieser vier Gleichungen berücksichtigt werden. Man hat also nur die beiden Gleichungen

$$19)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

$$20)\quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2 (a - x) (\alpha - x) \cdot p = 0$$

Aus Gleichung 19 folgt $p = \frac{-2y}{a + \alpha - 2x}$; und wenn man diesen Ausdruck in 20 einsetzt, so bekommt man

$$21)\quad (\alpha - a)^2 \cdot y = 0$$

Daraus folgt $y = 0$, d. h. y ist eine identische Function von x. Diese Function genügt aber den beiden Gleichungen 19 und 20 zugleich, kann also die Aufgabe lösen. Ist aber $y = 0$, so ist in Folge der Gleichung 13 auch $z = 0$; und somit hat man hier die in die Abscissenaxe OX fallende Grade. In diesem Falle ist $U' = 0$. Das Prüfungsmittel, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, wird hergestellt, wenn man

$$0 + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots \text{ statt } y$$

$$0 + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots \text{ statt } z$$

$$0 + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots \text{ statt } p$$

und

$$0 + \varkappa \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 z}{dx} + \ldots\ldots \text{ statt } \mathfrak{p}$$

in Gleichung II einsetzt, und eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt. Dadurch bekommt man

$$\varDelta U = \varkappa^2 \cdot (\sqrt{1}) \cdot \Sigma + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man hat hier nur die F o r m des ersten Gliedes der Reihe hingesetzt, da bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das Zeichen der ganzen Reihe von dem Zeichen des ersten Gliedes nicht verschieden ist. Der erste Factor $\varkappa^2$ ist beständig positiv, hat also keinen Einfluss auf das Zeichen des $\varDelta U$; dagegen der zweite Factor $(\sqrt{1}) \cdot \Sigma$ ist zweideutig wegen des Radicals. Bei solchen Umständen muss man die für $\varDelta U$ und für U' sich ergebenden Ausdrücke miteinander vergleichen; und da $U' = 0$ mit besagtem Radical nichts zu thun hat, so muss man sich (nach Bd. I., S. 170, c., und S. 171, Nr. 3) dahin entscheiden, dass hier weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde.

Digitized by Google

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben,

gemacht werden kann; so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc. Gleichung III reducirt sich also auf

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{1}{U} \cdot [u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2)(a - x) + w \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2)(\alpha - x)] \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ \frac{1}{U} \cdot [\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) \cdot (a - x) + \mathfrak{w} \cdot (u^2 + \mathfrak{u}^2) \cdot (\alpha - x)] \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, müssen sich wieder die Gleichungen 3 und 4 ergeben. Daraus folgen wieder die Gleichungen 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20, so dass man jetzt die beiden Gleichungen

$$22) \quad z = Ey$$
$$23) \quad (a + \alpha - 2x) \cdot y + 2(a - x)(\alpha - x) \cdot p = 0$$

hat. Integrirt man Gleichung 23, so bekommt man (vergleiche den zweiten Fall der 72sten Aufgabe)

$$24) \quad y^2 = G \cdot (a - x)(\alpha - x)$$

wo G ein willkürlicher Constanter ist. In Folge von Gleichung 22 ist ferner

$$25) \quad z^2 = E^2 \cdot G \cdot (a - x)(\alpha - x)$$

Die Gleichung 22 zeigt noch, dass die gesuchte Curve in einer in der Abscissenaxe OX liegenden und auf der Coordinatenebene YZ senkrecht stehenden Ebene liegt, also von einfacher Krümmung ist. Die Gleichungen 24 und 25 lassen sich auch auf folgende Weise umformen

$$26) \quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{G \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

$$27) \quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{z^2}{E^2 \cdot G \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Da nun $gS = \sqrt{y^2 + z^2}$, so ist $gS = \sqrt{G \cdot (1 + E^2) \cdot (a - x) \cdot (\alpha - x)}$; und setzt man v statt gS, so geht diese Gleichung über in

$$28) \quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{G \cdot (1 + E^2) \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

welche Gleichung auf die Ebene bezogen ist, in welcher die gesuchte Curve liegt. Man hat also hier eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem G negativ oder positiv ist, ganz wie im zweiten Falle der 72sten Aufgabe.

Setzt man nun $E \cdot y$ statt z, und $E \cdot p$ statt $\mathfrak{p}$ in Gleichung II überall ein, so bekommt man

$$U' = (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot \sqrt{1}$$

Die beiden willkürlichen Constanten E und G machen, dass die gesuchte Curve entweder noch einer oder auch noch zweien Bedingungen unterworfen werden kann. So werden z. B. die beiden Constanten durch eine einzige Bedingung bestimmt, wenn man die Curve zwingt, durch einen festen Punkt (n, m, l) zu gehen. Denn dabei gehen die Gleichungen 24 und 25 über in

$$m^2 = G \cdot (a - n)(\alpha - n) \text{ und } l^2 = E^2 \cdot G \cdot (a - n)(\alpha - n)$$

Digitized by Google

woraus sich E und G bestimmen lassen. Mutirt man Gleichung IV noch einmal, und berücksichtigt man dabei die Gleichungen 3 und 4, so wie, dass $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc.; so ergibt sich nach gehörigen Substitutionen und Reductionen

$$29)\quad \delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot y^2}{2U} \cdot \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\delta y}{dx} + E \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\ .$$

Der in den eckigen Klammern befindliche Ausdruck kann aber nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten, so dass unter allen möglichen durch S gehenden räumlichen Curven keine herausgesucht werden kann, bei welcher das Product HR · KT ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Beschränkt man aber die Aufgabe durch die Bedingungsgleichungen 13 oder 14, d. h. vergleicht man die gefundene Curve nur mit denen, welche in der Ebene $z = Ey$ liegen, und den grade gewählten Berührungspunkt miteinander gemein haben; so folgt aus Gleichung 20, dass $\frac{d\delta z}{dx} = E \cdot \frac{d\delta y}{dx}$. Gleichung 29 geht also, wenn man $\frac{d\delta z}{dx}$ eliminirt, jetzt über in

$$V)\quad \delta^2 U = -\frac{(\alpha - a)^2 \cdot y^2}{2 \cdot U} \cdot (1 + E^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Man ist nun auf dem Punkte, über das Vorhandensein des Maximum-standes oder Minimum-standes zu entscheiden.

Erstens. Bei der Ellipse, wo G negativ ist, liegen die beiden Perpendikel HR und KT auf der nemlichen Seite der Abscissenaxe, d. h. die beiden Radicale $\sqrt{hr^2 + h'r'^2}$ und $\sqrt{kt^2 + k't'^2}$ haben einerlei Bedeutung. Dabei muss das (schon in Gleichung I stehende) Radical $\sqrt{1}$ seine positive Bedeutung annehmen; und somit ist U' positiv und der letzte für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck negativ. Es findet also bei der Ellipse ein Maximum-stand statt.

Zweitens. Bei der Hyperbel, wo G positiv ist, liegen die beiden Perpendikel HR und KT auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, d. h. die beiden Radicale $\sqrt{hr^2 + h'r'^2}$ und $\sqrt{kt^2 + k't'^2}$ haben entgegengesetzte Bedeutung. Dabei muss das (schon in Gleichung I befindliche) Radical $\sqrt{1}$ seine negative Bedeutung annehmen; und somit ist U' negativ, und der (in Gleichung V) für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck positiv. Es findet also bei der Hyperbel ein Minimum-stand statt. (Ein negativer Ausdruck gilt in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht.)

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Berührungslinien mit der Berührungslinie der gesuchten Curve parallel haben,

gemacht werden kann; so ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc. Es sind nemlich $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ die goniometrischen Tangenten der Winkel, welche von den Projectionen der in S berührenden Graden und von der Abscissenaxe eingeschlossen werden; und sind grade Linien im Raume parallel, so sind auch ihre Projectionen parallel. Gleichung III reducirt sich also auf

$$VI)\quad \delta U = \frac{1}{U} \cdot [u \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + w \cdot (\mathfrak{u}^2 + u^2)] \cdot \delta y$$
$$+ \frac{1}{U} \cdot [\mathfrak{u} \cdot (w^2 + \mathfrak{w}^2) + \mathfrak{w} \cdot (\mathfrak{u}^2 + u^2)] \cdot \delta z$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, müssen sich wieder die Gleichungen 1 und 2 ergeben; und daraus folgen wieder die Gleichungen 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, so dass man jetzt die beiden Gleichungen

$$30)\quad z = Ey$$
$$31)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

Digitized by Google

hat. Integrirt man Gleichung 31, so bekommt man (vergleiche den dritten Fall der 72sten Aufgabe)

$$32)\quad y = K \cdot \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)$$

wo K ein willkürlicher Constanter ist. Da aber $z = Ey$, so bekommt man gradezu

$$33)\quad z = EK \cdot \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)$$

Und da $gS = \sqrt{y^2 + z^2}$, so ist, wenn man v statt gS setzt

$$34)\quad v = K \cdot (\sqrt{1 + E^2}) \cdot \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)$$

welche Gleichung auf die Ebene bezogen ist, wo die gesuchte Curve liegt. Man hat also hier eine grade Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Grade auch ihre eigene Berührende ist. Setzt man Ey statt z, und $E \cdot p$ statt $\mathfrak{p}$ in Gleichung II überall ein, so bekommt man

$$U' = (1 + E^2) \cdot [y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot \sqrt{1}$$

Mutirt man Gleichung VI noch einmal, so bekommt man nach gehörigen Substitutionen und Reductionen

$$\delta^2 U = \frac{K^2 \cdot (\alpha - a)^2}{2U} \cdot [(E \cdot \delta y - \delta z)^2 - (\delta y + E \cdot \delta z)^2]$$

Der in den eckigen Klammern befindliche Ausdruck kann aber nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten, so dass unter allen möglichen räumlichen Curven, welche bei der Abscisse x parallele Berührungslinien haben, keine herausgewählt werden kann, bei welcher das Product $HR \cdot KT$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Beschränkt man aber auch jetzt die Aufgabe dadurch, dass man die gesuchte Curve nur aus allen denen, welche in der Ebene $z = Ey$ liegen, und bei der Abscisse x parallele Berührungslinien haben, herauswählt; so hat man jetzt $\delta z = E \cdot \delta y$. Wenn man nun δz eliminirt, so bekommt man

$$\delta^2 U = -\frac{(\alpha - a)^2}{2 \cdot U} \cdot K^2 \cdot (1 + E^2) \cdot \delta y^2$$

Um über das Vorhandensein des Maximum-standes oder Minimum-standes entscheiden zu können, verfahre man auf folgende Weise:

Die gesuchte Curve ist jetzt (z. B. fig. 18) die Grade PQ mit den Projectionen pq und p'q'. Der Punkt L, wo die Abscissenaxe von PQ geschnitten wird, liegt genau in der Mitte zwischen (h, h') und (k, k'). Die beiden Perpendikel HR und KT liegen also auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe, d. h. die Radicale $\sqrt{hr^2 + h'r'^2}$ und $\sqrt{kt^2 + k't'^2}$ haben entgegengesetzte Bedeutung. Es ist also U' negativ, und somit der letzte für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck positiv. Desshalb findet ein Minimum-stand statt. (Ein negativer Ausdruck gilt in der Analysis für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht.)

Die Constanten E und K können bestimmt werden, wie im vorigen Falle.

Vergleicht man diese fig. 18 mit fig. 17, so sieht man, dass jetzt der Punkt R mit P, und der Punkt T mit Q zusammenfällt, weil die grade Linie auch zugleich ihre eigene Berührende ist.

Aufgabe 106.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene legt, und wenn man dann von zwei andern im Raume irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Normalebene fällt, das Product dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Digitized by Google

Wenn überhaupt

$$\text{I)}\quad A \cdot x'' + B \cdot y'' + C \cdot z'' + F = 0$$

die Gleichung einer Ebene ist, und a, b, c die Coordinaten eines festen Punktes im Raume sind; so ist die Entfernung dieses Punktes von der Ebene bekanntlich gegeben durch

$$\text{II)}\quad \frac{A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + F}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Sind ferner α, β, γ die Coordinaten eines andern festen Punktes im Raume, so ist ebenso die Entfernung dieses Punktes von jener Ebene gegeben durch

$$\text{III)}\quad \frac{A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot \gamma + F}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wenn man, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt; so ist die Gleichung der Normalebene einer räumlichen Curve

$$\text{IV)}\quad (x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

oder

$$\text{V)}\quad x'' + p \cdot y'' + \mathfrak{p} \cdot z'' - (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) = 0$$

Hier sind x'', y'' und z'' die veränderlichen Coordinaten der Normalebene, dagegen x, y und z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in welchen man grade die Normalebene legt. Vergleicht man nun Gleichung V mit I, so sieht man, dass $A = 1$, $B = p$, $C = \mathfrak{p}$, $F = -(x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z)$. Die Entfernung des Punktes (a, b, c) bis zur Normalebene ist also

$$\text{VI)}\quad \frac{a + p \cdot b + \mathfrak{p} \cdot c - (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

und die Entfernung des Punktes (α, β, γ) bis zur Normalebene ist

$$\text{VII)}\quad \frac{\alpha + p \cdot \beta + \mathfrak{p} \cdot \gamma - (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Es habe (fig. 19) das Stück RST der gesuchten Curve die Projectionen rst und r′s′t′; der Punkt S, in welchen die Normalebene gelegt ist, habe die Projectionen s und s′; die Normalebene sei dargestellt durch ihre Spuren PQ und P′Q; der Ort der Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) sei bezüglich in D und F; die zwei auf die Normalebene gefällten Perpendikel DE und FG seien dargestellt durch ihre Projectionen De, De′ und Fg, Fg′. Das gesuchte Product ist also DE $\times$ FG.

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die festen Punkte D und F legt; in diesem Falle ist dann $OD = a$ und $OF = \alpha$, dagegen ist $b = 0$, $c = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Die Ausdrücke VI und VII reduciren sich also jetzt bezüglich auf

$$DE = \frac{a - (x + py + \mathfrak{p}z)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \text{ und } FG = \frac{\alpha - (x + py + \mathfrak{p}z)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Das hier in Untersuchung stehende Product ist also

$$\text{VIII)}\quad U = \frac{[a - (x + py + \mathfrak{p}z)] \cdot [\alpha - (x + py + \mathfrak{p}z)]}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe; so müssen folgende vier Gleichungen zugleich bestehen:

$$1)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot p = 0$$

$$2)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

$$3)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2) \cdot y - 2\,(x + py + \mathfrak{p}z - a)\,(x + py + \mathfrak{p}z - \alpha) \cdot p = 0$$

$$4)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2) \cdot z - 2\,(x + py + \mathfrak{p}z - a)\,(x + py + \mathfrak{p}z - \alpha) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Diesen vier Gleichungen wird gleichzeitig genügt, wenn $y = 0$ und $z = 0$, d. h. wenn

Digitized by Google

y und z identische Functionen von x sind. Dadurch ist aber die in der Abscissenaxe liegende Grade gegeben. In diesem Falle ist nun

$$5)\quad U' = (a - x)\,(\alpha - x)$$

Da aber

$$\delta^2 U = 2\,(2x - a - \alpha)\cdot\left(\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)$$
$$- 2\,(x - a)\,(x - \alpha)\cdot\left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]$$

ist, welcher Ausdruck nicht immer einerlei Zeichen behalten kann; so findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Bedingung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe; so hat man nur die Gleichungen 3 und 4, und diese kann man bezüglich umformen in

$$(2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha)\cdot(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)\cdot y$$
$$= 2\,(x - a + py + \mathfrak{p}z)\cdot(x - \alpha + py + \mathfrak{p}z)\cdot p$$

und

$$(2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha)\cdot(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)\cdot z$$
$$= 2\,(x - a + py + \mathfrak{p}z)\cdot(x - \alpha + py + \mathfrak{p}z)\cdot \mathfrak{p}$$

Dividirt man beide Gleichungen ineinander, so gibt sich $\frac{y}{z} = \frac{p}{\mathfrak{p}}$; und daraus folgt

$$5)\quad z = E\cdot y$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche in der Abscissenaxe OX liegt, und auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht. Die gesuchte räumliche Curve liegt also in der durch letztere Gleichung gegebenen Ebene, d. h. ist von einfacher Krümmung. Aus Gleichung 5 folgt noch

$$6)\quad \mathfrak{p} = E\cdot p$$

Führt man nun die für z und $\mathfrak{p}$ gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen 3 und 4 ein, und setzt man noch zur Abkürzung H statt $(1 + E^2)$; so bekommt man bezüglich

$$7)\quad (2x + 2Hp\cdot y - a - \alpha)\cdot(1 + H\cdot p^2)\cdot y$$
$$- 2\,(x + Hpy - a)\cdot(x + Hpy - \alpha)\cdot p = 0$$
$$8)\quad E\cdot[(2x + 2Hp\cdot y - a - \alpha)\cdot(1 + H\cdot p^2)\cdot y$$
$$- 2\,(x + Hpy - a)\cdot(x + Hpy - \alpha)\cdot p] = 0$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich nur durch den constanten Factor E, liefern also ganz gleiches Resultat, wie sein muss. Um nun die Gleichung 7 zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\frac{H\cdot dp}{(1 + H\cdot p^2)^2}$; dann hat man

$$\frac{\left\{\begin{matrix}(2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)\,Hy\cdot dp\\ - 2\,(x + Hpy - a)\,(x + Hpy - \alpha)\,Hp\cdot dp\end{matrix}\right\}}{(1 + Hp^2)^2} = 0$$

Weil $dy = p\cdot dx$, so ist folgender Ausdruck

$$(2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)\,(dx + Hp\cdot dy) - (2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)^2\cdot dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung. Man kann ihn also zum Zähler des letzteren Bruches addiren, ohne dass derselbe dadurch geändert wird; und somit bekommt man

$$\frac{\left\{\begin{matrix}(2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)\,(dx + Hp\cdot dy) + (2x + 2Hpy\\ - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)\,Hy\cdot dp - 2\,(x + Hpy - a)\,(x + Hpy - \alpha)\,Hp\cdot dp\\ - (2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)^2\cdot dx\end{matrix}\right\}}{(1 + Hp^2)^2} = 0$$

Letztere Gleichung lässt sich umformen in

$$\frac{\left\{\begin{matrix}(2x + 2Hpy - a - \alpha)\,(1 + Hp^2)\,(dx + Hp\cdot dy + Hy\cdot dp)\\ - 2\cdot(x + Hpy - a)\cdot(x + Hpy - \alpha)\cdot Hp\cdot dp\end{matrix}\right\}}{(1 + H\cdot p^2)^2}$$
$$- (2x - a - \alpha)\cdot dx - 2Hy\cdot dy = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$9)\quad \frac{(x + Hp \cdot y - a)(x + Hp \cdot y - \alpha)}{1 + H \cdot p^2} - (x^2 - ax - \alpha x) - H \cdot y^2 = h$$

Daraus folgt

$$10)\quad (x + Hpy - a)(x + Hpy - \alpha) = (h + x^2 - ax - \alpha x + Hy^2)(1 + Hp^2)$$

Führt man diesen Ausdruck in Gleichung 7 ein, so ist

$$[(2x + 2Hpy - a - \alpha) y - 2(h + x^2 - ax - \alpha x + Hy^2) p](1 + Hp^2) = 0$$

Der zweite Factor kann nicht zu Null werden, man hat also nur

$$(2x + 2Hpy - a - \alpha) y - 2(h + x^2 - ax - \alpha x + Hy^2) p = 0$$

Zum Zwecke des Integrirens forme man diese Gleichung um in

$$\frac{2 \cdot dy}{y} = \frac{(2x - a - \alpha) \cdot dx}{h + x^2 - ax - \alpha x}$$

so bekommt man

$$11)\quad y^2 = K \cdot (h + x^2 - ax - \alpha x)$$

Diese Gleichung hat aber zwei neue willkürliche Constanten aufgenommen, während doch die vorgegebene Differentialgleichung 7 nur von der ersten Ordnung ist. Allein grade der Umstand, dass Gleichung 7 durch Gleichung 11 identisch werden muss, dient dazu, den einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Aus Gleichung 11 folgt zunächst $y = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{K \cdot (h + x^2 - ax - \alpha x)}$, und

$$p = \frac{(\sqrt{1}) \cdot (2x - a - \alpha) \cdot \sqrt{K}}{2 \cdot \sqrt{h + x^2 - ax - \alpha x}}$$

Führt man diese Ausdrücke in Gleichung 7 ein, und reducirt soviel als möglich; so bekommt man

$$12)\quad h - \frac{H \cdot K}{4} \cdot (a + \alpha)^2 + H \cdot K \cdot h - a\alpha = 0$$

also ist

$$13)\quad h = \frac{4a\alpha + H \cdot K \cdot (a + \alpha)^2}{4 \cdot (1 + H \cdot K)}$$

und wenn man $(1 + E^2)$ statt H wieder zurückführt, so ist

$$14)\quad h = \frac{4a\alpha + K \cdot (1 + E^2) \cdot (a + \alpha)^2}{4 \cdot (1 + K \cdot (1 + E^2))}$$

Gleichung 11 geht also jetzt über in

$$y^2 = K \cdot \left[\frac{4a\alpha + K(1 + E^2 \cdot (a + \alpha)^2}{4 \cdot (1 + K \cdot (1 + E^2))} + \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + \alpha}{2}\right)^2\right]$$

oder

$$15)\quad y^2 = K \cdot \left[\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha - a)^2}{4 \cdot (1 + K \cdot (1 + E^2))}\right]$$

Wenn K positiv ist, so ist auch $(1 + K \cdot (1 + E^2))$ positiv. Dagegen K und $(1 + K \cdot (1 + E^2))$ können nicht zugleich negativ sein; denn dabei wären die beiden eingeklammerten Theilsätze zugleich positiv, und y^2 wäre einem negativen Ausdrucke gleich, was nicht sein darf. Wenn also K negativ ist, so muss doch $[1 + K \cdot (1 + E^2)]$ positiv sein. Die letzte Gleichung lässt sich auch umformen in

$$16)\quad \frac{\left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2}{\frac{1}{1 + K \cdot (1 + E^2)} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{K}{1 + K \cdot (1 + E^2)} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{2}\right)^2} = 1$$

Die gesuchte Curve ist also eine Hyperbel, wenn K positiv ist; dagegen ist sie eine Ellipse, wenn K negativ ist, da, wie vorher auseinander gesetzt, $[1 + K \cdot (1 + E^2)]$ nicht negativ sein darf. Mutirt man nun zum zweiten Male, und berücksichtigt man alles Vorhergehende; so bekommt man

Digitized by Google

$$\delta^2 U = -\frac{2 \cdot y^2}{K\,[1 + (1 + E^2)\,p^2]} \cdot \left[\left(\frac{K \cdot E}{\sqrt{1+K}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - (\sqrt{1+K}) \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \frac{1 + K \cdot (1 + E^2)}{1 + K} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]$$

Da nun $(1 + K \cdot (1 + E^2))$ immer positiv sein muss, das K mag positiv oder negativ sein; so ist $(1 + K)$ auch immer positiv. Das Zeichen des $\delta^2 U$ hangt also von K ab, d. h. $\delta^2 U$ ist negativ, wenn K positiv, und somit findet bei der Hyperbel ein Maximum-stand statt; dagegen ist $\delta^2 U$ positiv, wenn K negativ, und somit findet bei der Ellipse ein Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Normalebenen mit der Normalebene der gesuchten Curve parallel haben,

gemacht werden kann; so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc. Weil nemlich die zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Normalebenen aller in Betracht zu ziehenden Curven parallel sind, so sind auch die Spuren aller dieser Normalebenen miteinander parallel. Man hat also jetzt die Gleichungen 1 und 2, d. h. man hat

$$17)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot p = 0$$

$$18)\quad (2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Erstens. Diesen beiden Gleichungen wird genügt, wenn $p = 0$ und $\mathfrak{p} = 0$. Daraus folgt, dass y und z constant sind, und man hat die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Dabei ist $U' = (a - x) \cdot (\alpha - x)$, und $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, etc., so dass jetzt von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein kann.

Zweitens. Obigen Gleichungen wird aber auch genügt, wenn $2x + 2py + 2\mathfrak{p}z - a - \alpha = 0$. Daraus folgt

$$19)\quad x^2 + y^2 + z^2 - ax - \alpha x = k^2$$

oder

$$20)\quad y^2 + z^2 + \left(x - \frac{a+\alpha}{2}\right)^2 = k^2 + \left(\frac{a+\alpha}{2}\right)^2$$

Dieses ist die Gleichung einer Kugel; und weil der Constante k willkürlich ist, so kann man die Kugelfläche noch einer Bedingung unterwerfen, z. B. dass sie durch einen festen Punkt (n, m, l) gehe, und dgl. Mutirt man noch einmal, und berücksichtigt man alles Vorhergehende, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} \cdot (p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z)^2$$

welcher Ausdruck immer positiv ist, und somit findet ein Minimum-stand statt.

Da man für die gesuchte räumliche Curve nur die einzige Gleichung 19 oder 20 hat, so kann man für y irgend eine beliebige Function von x annehmen, und in Gleichung 20 substituiren, wodurch sich dann z als Function von x ergibt. Man kann auch jede beliebige Function $F(x, y, z) = 0$ mit Gleichung 20 verbinden, und dann y und z als Functionen von x bestimmen. Man kann also unendlichviele Curven auf der Kugelfläche bekommen, und diese liefern alle einen Minimum-stand.

Digitized by Google

Aufgabe 107.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man dann von zwei andern im Raume irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührungslinie fällt, das Product dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Wenn überhaupt

$$\text{I)}\quad x' = A \cdot z' + B, \text{ und II)}\quad y' = C \cdot z' + F$$

die Gleichungen einer graden Linie im Raume, und a, b, c die Coordinaten eines Punktes im Raume sind; so ist die senkrechte Entfernung dieses Punktes von jener Linie gegeben durch

$$\text{III)}\quad \sqrt{\frac{(B + Ac - a)^2 + (F + Cc - b)^2 + (A(b - F) - C(a - B))^2}{1 + A^2 + C^2}}$$

Wenn man, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt, so sind die Gleichungen der Berührungslinie einer räumlichen Curve bekanntlich $y' - y = (x' - x) \cdot p$ und $z' - z = (x' - x) \cdot \mathfrak{p}$; und daraus folgt

$$\text{IV)}\quad x' = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot z' + \frac{\mathfrak{p}x - z}{\mathfrak{p}}, \text{ und V)}\quad y' = \frac{p}{\mathfrak{p}} \cdot z' + \frac{\mathfrak{p}y - pz}{\mathfrak{p}}$$

Hier sind x', y', z' die veränderlichen Coordinaten der Berührungslinie; dagegen x, y, z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in welchem man grade die Berührung wählt. Vergleicht man Gleichung IV und V mit I und II; so sieht man, dass $A = \frac{1}{\mathfrak{p}}$, $B = \frac{\mathfrak{p}x - z}{\mathfrak{p}}$, $C = \frac{p}{\mathfrak{p}}$, und $F = \frac{\mathfrak{p}y - pz}{\mathfrak{p}}$. Der Ausdruck III geht also jetzt über in

$$\text{VI)}\quad \sqrt{\frac{((a - x)\mathfrak{p} + (z - c))^2 + ((a - x)p + (y - b))^2 + ((b - y)\mathfrak{p} - (c - z)p)^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Die senkrechte Entfernung von irgend einem andern Punkte (α, β, γ) bis zu der Berührenden ist ebenso

$$\text{VII)}\quad \sqrt{\frac{((\alpha - x)\mathfrak{p} + (z - \gamma))^2 + ((\alpha - x)p + (y - \beta))^2 + ((\beta - y)\mathfrak{p} - (\gamma - z)p)^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Es habe (fig. 20) das Stück RST der gesuchten Curve die Projectionen rst und r's't'; der Punkt S, in welchem die Berührungslinie gezogen ist, habe die Projectionen s und s'; die gradlinige Berührungslinie MSN habe die Projectionen msn und m's'n'; der Ort der Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) sei bezüglich in H und K; die zwei auf die Berührungslinie gefällten Perpendikel HM und KN seien dargestellt durch ihre Projectionen Hm, Hm', und Kn, Kn'. Das gesuchte Product ist also HM · KN.

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die festen Punkte H und K legt. In diesem Falle ist dann OH = a und OK = α, dagegen ist $b = 0$, $c = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Die Ausdrücke VI und VII reduciren sich also jetzt bezüglich auf

$$HM = \sqrt{\frac{((a - x) \cdot p + y)^2 + ((a - x) \cdot \mathfrak{p} + z)^2 + (z \cdot p - y \cdot \mathfrak{p})^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

$$KN = \sqrt{\frac{((\alpha - x) \cdot p + y)^2 + ((\alpha - x) \cdot \mathfrak{p} + z)^2 + (z \cdot p - y \cdot \mathfrak{p})^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Erst wenn die gesuchte Curve gefunden ist, kann man beurtheilen, ob diese beiden Radicale gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, d. h. ob das in Rede stehende Product selbst positiv oder negativ ist. Es ist aber bequem, wenn man vorerst nur

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad U =$$

$$(\sqrt{1})\cdot\frac{\sqrt{[((a-x)p+y)^2+((a-x)\mathfrak{p}+z)^2+(zp-y\mathfrak{p})^2]\cdot[((\alpha-x)p+y)^2+((\alpha-x)\mathfrak{p}+z)^2+(zp-y\mathfrak{p})^2]}}{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$$

setzt, und die Zweideutigkeit des Productes durch den Factor $(\sqrt{1})$ bemerkbar macht.

Man setze auch hier zur Abkürzung $y+(a-x)\cdot p = u$, $z+(a-x)\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{u}$, $y+(\alpha-x)\cdot p = w$, $z+(\alpha-x)\cdot\mathfrak{p} = \mathfrak{w}$, und $z\cdot p - y\cdot\mathfrak{p} = \omega$; so ist

$$\text{IX)}\quad U = (\sqrt{1})\cdot\frac{\sqrt{(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)}}{1+p^2+\mathfrak{p}^2}.$$

Erster Fall. Lässt man hier dieselbe Allgemeinheit gelten, wie im ersten Falle der beiden vorigen Aufgaben; so müssen folgende vier Gleichungen gleichzeitig stattfinden:

$$1)\quad (u-\omega\cdot\mathfrak{p})\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(w-\omega\cdot\mathfrak{p})\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)=0$$

$$2)\quad (\mathfrak{u}+\omega\cdot p)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(\mathfrak{w}+\omega\cdot p)\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)=0$$

$$3)\quad [(u(a-x)+\omega z)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(w(\alpha-x)+\omega z)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)]\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2) - 2\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)\cdot p=0$$

$$4)\quad [(\mathfrak{u}(a-x)-\omega y)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(\mathfrak{w}(\alpha-x)-\omega y)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)]\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2) - 2\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)\cdot\mathfrak{p}=0$$

Gleichung 1 und 2 forme man nun um in

$$5)\quad (u-\omega\cdot\mathfrak{p})\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2) = -(w-\omega\mathfrak{p})\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)$$

$$6)\quad (\mathfrak{u}+\omega\cdot p)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2) = -(\mathfrak{w}+\omega p)\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)$$

Dividirt man beide Gleichungen ineinander, so ergibt sich

$$7)\quad \frac{u-\omega\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}+\omega p}=\frac{w-\omega\cdot\mathfrak{p}}{\mathfrak{w}+\omega\cdot p}$$

und daraus folgt

$$8)\quad u\cdot\mathfrak{w}-w\cdot\mathfrak{u}+(u-w)\cdot\omega\cdot p+(\mathfrak{u}-\mathfrak{w})\cdot\omega\cdot\mathfrak{p}=0$$

Führt man für u, w, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$, ω die Ausdrücke wieder zurück, und reducirt soviel als möglich; so geht letztere Gleichung über in

$$9)\quad (y\cdot\mathfrak{p}-z\cdot p)\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2)=0$$

Daraus kann nur folgen

$$10)\quad y\cdot\mathfrak{p}-z\cdot p=0$$

Die Gleichungen 3 und 4 forme man um in

$$11)\quad [(u(a-x)+\omega z)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(w(\alpha-x)+\omega z)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)]\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2) = 2\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)\cdot p$$

$$12)\quad [(\mathfrak{u}(a-x)-\omega y)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(\mathfrak{w}(\alpha-x)-\omega y)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)]\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2) = 2\cdot(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)\cdot\mathfrak{p}$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen ineinander, so bekommt man zunächst

$$13)\quad \frac{(u(a-x)+\omega z)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(w(\alpha-x)+\omega z)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)}{(\mathfrak{u}(a-x)-\omega y)(w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2)+(\mathfrak{w}(\alpha-x)-\omega y)(u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2)}=\frac{p}{\mathfrak{p}}$$

Multiplicirt man die Nenner weg, und führt man für u, w, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$, ω die Ausdrücke wieder zurück; so bekommt man

$$14)\quad (y\mathfrak{p}-zp)\cdot[((a-x)(\alpha-x)-(z\mathfrak{p}+yp)(a+\alpha-2x))\cdot(p^2+\mathfrak{p}^2) - ((z\mathfrak{p}+yp)^2+(y^2+z^2)\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2))]=0$$

Man erkennt also, dass die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 zugleich erfüllt werden, wenn $y\mathfrak{p}-zp=0$; und daraus folgt, wie in den beiden vorigen Aufgaben

$$15)\quad z=E\cdot y$$

Dieses ist aber wieder die Gleichung einer Ebene, welche in der Axe OX liegt, und auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht. Die gesuchte räumliche Curve liegt also in der durch letztere Gleichung gegebenen Ebene, d. h. ist von einfacher Krümmung. Aus Gleichung 15 folgt noch

$$16)\quad \mathfrak{p}=E\cdot p$$

Digitized by Google

Führt man diese für z und p gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen 1, 2, 3, 4 ein, und setzt man zur Abkürzung noch H statt $(1 + E^2)$; so gehen diese bezüglich über in

$$17)\quad H \cdot (y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) \cdot (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p) = 0$$

$$18)\quad E \cdot H \cdot (y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) \cdot (2y + (a + \alpha - 2x)\, p) = 0$$

$$\begin{aligned} 19)\quad & H \cdot (y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) \cdot [((a + \alpha - 2x)\, y \\ & + 2\,(a - x)\,(\alpha - x)\, p)\,(1 + Hp^2) \\ & - 2Hp \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20)\quad & E \cdot H \cdot (y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) \cdot [((a + \alpha - 2x)\, y \\ & + 2\,(a - x)\,(\alpha - x)\, p)\,(1 + Hp^2) \\ & - 2Hp \cdot (y + (a - x) \cdot p) \cdot (y + (\alpha - x) \cdot p)] = 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Function muss die beiden Elemente a und α zugleich enthalten, was keines besonderen Nachweises bedarf; desshalb können auch nur die letzten Factoren dieser vier Gleichungen berücksichtigt werden. Man hat also nur die beiden Gleichungen

$$21)\quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

$$\begin{aligned} 22)\quad & ((a + \alpha - 2x)\, y + 2\,(a - x)\,(\alpha - x)\, p)\,(1 + Hp^2) \\ & - 2Hp\,(y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) = 0 \end{aligned}$$

Aus Gleichung 21 folgt $p = \dfrac{-2y}{a + \alpha - 2 \cdot x}$; und wenn man diesen Ausdruck in 22 einsetzt, so bekommt man

$$23)\quad (\alpha - a)^2 \cdot y = 0$$

Daraus folgt $y = 0$, d. h. y ist eine identische Function von x. Diese Function genügt aber den Gleichungen 21 und 22 zugleich, kann also die Aufgabe lösen. Ist aber $y = 0$, so ist in Folge der Gleichung 15 auch $z = 0$, und somit hat man hier die in die Abscissenaxe OX fallende Grade. In diesem Falle ist nun $U' = 0$. Das Prüfungsmittel, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, wird hergestellt, wenn man dieselben Substitutionen macht, wie im ersten Falle der 105[ten] Aufgabe; und wenn man hierauf für ΔU eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so bekommt man

$$\Delta U = \varkappa^2 \cdot (\sqrt{1}) \cdot \Xi + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man hat hier nur die Form des ersten Gliedes der Reihe hergesetzt, da bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das Zeichen der ganzen Reihe vom Zeichen des ersten Gliedes nicht verschieden ist. Der erste Factor $\varkappa^2$ ist beständig positiv, hat also keinen Einfluss auf das Zeichen des ΔU; dagegen der andere Factor $(\sqrt{1}) \cdot \Xi$ ist zweideutig wegen des Radicals. Nun ist $U' = 0$, und hat mit besagtem Radical nichts zu thun. Man muss sich also, wie schon in der Schlussbemerkung zum ersten Falle der 105[ten] Aufgabe geschehen ist, dahin entscheiden, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde. (Man sehe Bd. I., S. 170, c.; und S. 171, Nr. 3.)

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgaben, so hat man jetzt wieder die Gleichungen 3 und 4. Daraus folgen wieder die Gleichungen 14, 15, 16, 19, 20, so dass man jetzt die beiden Gleichungen

$$24)\quad z = E \cdot y$$

$$\begin{aligned} 25)\quad & ((a + \alpha - 2x) \cdot y + 2\,(a - x)\,(\alpha - x) \cdot p) \cdot (1 + H \cdot p^2) \\ & - 2Hp \cdot (y + (a - x)\, p) \cdot (y + (\alpha - x)\, p) = 0 \end{aligned}$$

hat. Um die letzte dieser Gleichungen zu integriren, multiplicire man sie vorerst mit $\dfrac{dp}{(1 + H \cdot p^2)^2}$. Dann hat man

$$\frac{\left\{ \begin{array}{c} ((a + \alpha - 2x)\, y + 2\,(a - x)\,(\alpha - x)\, p)\,(1 + Hp^2) \cdot dp \\ - 2\,(y + (a - x)\, p)\,(y + (\alpha - x)\, p)\, Hp \cdot dp \end{array} \right\}}{(1 + Hp^2)^2} = 0$$

Da $dy = p \cdot dx$, so ist folgender Ausdruck

$$(2y + (a + \alpha - 2x)\, p)\,(1 + Hp^2) \cdot dy - (2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p)\,(1 + Hp^2) \cdot p \cdot dx$$

jedenfalls eine identische Gleichung. Man kann ihn also zum Zähler des letzten Bruches addiren, ohne dass derselbe dadurch geändert wird; und somit bekommt man

Digitized by Google

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}(2y+(a+\alpha-2x)p)(1+Hp^2)\cdot dy-(2y+(a+\alpha-2x)p)(1+Hp^2)\cdot p\cdot dx\\ +((a+\alpha-2x)y+2(a-x)(\alpha-x)p)(1+Hp^2)\cdot dp\\ -2(y+(a-x)p)(y+(\alpha-x)p)Hp\cdot dp\end{array}\right\}}{(1+Hp^2)^2}=0$$

Diese Gleichung kann man gradezu integriren, wodurch sich

$$\frac{(y+(a-x)\cdot p)\cdot(y+(\alpha-x)\cdot p)}{1+H\cdot p^2}=h$$

ergibt. Daraus folgt $[y+(a-x)\cdot p]\cdot[y+(\alpha-x)\cdot p]=h\cdot(1+H\cdot p^2)$; und führt man diesen Ausdruck in 25 ein, so bekommt man

$$[(a+\alpha-2x)\cdot y+2\cdot(a-x)(\alpha-x)\cdot p-2h\cdot H\cdot p]\cdot(1+H\cdot p^2)=0$$

Daraus folgt

$$\frac{2\cdot dy}{y}=\frac{(a+\alpha-2x)\cdot dx}{h\cdot H-(a-x)(\alpha-x)}$$

Integrirt man, so gibt sich

$$2\cdot \lg\operatorname{nat} y=\lg\operatorname{nat} K+\lg\operatorname{nat}[h\cdot H-(a-x)(\alpha-x)]$$

oder

$$26)\quad y^2=K\cdot[h\cdot H-(a-x)(\alpha-x)]$$

Diese Gleichung hat aber zwei neue willkürliche Constanten h und K aufgenommen, während doch die vorgegebene Differentialgleichung 25 nur von der ersten Ordnung ist. Aber der Umstand, dass Gleichung 25 durch 26 identisch werden muss, dient dazu, den einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Aus 26 folgt nun

$$y=(\sqrt{1})\cdot\sqrt{K\cdot[h\cdot H-(a-x)(\alpha-x)]}\text{ und } p=\frac{(\sqrt{1})\cdot(a+\alpha-2x)\cdot\sqrt{K}}{2\cdot\sqrt{[h\cdot H-(a-x)(\alpha-x)]}}.$$

Führt man diese Ausdrücke in Gleichung 25 ein, so bleibt nach ausgeführten Reductionen noch übrig $H\cdot[4h\cdot(1-K\cdot H)-K\cdot(\alpha-a)^2]=0$. Daraus folgt

$$h=\frac{K}{1-K\cdot H}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2$$

und wenn man $(1+E^2)$ statt H wieder zurückführt, so hat man

$$27)\quad h=\frac{K}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2$$

Gleichung 26 geht also jetzt über in

$$28)\quad y^2=K\cdot\left[\frac{K\cdot(1+E^2)}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2-(a-x)(\alpha-x)\right]$$

welche Gleichung sich auch auf folgende Weise darstellen lässt:

$$29)\quad y^2=K\cdot\left[\frac{1}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+\alpha}{2}\right)^2\right]$$

oder auf folgende Weise

$$30)\quad \frac{\left(x-\frac{\alpha+a}{2}\right)^2}{\frac{1}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{K}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2}=1$$

Da $z=E\cdot y$, so folgt aus Gleichung 29 gradezu

$$31)\quad z^2=E^2\cdot K\cdot\left[\frac{1}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{\alpha+a}{2}\right)^2\right]$$

welche Gleichung sich auch umformen lässt in

$$32)\quad \frac{\left(x-\frac{\alpha+a}{2}\right)^2}{\frac{1}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2}+\frac{z^2}{\frac{E^2\cdot K}{1-K\cdot(1+E^2)}\cdot\left(\frac{\alpha-a}{2}\right)^2}=1$$

Digitized by Google

Die gesuchte Curve ist also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $\frac{1}{1 - K \cdot (1 + E^2)}$ und $\frac{E^2 \cdot K}{1 - K \cdot (1 + E^2)}$ zugleich positiv sind, oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Setzt man $E \cdot y$ statt z, und $E \cdot p$ statt $\mathfrak{p}$ in Gleichung VIII überall ein, so bekommt man zunächst $U' = \frac{[y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p]}{1 + (1 + E^2) \cdot p^2} \cdot (1 + E^2) \cdot \mathfrak{W}1$; und daraus folgt weiter $U' = h \cdot (1 + E^2) \cdot \mathfrak{W}1$, wo man (aus 27) noch den Werth des h zu substituiren hat.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Dritter Fall. Macht man hier dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 105ten Aufgabe, so bekommt man wieder die Gleichungen 1 und 2, und daraus ferner die Gleichungen 9 und 10, so dass man zuletzt wieder die zwei Gleichungen

$$33) \quad z = E \cdot y$$

$$34) \quad 2y + (a + \alpha - 2x) \cdot p = 0$$

hat. Diese zwei Gleichungen sind aber schon im dritten Falle der 105ten Aufgabe vollständig durchgeführt.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 108.

Man legt in den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt einer räumlichen Curve die Normalebene. Ihre in den drei Coordinatenebenen liegenden Spuren schliessen mit den Coordinatenaxen Dreiecke ein. Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven hat nun in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass die Summe dieser drei Dreiecke grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Normalebenen aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die Gleichung der Normalebene ist bekanntlich

$$\text{I)} \quad (x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

wo x'', y'', z'' die Coordinaten der Normalebene, und x, y, z die Coordinaten des Punktes der gesuchten Curve sind, wo man grade die Normalebene hinlegt.

Da, wo die Axe X von der Normalebene geschnitten wird, ist $y'' = 0$ und $z'' = 0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{II)} \quad x'' = x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}$$

Da, wo die Axe Y von der Normalebene geschnitten wird, ist $x'' = 0$ und $z'' = 0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{III)} \quad y'' = \frac{1}{p} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Da, wo die Axe Z von der Normalebene geschnitten wird, ist $x'' = 0$ und $y'' = 0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{IV)} \quad z'' = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Nun ist des in der Coordinatenebene XY liegenden und auf vorgeschriebene Weise begränzten Dreieckes Inhalt

$$\frac{1}{2} x'' \cdot y'' = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

Des in der Coordinatenebene XZ liegenden Dreieckes Inhalt ist

$$\frac{1}{2} x'' \cdot z'' = \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

Des in der Coordinatenebene YZ liegenden Dreieckes Inhalt ist

Digitized by Google

$$\frac{1}{2} \cdot y'' \cdot z'' = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

Die Summe dieser drei Dreiecke ist also

$$U = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2 + \frac{1}{2 \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2 + \frac{1}{2 \cdot p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

oder

$$\text{V)} \quad U = \frac{1 + p + \mathfrak{p}}{2 \cdot p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

Die Aufgabe ist also, für y und z solche Functionen von x zu finden, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 109.

Man hat bei einer räumlichen Curve in den zur Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene gelegt. Hierauf hat man in zwei festen Punkten der Abscissenaxe senkrechte Ebenen errichtet, von welchen die Normalebene geschnitten wird. Eine jede der dadurch entstandenen zwei Durchschnittslinien wird von den Coordinatenebenen XY und XZ begränzt. Bei welcher unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven wird das Product der auf besagte Weise begränzten Längen dieser beiden Durchschnittslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\text{I)} \quad (x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Der in der Abscissenaxe gelegene Punkt, wo man die erste senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse a; und der in der Abscissenaxe gelegene Punkt, wo man die zweite senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse α.

Die Projectionen des zur Abscisse a gehörigen Schnittes sind

$$\text{II)} \quad \dot{y}_1 = \frac{1}{p}(x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}), \text{ und III)} \quad \dot{z}_1 = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Die Länge dieses Schnittes selbst ist also

$$\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2} = (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}) \cdot \frac{\sqrt{p^2 + \mathfrak{p}^2}}{p \cdot \mathfrak{p}}$$

Die Projectionen des zur Abscisse α gehörigen Schnittes sind aber

$$\text{IV)} \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{p} \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}), \text{ und V)} \quad \dot{z}_2 = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Die Länge dieses Schnittes selbst ist also

$$\sqrt{\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2} = (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}) \cdot \frac{\sqrt{p^2 + \mathfrak{p}^2}}{p \cdot \mathfrak{p}}$$

Sonach ist das Product dieser beiden Schnitte

$$\text{VI)} \quad U = \frac{p^2 + \mathfrak{p}^2}{p^2 \cdot \mathfrak{p}^2} \cdot (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}) \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

und die Aufgabe ist jetzt, für y und z solche Functionen von x aufzufinden, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 110.

Man hat bei einer räumlichen Curve in den zur Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene gelegt. Hierauf hat man in zwei festen Punkten der Abscissenaxe senk-


Digitized by Google

rechte Ebenen errichtet, von welchen die Normalebene geschnitten wird. Diese zwei Durchschnittslinien und die in den Coordinatenebenen XY und XZ liegenden Spuren der Normalebene schliessen ein Trapez ein. Welche räumliche Curve ist es nun, wenn dieses Trapez ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Es sei (fig. 21) die Normalebene gegeben durch ihre Spuren P'QP. Die in den festen Punkten r und t senkrecht gestellten Ebenen seien gegeben durch die Spuren Vr, rR, und Wt, tT. Das hier in Rede stehende Trapez ist aber gegeben durch seine Projectionen VrtW und RrtT. Es sei die Abscisse Or = a und die Abscisse Ot = α; so ist

$$rV = \frac{1}{p} \cdot (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}),\ rR = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

$$tW = \frac{1}{p} \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}),\ tT = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Die Projection VrtW hat also den Inhalt

$$\text{I)}\quad \frac{rV + tW}{2} \cdot rt = \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot (2x - a - \alpha + 2y \cdot p + 2z \cdot \mathfrak{p})$$

Die Projection RrtT hat aber den Inhalt

$$\text{II)}\quad \frac{rR + tT}{2} \cdot rt = \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (2x - a - \alpha + 2y \cdot p + 2z \cdot \mathfrak{p})$$

Die dritte, d. h. die in der Coordinatenebene YZ gelegene Projection, wenn sie umgelegt wird, ist v''w''t''r'', und hat den Inhalt = Dreieck Ov''r'' — Dreieck Ow''t'', oder

$$\frac{Ov'' \cdot Or''}{2} - \frac{Ow'' \cdot Ot''}{2} \text{ oder } \frac{rV \cdot rR}{2} - \frac{tW \cdot tT}{2}$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{p\mathfrak{p}} \cdot (x - a + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2 - \frac{1}{p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x - \alpha + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2\right]$$

oder

$$\text{III)}\quad \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (2x - a - \alpha + 2y \cdot p + 2z \cdot \mathfrak{p})$$

Nach dem Satze

„Das Quadrat jeder ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer auf „die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren“

bekommt man für den Inhalt des gesuchten Trapezes:

$$\text{IV)}\quad U = \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (2x - a - \alpha + 2y \cdot p + 2z \cdot \mathfrak{p}) \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

und die Aufgabe ist jetzt, für y und z solche Functionen von x aufzufinden, dass dieser Ausdruck ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Hat man endlich die gesuchte Curve gefunden, dann wird man dem Radical $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ diejenige Bedeutung beilegen, bei welcher das in Rede stehende Trapez positiv wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 111.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass sowohl die Gleichung

$$\text{I)}\quad z^2 = x \cdot y$$

identisch, als auch folgender Ausdruck

$$\text{II)}\quad U = a^2 - a \cdot x + x^2 - 2 \cdot y^2 + x \cdot y - z^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x \cdot y \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z und somit auch $\frac{dz}{dx}$ als mittelbar mutabel behandelt wird; ferner werde zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ gesetzt. Mutirt man I, so bekommt man

$$\text{III)}\quad 2z \cdot \delta z = x \cdot \delta y$$

$$\text{IV)}\quad 2 \cdot \delta z^2 + 2z \cdot \delta^2 z = x \cdot \delta^2 y$$

etc.

Man differentiire nun Gleichung I in der Weise, dass man y und z als Functionen von x betrachtet; und dadurch bekommt man $2z \cdot \mathfrak{p} = px + y$. Mutirt man auch diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{V)}\quad 2\mathfrak{p} \cdot \delta z + 2z \cdot \frac{d\delta z}{dx} = x \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \delta y$$

$$\text{VI)}\quad 2\mathfrak{p} \cdot \delta^2 z + 4 \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2z \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} = x \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \delta^2 y$$

etc. etc.

Erste Auflösung.

Man eliminire z und $\mathfrak{p}$ vor dem Mutiren. Aus I folgt $z = \sqrt{x \cdot y}$ und $\mathfrak{p} = \dfrac{y + px}{2 \cdot \sqrt{x \cdot y}}$. Führt man diese Ausdrücke in II ein, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad U = a^2 - a \cdot x + x^2 - y^2 + 2p \cdot x \cdot y - p^2 \cdot x^2$$

Mutirt man nun, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta U = (-2y + 2px) \cdot \delta y + (2xy - 2p \cdot x^2) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = (-2y + 2px) \cdot \delta^2 y + (2xy - 2p \cdot x^2) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} - 2 \cdot \delta y^2 + 4x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - 2x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man für y und z solche, der Bedingungsgleichung I entsprechende, Functionen, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner machen, als er bei demselben Werthe des x von allen möglichen Functionen, welche nicht nur

α) den für y und z gesuchten Functionen bezüglich nächstanliegen, sondern welche auch

β) jedesmal solche zusammengehörige sind, dass sie die Bedingungsgleichung I erfüllen,

gemacht werden kann; so sind jetzt die unmittelbaren Mutationscoefficienten δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, etc. (§. 91). Es müssen also jetzt gleichzeitig die beiden identischen Gleichungen

$$1)\quad -2y + 2p \cdot x = 0, \text{ und } 2)\quad 2x \cdot y - 2p \cdot x^2 = 0$$

stattfinden. Beide Gleichungen sind aber die nemlichen, so dass man jetzt die gesuchte Function y nur durch Integration herstellen kann. Integrirt man wirklich, so gibt sich

$$3)\quad y = A \cdot x$$

Dadurch geht Gleichung I über in $z^2 = A \cdot x^2$, und es ist

$$4)\quad z = (\sqrt{A}) \cdot x$$

Die hier für y und z gefundenen Functionen enthalten also noch einen willkürlichen Constanten, so dass man sie noch einer Nebenbedingung unterwerfen kann. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung IX auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot \left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass $U' = a^2 - ax + (1 + A^2) \cdot x^2$ ein Maximum-stand ist.

Zweiter Fall. Die unmittelbaren Mutationscoefficienten δy, $\delta^2 y$ etc., sind ganz willkürliche Functionen. Man kann sich also solche Functionen darunter denken, dass bei dem für x grade genommenen Werthe einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc. Dabei ist dann nothwendig auch $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc., wie aus den Gleichungen III und IV hervorgeht. Nach dieser Voruntersuchung erkennt man, dass folgende Einschränkung möglich ist:

Digitized by Google

Man suche für y und z nur diejenigen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen, von welchem bei irgend einem nach Willkür gewählten Werthe des x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er gemacht werden kann, wenn man

1) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des y diejenigen setzt, welche nicht nur
 α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
 β) bei dem grade gewählten Werthe des x denselben Werth bekommen, wie die für y gesuchte Function; und wenn man
2) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des z diejenigen setzt, welche nicht nur
 α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
 β) bei dem grade gewählten Werthe des x denselben Werth bekommen, wie die für z gesuchte Function.

Da nun jetzt einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc.; so reducirt sich Gleichung VII auf

$$\text{X)} \quad \delta U = (2xy - 2p \cdot x^2) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgt $2xy - 2p \cdot x^2 = 0$, so dass man wieder die Gleichungen 3 und 4 bekommt. Ferner ist

$$\delta^2 U = -2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

und somit ist wieder $U' = a^2 - ax + (1 + A^2) \cdot x^2$ ein Maximum-stand.

Dritter Fall. Die Form der Ausdrücke $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$, etc. ist zugleich mit der Form der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, etc. gegeben. Man kann sich nun unter δy, $\delta^2 y$ etc., solche Functionen von x denken, dass bei dem grade genommenen Werthe des x einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., ohne dass $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. stattfinden muss. An den Gleichungen V und VI erkennt man aber, dass, wenn gleich $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. sind, in dieser Aufgabe die abhängigen Ausdrücke $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$, etc. doch nicht nothwendig zu Null werden müssen, sondern dazu wäre erforderlich, dass man auch die willkürlichen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. zu Null macht, wobei dann von keiner Mutation die Rede sein könnte. Nach dieser Voruntersuchung erkennt man, dass in dieser Aufgabe folgende Einschränkung möglich ist:

Man suche für y und z nur diejenigen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen, von welchen bei irgend einem nach Willkür gewählten Werthe des x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er gemacht werden kann, wenn man

1) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des y diejenigen setzt, welche nicht nur
 α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
 β) bei dem grade für x genommenen Werthe alle ihrem ersten Differentialquotient den nemlichen Werth liefern, welchen der erste Differentialquotient der für y gesuchten Function annimmt, während man
2) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des z nur diejenigen setzen darf, welche
 α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, aber
 β) bei dem grade für x genommenen Werthe ihren ersten Differentialquotient nicht denselben Werth, welchen der erste Differentialquotient der für z gesuchten Function annimmt, grade liefern müssen, sondern allerlei Werthe liefern können, wie diese jedesmal aus den Gleichungen V, VI etc. hervorgehen.

Digitized by Google

Da nun hier $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. ist; so reducirt sich Gleichung VIII auf

$$\text{XI)} \quad \delta U = (-2y + 2p \cdot x) \cdot \delta y$$

Daraus folgt $-2y + 2p \cdot x = 0$, so dass man wieder die Gleichungen 3 und 4 bekommt. Ferner ist

$$\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2$$

Also ist wieder ein Maximum-stand vorhanden.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus den Gleichungen III, IV, V, VI folgt der Reihe nach

$$\text{XII)} \quad \delta z = \frac{x}{2z} \cdot \delta y$$

$$\text{XIII)} \quad \delta^2 z = \frac{x}{2z} \cdot \delta^2 y - \frac{x^2}{4 \cdot z^3} \cdot \delta y^2$$

$$\text{XIV)} \quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{x}{2z} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{z - \mathfrak{p}x}{2 \cdot z^2} \cdot \delta y$$

$$\text{XV)} \quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{x}{2z} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{z - \mathfrak{p} \cdot x}{2 \cdot z^2} \cdot \delta^2 y - \frac{x^2}{2z^3} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{3 \cdot \mathfrak{p} \cdot x^2 - 2xz}{4 \cdot z^4} \cdot \delta y^2$$

etc.

Nun mutire man auch Gleichung II, und es ergibt sich

$$\text{XVI)} \quad \delta U = (-4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2) \cdot \delta y - 4x^2 \cdot p \cdot \frac{d\delta y}{dx} - 2z \cdot \delta z + 8xy\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{XVII)} \quad \delta^2 U = (-4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2) \cdot \delta^2 y - 4x^2 \cdot p \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} - 2z \cdot \delta^2 z + 8xy\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}$$
$$- 4 \cdot \delta y^2 - 4x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2 \cdot \delta z^2 + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + 16x \cdot \mathfrak{p} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie beim ersten Falle der vorigen Auflösung; so eliminire man die mittelbaren Elemente δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ aus Gleichung XVI. Dadurch bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad \delta U = \frac{4}{z^2} \cdot (x \cdot z^2 \cdot \mathfrak{p}^2 - y \cdot z^2 + xyz \cdot \mathfrak{p} - x^2 \cdot y \cdot \mathfrak{p}^2) \cdot \delta y$$
$$+ \frac{4 \cdot x^2}{z} \cdot (y\mathfrak{p} - zp) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Soll $\delta U = 0$ werden, so müssen folgende zwei identische Gleichungen

5) $x \cdot z^2 \cdot \mathfrak{p}^2 - y \cdot z^2 + xyz \cdot \mathfrak{p} - x^2 \cdot y \cdot \mathfrak{p}^2 = 0$, und 6) $y \cdot \mathfrak{p} - z \cdot p = 0$

stattfinden. Integrirt man die zweite dieser Gleichungen, so bekommt man $y = B \cdot z$; und dadurch geht I über in $z^2 = Bxz$. Man hat also

7) $z = B \cdot x$, und 8) $y = B^2 \cdot x$

Diese für y und z gefundenen Functionen müssen aber auch die Gleichung 5 identisch machen. Man führe sie also ein, und wird dabei vielleicht zu einem bestimmten Werthe des B gelangen. Gleichung 5 geht dabei über in

$$B^4 \cdot x^3 - B^4 \cdot x^3 + B^4 \cdot x^3 - B^4 \cdot x^3 = 0$$

Diese Gleichung ist aber identisch für jeden Werth des B; und somit kann man die gesuchten Functionen noch einer Nebenbedingung unterwerfen. Aendert man aber den Constanten, und setzt man $\sqrt{A}$ statt B; so gehen die Gleichungen 7 und 8 über in $z = (\sqrt{A}) \cdot x$ und $y = A \cdot x$, welches wieder die Gleichungen 3 und 4 sind. Eliminirt man nun δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ aus Gleichung XVII, und berücksichtigt man alles Vorhergehende; so bleibt nach gehörigen Reductionen

$$\delta^2 U = \frac{1}{z^4} \cdot (2 (4x^2 \cdot p^2 - 4xzp + z^2) (xy - z^2) - 2z^4) \cdot \delta y^2$$

$$+ \frac{1}{z^3} \cdot (4x^2yz - 8x^2 \cdot p (xy - z^2)) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{1}{z^2} \cdot (2x^2 \cdot (xy - z^2) - 2x^2z^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Indem man aber die Gleichung $z^2 = xy$ zu Hilfe nimmt, geht dieser Ausdruck ohneweiters über in

$$\delta^2 U = -2 \cdot \left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Es ist also Alles wie im ersten Falle der ersten Auflösung.

Zweiter Fall. Da hier $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc., so reduciren sich die Gleichungen XIV, XV, XVI, XVII bezüglich auf

$$\frac{d\delta z}{dx} = \frac{x}{2z} \cdot \frac{d\delta y}{dx}, \quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{x}{2z} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}, \quad \delta U = -4x^2 \cdot p \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 8xyp \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta^2 U = -4x^2 \cdot p \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + 8xyp \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} - 4x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Eliminirt man $\frac{d\delta z}{dx}$ und $\frac{d\delta^2 z}{dx}$, so bekommt man

$$\delta U = + \frac{4x^2}{z} \cdot (yp - zp) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Man hat also wiederum die Gleichung 6, und somit auch die Gleichungen 7, 8, 3, 4. Ferner ist

$$\delta^2 U = \frac{1}{z^2} \cdot (2x^2 (xy - z^2) - 2x^2 \cdot z^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = -2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Sonach ist Alles wie im zweiten Falle der ersten Auflösung.

Dritter Fall. Weil hier einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., so reduciren sich die Gleichungen XIV, XV, XVI, XVII bezüglich auf

$$\frac{d\delta z}{dx} = \frac{z - px}{2z^2} \cdot \delta y, \quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{z - px}{2z^2} \cdot \delta^2 y + \frac{3px^2 - 2xz}{4z^4} \cdot \delta y^2,$$

$$\delta U = (-4y + x + 4x \cdot p^2) \cdot \delta y - 2z \cdot \delta z + 8xy \cdot p \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta^2 U = (-4y + x + 4x \cdot p^2) \cdot \delta^2 y - 2z \cdot \delta^2 z + 8xy \cdot p \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}$$

$$- 4 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2 + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Eliminirt man $\frac{d\delta z}{dx}$ und $\frac{d\delta^2 z}{dx}$, so bekommt man

$$\delta U = \frac{4}{z^2} \cdot (x \cdot z^2 \cdot p^2 - y \cdot z^2 + xyz \cdot p - x^2 y \cdot p^2) \cdot \delta y$$

Daraus folgt nun wieder die Gleichung 5, d. h.

$$9) \quad x \cdot z^2 \cdot p^2 - y \cdot z^2 + xyz \cdot p - x^2 \cdot y \cdot p^2 = 0$$

Aus Gleichung I folgt aber $y = \frac{z^2}{x}$; und indem man diesen Ausdruck in letztere Gleichung einsetzt, bleibt nur

$$10) \quad z^3 \cdot (xp - z) = 0$$

woraus $z - xp = 0$ folgt, so dass man $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, und $z = Bx$ bekommt. Man hat also wieder die Gleichungen 7, 8, 3, 4. Ferner ist

$$\delta^2 U = \frac{1}{z^4} \cdot (2 (4x^2 \cdot p^2 - 4xz \cdot p + z^2) (xy - z) - 2z^4) \cdot \delta y^2 = -2 \cdot \delta y^2$$

Es ist also Alles wie im dritten Falle der ersten Auflösung.



Dritte Auflösung.

Will man lieber die indirecte Eliminationsmethode mittelst der Multiplicatoren anwenden, so forme man Gleichung I um in

$$\text{XIX)}\quad z^2 - xy = 0$$

Hier hat man z und y als solche Functionen zu betrachten, dass Gleichung XIX eine identische wird. Differentiirt man, so muss die Gleichung

$$\text{XX)}\quad 2z \cdot \mathfrak{p} - y - px = 0$$

ebenfalls eine identische sein. Man denke sich nun unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei (vorerst noch unbestimmte, jedenfalls aber) nichtmutable Functionen von x, multiplicire damit die Gleichungen XIX und XX, und addire diese Producte zu Gleichung II; so wird diese nicht geändert, d. h. man kann gradezu setzen

$$\text{XXI)}\quad U = a^2 - ax + x^2 - 2y^2 + xy - z^2 - 2x^2 \cdot p^2 + 4xy \cdot \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{L} \cdot (z^2 - xy) + \mathfrak{M} \cdot (2z \cdot \mathfrak{p} - y - px)$$

Erster Fall. Man mutire diese Gleichung in der Weise, dass δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ noch ganz allgemein gedacht sind, dadurch bekommt man

$$\text{XXII)}\quad \delta U = (-4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2 - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M}) \cdot \delta y + (-4p \cdot x^2 - \mathfrak{M}x) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (-2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p}) \cdot \delta z + (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{XXIII)}\quad \delta^2 U = (-4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2 - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M}) \cdot \delta^2 y + (-4p \cdot x^2 - \mathfrak{M} \cdot x) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + (-2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p}) \cdot \delta^2 z + (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} - 4 \cdot \delta y^2 - 4x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 16x\mathfrak{p} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2(\mathfrak{L} - 1) \cdot \delta z^2 + 4\mathfrak{M} \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2.$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$11)\quad -2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p} = 0, \text{ und } 12)\quad 8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z = 0$$

stattfinden. Dadurch reducirt sich Gleichung XXII auf

$$\delta U = (-4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2 - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M}) \cdot \delta y + (-4p \cdot x^2 - \mathfrak{M} \cdot x) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, müssen noch weiter die identischen Gleichungen

$$13)\quad -4y + x + 4x \cdot \mathfrak{p}^2 - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M} = 0, \text{ und } 14)\quad -4px^2 - \mathfrak{M} \cdot x = 0$$

stattfinden. Aus 11 und 12 folgt $\mathfrak{M} = -\frac{4xy\mathfrak{p}}{z}$, und $\mathfrak{L} = +\frac{4xy \cdot \mathfrak{p}^2 + z^2}{z^2}$; und führt man diese Ausdrücke in 13 und 14 ein, so bekommt man bezüglich

$$15)\quad xz^2 \cdot \mathfrak{p}^2 - y \cdot z^2 + xyz \cdot \mathfrak{p} - x^2 \cdot y \cdot \mathfrak{p}^2 = 0, \text{ und } 16)\quad y\mathfrak{p} - pz = 0$$

Man hat also jetzt wieder genau die Gleichungen 5 und 6. In Folge der Gleichungen 11, 12, 13, 14 reducirt sich Gleichung XXIII zunächst auf

$$\delta^2 U = -4 \cdot \delta y^2 - 4x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 16x\mathfrak{p} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2 \cdot (\mathfrak{L} - 1) \cdot \delta z^2 + 4\mathfrak{M} \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Führt man hier für $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ die Ausdrücke ein, so bekommt man für $\delta^2 U$ genau dieselben Resultate, wie im ersten Falle der zweiten Auflösung.

Zweiter Fall. Man mutire Gleichung XXI mit der Einschränkung, dass $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc., und es gibt sich

Digitized by Google

$$\text{XXIV)}\quad \delta U = (-4\mathfrak{p}x^2 - \mathfrak{M}x)\cdot\frac{d\delta y}{dx} + (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{XXV)}\quad \delta^2 U = (-4\mathfrak{p}x^2 - \mathfrak{M}x)\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx}$$
$$- 4x^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 8xy\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Elemente $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$17)\quad 8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung XXIV auf

$$\delta U = (-4\mathfrak{p}x^2 - \mathfrak{M}x)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss noch die weitere identische Gleichung

$$18)\quad -4\mathfrak{p}\cdot x^2 - \mathfrak{M}x = 0$$

stattfinden. Aus 17 folgt $\mathfrak{M} = -\frac{4xy\mathfrak{p}}{z}$, und dabei geht Gleichung 18 über in $\mathfrak{p}z - y\mathfrak{p} = 0$. Man hat also wieder die Gleichung 6, und somit auch die Gleichungen 7, 8, 3, 4. In Folge der Gleichungen 17 und 18 reducirt sich Gleichung XXV auf

$$\delta^2 U = -4x^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 8xy\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

weil aber $\frac{d\delta z}{dx} = \frac{x}{2z}\cdot\frac{d\delta y}{dx}$, so ist auch

$$\delta^2 U = -2x^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

also genau Alles, wie im zweiten Falle der vorigen Auflösung.

Dritter Fall. Man mutire Gleichung XXI mit der Einschränkung, dass $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., und es gibt sich

$$\text{XXVI)}\quad \delta U = (-4y + x + 4x^2\cdot\mathfrak{p} - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M})\cdot\delta y + (-2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta z$$
$$+ (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{XXVII)}\quad \delta^2 U = (-4y + x + 4x^2\cdot\mathfrak{p} - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M})\cdot\delta^2 y + (-2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta^2 z$$
$$+ (8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx} - 4\cdot\delta y^2 + 16x\mathfrak{p}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$
$$+ 2\cdot(\mathfrak{L} - 1)\cdot\delta z^2 + 4\mathfrak{M}\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx} + 8xy\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$19)\quad -2z + 2\mathfrak{L}z + 2\mathfrak{M}\mathfrak{p} = 0,\ \text{und}\ 20)\quad 8xy\mathfrak{p} + 2\mathfrak{M}z = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XXVI auf

$$\delta U = (-4y + x + 4x^2\cdot\mathfrak{p} - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M})\cdot\delta y$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss die weitere identische Gleichung

$$21)\quad -4y + x + 4x^2\cdot\mathfrak{p} - \mathfrak{L}x - \mathfrak{M} = 0$$

stattfinden. Aus 19 und 20 folgt $\mathfrak{M} = -\frac{4xy\mathfrak{p}}{z}$ und $\mathfrak{L} = +\frac{4xy\cdot\mathfrak{p}^2 + z^2}{z^2}$; und führt man diese Ausdrücke in 21 ein, so bekommt man

$$22)\quad x\cdot z^2\cdot\mathfrak{p}^2 - y\cdot z^2 + xyz\cdot\mathfrak{p} - x^2\cdot y\cdot\mathfrak{p}^2 = 0$$

Digitized by Google

Dieses ist aber wieder die Gleichung 9, woraus die Gleichungen 10, 7, 8, 3, 4 folgen. Wegen 19, 20 und 21 reducirt sich aber Gleichung XXVII auf

$$\delta^2 U = -4 \cdot \delta y^2 + 16 x \mathfrak{p} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2 \cdot (\mathfrak{L} - 1) \cdot \delta z^2 + 4\mathfrak{M} \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 8xy \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung XIV auf $\frac{d\delta z}{dx} = \frac{z - \mathfrak{p}x}{2z^2} \cdot \delta y$; und indem man für $\frac{d\delta z}{dx}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Ausdrücke noch einsetzt, bekommt man für $\delta^2 U$ genau dasselbe Resultat, wie im dritten Falle der zweiten Auflösung.

Diese Aufgabe ist allerdings mit vieler Weitläufigkeit durchgeführt; allein nur aus dem Grunde, weil es höchst instructiv ist, zu zeigen, wie die verschiedensten Methoden zu demselben Resultate führen. Desshalb soll die 114[te] Aufgabe gleichfalls mit drei verschiedenen Auflösungen durchgeführt werden.

Aufgabe 112.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass sowohl die Gleichung

$$\text{I)} \quad yz = x^2$$

identisch, als auch folgender Ausdruck

$$\text{II)} \quad U = a^2 - ax + x^2 - y^2 \cdot \left(1 + \frac{dz}{dx}\right) + 2xy + (x^2 + 2xy) \cdot \frac{dy}{dx} + yz - 4x^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z und somit auch $\frac{dz}{dx}$ als mittelbar mutabel behandelt wird; ferner werde zur Abkürzung $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$, und p statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt.

Erste Auflösung.

Aus Gleichung I folgt $z = \frac{x^2}{y}$, und daraus folgt $\mathfrak{p} = \frac{x \cdot (2y - px)}{y^2}$. Diese Ausdrücke substituire man in Gleichung II, und mutire erst dann.

Zweite Auflösung.

Will man aber aus irgend einem Grunde der so eben angezeigten Substitution überhoben sein, so mutire man vor Allem Gleichung I, und man bekommt

$$\text{III)} \quad z \cdot \delta y + y \cdot \delta z = 0, \quad \text{IV)} \quad z \cdot \delta^2 y + 2 \cdot \delta y \cdot \delta z + y \cdot \delta^2 z = 0$$

etc.

Nun differentiire man Gleichung I in der Weise, dass man y und z als Functionen von x betrachtet; und man bekommt $pz + \mathfrak{p}y = 2x$. Man mutire auch diese Gleichung, und es ergibt sich

$$\text{V)} \quad p \cdot \delta z + z \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \delta y + y \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

$$\text{VI)} \quad p \cdot \delta^2 z + z \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \delta^2 y + y \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + 2 \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

etc.

Aus den vier letzten Gleichungen folgt der Reihe nach

$$\text{VII)} \quad \delta z = -\frac{z}{y} \cdot \delta y, \quad \text{VIII)} \quad \delta^2 z = -\frac{z}{y} \cdot \delta^2 y + \frac{2z}{y^2} \cdot \delta y^2$$

$$\text{IX)} \quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{pz - \mathfrak{p}y}{y^2} \cdot \delta y - \frac{z}{y} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$


Digitized by Google

$$\text{X)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{pz - \mathfrak{p}y}{y^2}\cdot\delta^2 y - \frac{z}{y}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{2\mathfrak{p}y - 4pz}{y^3}\cdot\delta y^2 + \frac{4z}{y^2}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

etc.

Man mutire nun auch Gleichung II, eliminire zuerst aus dem für δU hergestellten Ausdrucke die Elemente δz und $\frac{d\delta z}{dx}$, und bestimme y und z als Functionen von x. Hierauf eliminire man aus dem für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrucke die Elemente δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$. Allein diese letztere Elimination wird oft sehr weitläufig sein, und besonders desswegen mag es oft bequemer sein, die indirecte Elimination mittelst Multiplicatoren anzuwenden.

Dritte Auflösung.

Man forme Gleichung I um in $yz - x^2 = 0$. Hier hat man y und z als solche Functionen von x zu betrachten, dass diese Gleichung identisch wird; und wenn man sie differentiirt, so bekommt man $y\mathfrak{p} + zp - 2x = 0$, welche Gleichung ebenfalls eine identische sein muss. Man denke sich nun unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei (vorerst noch unbestimmte, jedenfalls aber) nichtmutable Functionen von x, multiplicire damit die letzten Gleichungen, und addire diese Producte zu Gleichung II; so wird diese nicht geändert, d. h. man kann gradezu setzen

$$U = a^2 - ax + x^2 - y^2\cdot(1 + \mathfrak{p}) + 2xy + (x^2 + 2xy)\cdot p + yz - 4x^2\cdot p^2$$
$$+ \mathfrak{L}\cdot(yz - x^2) + \mathfrak{M}\cdot(y\mathfrak{p} + zp - 2x)$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie schon beim ersten Falle in der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe auseinandergesetzt ist; so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Es ist zunächst

$$\delta U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta y + (y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p)\cdot\delta z$$
$$+ (x^2 + 2xy - 8x^2p + \mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta y}{dx} + (-y^2 + \mathfrak{M}y)\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta^2 U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta^2 y + (y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p)\cdot\delta^2 z$$
$$+ (x^2 + 2xy - 8x^2p + \mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + (-y^2 + \mathfrak{M}y)\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx}$$
$$- 2\cdot(1 + \mathfrak{p})\cdot\delta y^2 + 4x\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + 2\cdot(\mathfrak{L} + 1)\cdot\delta y\cdot\delta z + 2(\mathfrak{M} - 2y)\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$
$$+ 2\mathfrak{M}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z - 8x^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$1)\quad y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p = 0, \text{ und }\quad 2)\quad -y^2 + \mathfrak{M}y = 0$$

stattfinden. Dabei bleibt nur

$$\delta U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta y$$
$$+ (x^2 + 2xy - 8x^2p + \mathfrak{M}z)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, müssen noch weiter die identischen Gleichungen

$$3)\quad -2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p} = 0$$

und

$$4)\quad x^2 + 2xy - 8x^2p + \mathfrak{M}z = 0$$

stattfinden. Aus 1 und 2 folgt $\mathfrak{M} = +y$ und $\mathfrak{L} = -(1 + p)$; und führt man diese Ausdrücke in 3 und 4 ein, so bekommt man bezüglich

$$5)\quad 2x\cdot(1 + p) - 2y - (pz + \mathfrak{p}y) = 0, \text{ und } 6)\quad x^2 + 2xy - 8x^2p + yz = 0$$

Digitized by Google

Da aber $yz = x^2$, und $pz + \mathfrak{p}y = 2x$; so gehen die Gleichungen 5 und 6 bezüglich über in

$$7)\quad 2px - 2y = 0, \text{ und } 8)\quad 2x^2 + 2xy - 8x^2p = 0$$

Integrirt man Gleichung 7, so bekommt man $y = Ax$, wo A ein willkürlicher Constanter ist. Da aber dadurch auch Gleichung 8 identisch werden muss, so führe man Ax statt y, und A statt p überall ein; und man erkennt, dass bei $A = \frac{1}{3}$ die Gleichung 8 identisch wird. Sonach ist die gesuchte Function y von x

$$9)\quad y = \frac{x}{3}$$

Da aus Gleichung I folgt $z = \frac{x^2}{y}$, so hat man für die gesuchte Function z von x

$$10)\quad z = 3 \cdot x$$

Die hier gefundenen Functionen y und z enthalten also keinen willkürlichen Constanten mehr. Man hätte aber auch auf folgende Weise verfahren können: Aus den Gleichungen 7 und 8 folgt bezüglich $p = +\frac{y}{x}$ und $p = +\frac{x+y}{4x}$; daraus ergibt sich die weitere Gleichung $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{4x}$, woraus wieder $y = \frac{x}{3}$ folgt. Nun hat man noch zu untersuchen, ob dadurch die Gleichungen 7 und 8 zugleich identisch werden. Wegen der Gleichungen 1, 2, 3, 4 reducirt sich der für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck zunächst auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot (1 + \mathfrak{p}) \cdot \delta y^2 + 4x \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2\,(\mathfrak{L} + 1) \cdot \delta y \cdot \delta z$$
$$+ 2 \cdot (\mathfrak{M} - 2y) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2\mathfrak{M} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z - 8x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Führt man hier für $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ die Ausdrücke ein, so ergibt sich nach gehörigen Reductionen gradezu

$$\delta^2 U = -2 \cdot \left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 6x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

welcher Ausdruck unter allen Umständen negativ ist, so dass $U' = a^2 - ax + \frac{7 \cdot x^2}{3}$ als Maximum-stand erscheint.

Zweiter Fall. Wenn man an den Gleichungen III und IV dieselbe Voruntersuchung vornimmt, wie beim zweiten Falle in der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe geschehen ist; so erkennt man, dass auch hier die nemliche Einschränkung gemacht werden kann. Dabei ist $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc., und man bekommt nur

$$\delta U = (x^2 + 2xy - 8x^2 \cdot p + \mathfrak{M}z) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (-y^2 + \mathfrak{M}y) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta^2 U = (x^2 + 2xy - 8x^2 \cdot p + \mathfrak{M}z) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + (-y^2 + \mathfrak{M}y) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} - 8x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Elemente $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$11)\quad -y^2 + \mathfrak{M} \cdot y = 0$$

stattfindet; und dabei bleibt nur

$$\delta U = (x^2 + 2xy - 8x^2 \cdot p + \mathfrak{M}z) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss die fernere identische Gleichung stattfinden

$$12)\quad x^2 + 2xy - 8x^2 \cdot p + \mathfrak{M}z = 0$$

Aus 11 folgt $\mathfrak{M} = y$; und da zugleich $yz = x^2$, so geht Gleichung 12 über in

Digitized by Google

$$13)\quad 2x^2 + 2xy - 8x^2 \cdot p = 0$$

Man weiss aus dem ersten Falle, dass dieser Gleichung das besondere Integral $y = \frac{x}{3}$ genügt. Man gelangt aber im jetzigen Falle vom besondern Integral zum allgemeinen, wenn man $y = \frac{x}{3} + v$ setzt, wo v eine noch zu bestimmende Function von x ist. Setzt man nun $\left(\frac{x}{3} + v\right)$ statt y, und $\left(\frac{1}{3} + \frac{dv}{dx}\right)$ statt p in Gleichung 13 ein; so geht sie über in $v - 4x \cdot \frac{dv}{dx} = 0$, woraus $\frac{4 \cdot dv}{v} = \frac{dx}{x}$ folgt, so dass $4 \cdot \lg \text{ nat } v = \lg \text{ nat } Bx$, oder $v = \sqrt[4]{Bx}$ ist. Das zur Gleichung 13 gehörige allgemeine Integral ist also $y = \frac{x}{3} + \sqrt[4]{Bx}$. Da aber nur reelle Formen beachtet werden dürfen, so muss man die zwei imaginären Formen der letztern Function verwerfen, und nur

$$14)\quad y = \frac{x}{3} \pm \sqrt[4]{Bx}$$

setzen. Aus Gleichung I folgt ferner

$$15)\quad z = \frac{x^2}{y} = \frac{3 \cdot x^2}{x \pm 3 \cdot \sqrt[4]{Bx}}$$

Wegen der Gleichungen 11 und 12 bleibt nur $\delta^2 U = -8 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$, und somit ist $U' = a^2 - ax + \frac{7}{3} \cdot x^2 - \frac{3}{4} \cdot \sqrt{Bx}$ wieder ein Maximum-stand.

Dritter Fall. Die Form der Ausdrücke $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ etc. ist zugleich mit der Form der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. gegeben. Man kann sich nun unter δy, $\delta^2 y$ etc. solche Functionen von x denken, dass bei dem grade genommenen Werthe des x einzeln $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. stattfindet, ohne dass grade δy, $\delta^2 y$ etc. zu Null werden müssen. Dabei reduciren sich die Gleichungen IX und X bezüglich auf $\frac{d\delta z}{dx} = \frac{pz - \mathfrak{p}y}{y^2} \cdot \delta y$, und $\frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{pz - \mathfrak{p}y}{y^2} \cdot \delta^2 y + \frac{2\mathfrak{p}y - 4pz}{y^3} \cdot \delta y^2$. Daran erkennt man, dass, wenn gleich $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. sind, die mittelbaren Ausdrücke $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ etc. in dieser Aufgabe doch nicht nothwendig zu Null werden müssen; sondern dazu wäre erforderlich, dass man auch die willkürlichen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, etc. zu Null macht, so dass von keiner Mutation die Rede sein könnte.

Nach dieser Voruntersuchung erkennt man, dass auch in dieser Aufgabe die nemliche Einschränkung möglich ist, wie beim dritten Falle in der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe. Dabei ist $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc., während δy, dz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ etc. nicht zu Null werden; und man bekommt jetzt

$$\delta U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p}) \cdot \delta y + (y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p) \cdot \delta z + (-y^2 + \mathfrak{M}y) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\delta^2 U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p}) \cdot \delta^2 y + (y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p) \cdot \delta^2 z + (-y^2 + \mathfrak{M}y) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} - 2(1 + \mathfrak{p}) \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (\mathfrak{L} + 1) \cdot \delta y \cdot \delta z + 2(\mathfrak{M} - 2y) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und

Digitized by Google

$\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$16)\quad y + \mathfrak{L}y + \mathfrak{M}p = 0, \qquad \text{und } 17)\quad -y^2 + \mathfrak{M}y = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich δU auf

$$\delta U = (-2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p})\cdot\delta y$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss noch die weitere identische Gleichung

$$18)\quad -2y - 2y\mathfrak{p} + 2x + 2xp + z + \mathfrak{L}z + \mathfrak{M}\mathfrak{p} = 0$$

stattfinden. Eliminirt man $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$, so geht letztere Gleichung über in $2x\cdot(1+p) - 2y - (pz + \mathfrak{p}y) = 0$. Dieses ist aber wieder die Gleichung 5, woraus wieder die Gleichung 7 folgt, so dass

$$19)\quad y = A\cdot x$$

und

$$20)\quad z = \frac{x^2}{y} = \frac{x}{A}$$

die gesuchten Functionen sind. Wegen der Gleichungen 16, 17, 18 ist nur

$$\delta^2 U = -2\cdot(1+\mathfrak{p})\cdot\delta y^2 + 2\cdot(\mathfrak{L}+1)\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\cdot(\mathfrak{M} - 2y)\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

Führt man aber für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, δz, $\frac{d\delta z}{dx}$ die hier in diesem dritten Falle aufgestellten Ausdrücke ein, so bekommt man $\delta^2 U = -2\cdot\delta y^2$; und somit erkennt man, dass auch $U' = a^2 - ax + (2 + 2A - 3A^2)\cdot x^2$ ein Maximum-stand ist.

Aufgabe 113.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass sowohl die Gleichung

$$\text{I)}\quad by + \beta z = x^2$$

identisch, als auch folgender Ausdruck

$$\text{II)}\quad U = y^2 - cy - z^2 + a^2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z und somit auch $\frac{dz}{dx}$ als mittelbar mutabel behandelt wird; ferner werde zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ gesetzt. Will man die indirecte Eliminationsmethode mittelst Multiplicatoren anwenden, so forme man Gleichung I um in

$$\text{III)}\quad by + \beta z - x^2 = 0$$

Da aber y und z als Functionen von x zu betrachten sind, so ist letztere Gleichung identisch; und differentiirt man sie, so ist

$$\text{IV)}\quad b\cdot p + \beta\cdot\mathfrak{p} - 2x = 0$$

ebenfalls eine identische Gleichung. Aus den Gleichungen III und IV folgt aber

$$\text{V)}\quad \delta z = -\frac{b}{\beta}\cdot\delta y, \qquad \text{VI)}\quad \delta^2 z = -\frac{b}{\beta}\cdot\delta^2 y$$

$$\text{VII)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{b}{\beta}\cdot\frac{d\delta y}{dx}, \qquad \text{VIII)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{b}{\beta}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx}$$

Man denke sich nun unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei (vorerst noch unbestimmte, jedenfalls aber) nichtmutable Functionen von x, multiplicire damit die Gleichungen III und IV, und addire diese Producte zu Gleichung II; so wird diese dadurch nicht geändert, d. h. man kann gradezu setzen

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad U = y^2 - cy - z^2 + a^2 \cdot p^2 - a^2 \cdot \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{L} \cdot (by + \beta z - x^2) + \mathfrak{M} \cdot (bp + \beta \mathfrak{p} - 2x)$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit stattfinden, wie schon beim ersten Falle in der ersten Auflösung der 111ten Aufgabe auseinandergesetzt ist; so sind δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Es ist zunächst

$$\text{X)}\quad \delta U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta y + (2a^2p + \mathfrak{M} \cdot b) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (-2z + \mathfrak{L} \cdot \beta) \cdot \delta z + (-2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M} \cdot \beta) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta^2 y + (2a^2 \cdot p + \mathfrak{M}b) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + (-2z + \mathfrak{L}\beta) \cdot \delta^2 z + (-2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M} \cdot \beta) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + 2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2 + 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$1)\quad -2z + \mathfrak{L}\beta = 0, \text{ und } 2)\quad -2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M} \cdot \beta = 0$$

stattfinden. Dadurch reducirt sich Gleichung X auf

$$\delta U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta y + (2a^2 \cdot p + \mathfrak{M}b) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so müssen die ferneren identischen Gleichungen

$$3)\quad 2y - c + \mathfrak{L}b = 0, \text{ und } 4)\quad 2a^2p + \mathfrak{M}b = 0$$

stattfinden. Aus 1 und 2 folgt $\mathfrak{L} = +\frac{2z}{\beta}$ und $\mathfrak{M} = +\frac{2a^2 \cdot \mathfrak{p}}{\beta}$, und dabei gehen Gleichung 3 und 4 bezüglich über in

$$5)\quad 2\beta y + 2bz - \beta c = 0, \text{ und } 6)\quad \beta \cdot p + b \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Aus I folgt $z = \frac{x^2 - by}{\beta}$, und daraus gibt sich $\mathfrak{p} = \frac{2x - b \cdot p}{\beta}$; die Gleichungen 5 und 6 gehen also bezüglich über in

$$7)\quad y = \frac{\beta^2 \cdot c}{2(\beta^2 - b^2)} - \frac{b \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}, \text{ und } 8)\quad p = -\frac{2bx}{\beta^2 - b^2}$$

Integrirt man aber Gleichung 8, so bekommt man

$$9)\quad y = A - \frac{b \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}$$

Weil aber durch Gleichung 9 sowohl Gleichung 7 als auch 8 identisch werden sollen, so erkennt man, dass $A = \frac{\beta^2 \cdot c}{2(\beta^2 - b^2)}$ gesetzt werden muss, so dass Gleichung 7 die vollständig bestimmte Function y von x ist, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Da ferner $z = \frac{x^2 - by}{\beta}$, so hat man

$$10)\quad z = -\frac{b \cdot \beta \cdot c}{2 \cdot (\beta^2 - b^2)} + \frac{\beta \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}$$

Wegen der Gleichungen 1, 2, 3, 4 reducirt sich Gleichung XI auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2 + 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

welche noch übergeht in

$$\delta^2 U = \frac{2 \cdot (\beta^2 - b^2)}{\beta^2} \cdot \left(\delta y^2 + a^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)$$

Digitized by Google

ist nun $\beta > b$, so findet ein Minimum-stand, und ist $\beta < b$, so findet ein Maximum-stand statt.

Zweiter Fall. Wenn man an den Gleichungen V und VI dieselbe Voruntersuchung vornimmt, wie beim zweiten Falle in der ersten Auflösung der 111ten Aufgabe geschehen ist; so erkennt man, dass auch hier die nemliche Einschränkung gemacht werden kann. Dabei ist $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$, etc., und man bekommt nur

$$\text{XII)} \quad \delta U = (2a^2 \cdot p + \mathfrak{M}b) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (-2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M} \cdot \beta) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Elemente $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$11) \quad -2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M}\beta = 0$$

stattfindet. Dabei bleibt nur $\delta U = (2a^2 \cdot p + \mathfrak{M} \cdot b) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$. Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss die fernere identische Gleichung

$$12) \quad 2a^2 \cdot p + \mathfrak{M}b = 0$$

stattfinden. Aus 11 folgt $\mathfrak{M} = \frac{2a^2 \cdot \mathfrak{p}}{\beta}$, und somit geht 12 über in $\beta p + b \cdot \mathfrak{p} = 0$. Daraus folgt

$$13) \quad \beta y + bz = B$$

Verbindet man diese Gleichung mit I, so ergibt sich

$$14) \quad y = + \frac{B \cdot \beta}{\beta^2 - b^2} - \frac{b \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}$$

$$15) \quad z = - \frac{Bb}{\beta^2 - b^2} + \frac{\beta x^2}{\beta^2 - b^2}$$

Diese Functionen enthalten noch einen willkürlichen Constanten, können also noch einer Nebenbedingung unterworfen werden; sie geben namentlich in die Gleichungen 7 und 10 über, wenn man $B = + \frac{\beta \cdot c}{2}$ setzt. Mutirt man Gleichung XII noch einmal, so bekommt man

$$\delta^2 U = (2a^2 \cdot p + \mathfrak{M}b) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + (-2a^2 \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{M}\beta) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Wegen der Gleichungen 11 und 12 reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\delta^2 U = 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2a^2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 = \frac{2a^2}{\beta^2} \cdot (\beta^2 - b^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Es findet also wieder ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt, je nachdem $\beta < b$ oder $\beta > b$ ist.

Dritter Fall. Wenn man $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. setzt, so wird in dieser Aufgabe auch $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc., wie man an den Gleichungen VII und VIII erkennt. Aus dieser Voruntersuchung folgt, dass man in dieser Aufgabe folgende Einschränkung machen kann:

Man suche für y und z nur diejenigen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen, von welchen bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er gemacht werden kann, wenn man

1) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des y nur diejenigen setzt, welche nicht nur
   α) der für y gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

Digitized by Google

β) bei dem grade genommenen Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der erste Differentialquotient der für y gesuchten Function annimmt; und wenn man

2) aus allen möglichen, der Bedingungsgleichung I entsprechenden, Functionen an die Stelle des z diejenigen setzt, welche nicht nur

α) der für z gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei dem grade genommenen Werthe des x alle ihrem ersten Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der erste Differentialquotient der für z gesuchten Function annimmt.

Dabei reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XIII)}\quad \delta U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta y + (-2z + \mathfrak{L}\beta) \cdot \delta z$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Elemente δz ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$16)\quad -2z + \mathfrak{L}\beta = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung XIII auf $\delta U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta y$. Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, muss die weitere identische Gleichung

$$17)\quad 2y - c + \mathfrak{L}b = 0$$

stattfinden. Eliminirt man $\mathfrak{L}$ aus den Gleichungen 16 und 17, so ergibt sich

$$18)\quad 2\beta y + 2bz = \beta c$$

Verbindet man diese Gleichung mit I, so bekommt man

$$19)\quad y = + \frac{\beta^2 \cdot c}{2 \cdot (\beta^2 - b^2)} - \frac{b \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}$$

$$20)\quad z = - \frac{b\beta c}{2 \cdot (\beta^2 - b^2)} + \frac{\beta \cdot x^2}{\beta^2 - b^2}$$

Dieses sind aber genau wieder die Gleichungen 7 und 10. Mutirt man Gleichung XIII noch einmal, so bekommt man

$$\delta^2 U = (2y - c + \mathfrak{L}b) \cdot \delta^2 y + (-2z + \mathfrak{L}\beta) \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2$$

Dieser Ausdruck reducirt sich aber wegen der Gleichungen 17 und 18 gradezu auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \delta z^2 = \frac{2 \cdot (\beta^2 - b^2)}{\beta^2} \cdot \delta y^2$$

so dass auch jetzt ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, je nachdem $\beta < b$ oder $\beta > b$ ist.

Aufgabe 114.

Man soll unter allen räumlichen Curven, welche auf der durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad y^2 + z^2 = x^2$$

dargestellten Fläche liegen, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man hierauf diese von zwei in festen Punkten der Abscissenaxe senkrechten Ebenen begränzt, die so begränzte Berührungslinie grösser oder kleiner wird, als die zu derselben Abscisse x gehörigen und von denselben festen Ebenen begränzten Berührungslinien aller andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) sich alle in der gegebenen Fläche befinden,

gemacht werden können.

Nach der 104ten Aufgabe soll wieder

$$\text{II)}\quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

Digitized by Google

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während durch Gleichung I die zwischen y und z stattfindende Abhängigkeit gegeben ist.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z und $\frac{dz}{dx}$ als mittelbar mutabel behandelt wird. Mutirt man I, so bekommt man

$$\text{III)}\quad y \cdot \delta y + z \cdot \delta z = 0, \quad \text{IV)}\quad y \cdot \delta^2 y + \delta y^2 + \delta z^2 + z \cdot \delta^2 z = 0$$

etc.

Man differentiire Gleichung I in der Weise, dass man y und z als Functionen von x betrachtet; und dabei bekommt man $y \cdot \frac{dy}{dx} + z \cdot \frac{dz}{dx} = x$. Mutirt man diese letztere Gleichung, so gibt sich

$$\text{V)}\quad y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \delta y + z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \frac{dz}{dx} \cdot \delta z = 0$$

$$\text{VI)}\quad y \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y + 2 \cdot \frac{d\delta z}{dx} \cdot \delta z + \frac{dz}{dx} \cdot \delta^2 z + z \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$$

etc. etc.

Erste Auflösung.

Aus Gleichung I folgt $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, und $\mathfrak{p} = \frac{x - py}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. Setzt man diesen für $\mathfrak{p}$ gefundenen Ausdruck in II ein, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{\frac{2x^2 - y^2 + p^2 \cdot x^2 - 2p \cdot x \cdot y}{x^2 - y^2}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot x}{U \cdot (x^2 - y^2)} \cdot (px - y) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{py - x}{x^2 - y^2} \cdot \delta y\right)$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als er bei der nemlichen Abscisse x von allen möglichen Curven, die sich in der gegebenen Fläche befinden, und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, gemacht werden kann; so sind jetzt δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Es kann also nur dann $\delta U = 0$ werden, wenn die identische Gleichung

$$1)\quad px - y = 0$$

stattfindet. Daraus folgt

$$2)\quad y = A \cdot x$$

Eliminirt man y aus I und 2, so bekommt man

$$3)\quad z = \left(\sqrt{1 - A^2}\right) \cdot x$$

Die gesuchte Curve ist also eine grade Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Grade auch ihre eigene Berührende ist. Dabei ist $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{2}$, und

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{x^2 \cdot (1 - A^2) \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Das Radical $\sqrt{2}$ ist nur positiv, weil in Gleichung II das Radical $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ als positiv vorausgesetzt ist (man sehe die Einleitung zu Aufgabe 104). Ferner ist $(1 - A^2)$ positiv, weil sonst (nach Gleichung 3) das z imaginär wäre. Es ist also $\delta^2 U$ positiv, und somit findet ein Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Die unmittelbaren Mutationscoefficienten δy, $\delta^2 y$ etc. sind ganz willkürlich. Man kann sich also solche Functionen darunter denken, dass bei dem für x grade genommenen Werthe einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. Dabei ist dann nothwendig auch $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc., wie man an den Gleichungen III und IV erkennen mag. Aus dieser Voruntersuchung folgt, dass folgende Einschränkung möglich ist:

Digitized by Google

Man suche nur diejenige in der gegebenen Fläche liegende Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, welche nicht nur

α) sich alle in der gegebenen Fläche befinden, sondern auch

β) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, und zugleich

γ) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungspunkt gemeinschaftlich haben,

gemacht werden kann. Hier muss bei dem grade genommenen Werthe des x nicht nur $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. sein, sondern es muss auch noch gleichzeitig $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc. sein; und dass beide Systeme von Gleichungen gleichzeitig mit einander bestehen können, geht aus obiger Voruntersuchung hervor. Gleichung VIII reducirt sich nun auf

$$\text{IX)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot x}{U \cdot (x^2 - y^2)} \cdot (px - y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgen wieder die Gleichungen 1, 2, 3, und $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{2}$, und

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 - A^2) \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

so dass wieder ein Minimum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Die Form der Ausdrücke $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ etc. ist zugleich mit der Form der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. gegeben. Man kann sich nun unter δy, $\delta^2 y$ etc. solche Functionen denken, dass bei dem grade genommenen Werthe des x einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., ohne dass $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. stattfinden muss. An den Gleichungen V und VI erkennt man aber, dass, wenn gleich $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. sind, die mittelbaren Ausdrücke $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ etc. doch nicht nothwendig zu Null werden müssen, sondern dazu wäre erforderlich, dass man auch die willkürlichen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. zu Null macht, wobei dann von keiner Mutation die Rede sein könnte.

Somit steht es nicht in unserer Willkür, die gesuchte Curve nur aus der Zahl derjenigen herauszuwählen, deren zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungslinien alle miteinander parallel laufen, weil dazu nöthig ist, dass gleichzeitig $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc. ist, wie in den vorhergehenden Aufgaben zur Genüge vorgekommen. Man kann jedoch folgende Einschränkung machen:

Man suche nur diejenige in der gegebenen Fläche liegende Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, welche nicht nur

α) sich alle in der gegebenen Fläche befinden, sondern auch

β) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, und

γ) deren zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungslinien eine solche Lage haben, dass ihre in die Coordinatenebene XY fallenden Projectionen mit der Projection der zu derselben Abscisse x gehörigen Berührungslinie der gesuchten Curve parallel laufen,

gemacht werden kann; so genügt, wenn einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. Es ist nämlich $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der in XY liegenden Projection der der gesuchten Curve angehörigen Berührungslinie und von der Abscissenaxe eingeschlossen wird; und weil alle hier in Betracht zu ziehenden Projectionen miteinander parallel laufen, so schliessen sie auch alle mit der Abscissenaxe einen gleichgrossen Winkel ein. Gleichung VIII reducirt sich nun auf

$$\text{X)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot x}{U \cdot (x^2 - y^2)^2} \cdot (px - y) \cdot (py - x) \cdot \delta y$$

Digitized by Google

Daraus folgt entweder $px - y = 0$ oder $py - x = 0$.

Erstens. Ist $px - y = 0$, so bekommt man wieder die Gleichungen 1, 2, 3, und $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{2}$, und

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{x^2 \cdot (1 - A^2) \cdot \sqrt{2}} \cdot \delta y^2$$

so dass wieder ein Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Ist $py - x = 0$, so bekommt man

$$4)\quad y^2 - x^2 = B$$

und

$$5)\quad z = \sqrt{-B}$$

Aus letzterer Gleichung folgt, dass B negativ sein muss, so dass man gradezu schreiben kann

$$6)\quad x^2 - y^2 = C^2$$

und

$$7)\quad z = C$$

Die letzte Gleichung gehört zu einer auf der Axe der z senkrechten und mit der Coordinatenebene XY parallelen Ebene, so dass die jetzige Curve von einfacher Krümmung, und zwar die gleichseitige Hyperbel ist. Nun ist $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{\frac{2x^2 - C^2}{x^2 - C^2}}$ und

$$\delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot x^2}{U' \cdot (x^2 - C^2) \cdot C^2} \cdot \delta y^2$$

Da (wegen Gleichung 6) der Ausdruck $x^2 - C^2$ positiv sein muss, weil sonst y imaginär wäre; so ist $\delta^2 U$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

Man hat hier zwei verschiedene Curven, und bei beiden ist die auf vorgeschriebene Weise begränzte Berührende ein Minimum-stand. Es ist also nicht überflüssig, hier noch einmal daran zu erinnern, dass die Berührende der gefundenen Curve nur mit den Berührenden der der gefundenen Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven verglichen werden darf. Insoferne aber in beiden Fällen zu den gefundenen Curven kleinere Berührende gehören, als zu den den gefundenen Curven stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven; so muss man auch die Berührenden der beiden gefundenen Curven als Minimumstände erklären.

Zweite Auflösung.

Aus den Gleichungen III, IV, V, VI folgt der Reihe nach

$$\text{XI)}\quad \delta z = -\frac{y}{z} \cdot \delta y$$

$$\text{XII)}\quad \delta^2 z = -\frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2 - \frac{y}{z} \cdot \delta^2 y$$

$$\text{XIII)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{pz - \mathfrak{p}y}{z^2} \cdot \delta y$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} - \frac{pz - \mathfrak{p}y}{z^2} \cdot \delta^2 y - \frac{2 \cdot (y^2 + z^2)}{z^3} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$- \frac{1}{z^4} \cdot (2pyz - 3y^2 \cdot \mathfrak{p} - z^2 \cdot \mathfrak{p}) \cdot \delta y^2$$

Man mutire nun Gleichung II, und es gibt sich

$$\text{XV)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)$$

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}\right)$$
$$+ \frac{\alpha - a}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(p \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]$$

Digitized by Google

Erster Fall. Eliminirt man das mittelbare $\frac{d\delta z}{dx}$ mittelst XIII, so geht XV über in

$$\text{XVII)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{\mathfrak{p}\,(pz - \mathfrak{p}y)}{z^2} \cdot \delta y\right)$$

Lässt man hier dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der ersten Auflösung; so kann δU nur zu Null werden, wenn folgende identische Gleichung

$$8)\quad pz - \mathfrak{p}y = 0$$

stattfindet; und daraus folgt

$$9)\quad z = E \cdot y$$

Dieses ist aber die Gleichung einer in der Abscissenaxe liegenden und auf YZ senkrechten Ebene. Verbindet man diese Gleichung mit I, so ergibt sich

$$10)\quad y = \frac{1}{\sqrt{1 + E^2}} \cdot x, \qquad \text{und} \qquad 11)\quad z = \frac{E}{\sqrt{1 + E^2}} \cdot x$$

Setzt man A statt $\frac{1}{\sqrt{1 + E^2}}$, so gehen diese Gleichungen genau in die Gleichungen 2 und 3 über. Eliminirt man jetzt $\frac{d\delta z}{dx}$ und $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ aus XVI, und berücksichtigt man Gleichung 8; so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left[\frac{(y^2 + z^2) \cdot \mathfrak{p}^2}{z^2} \cdot \delta y^2 - \frac{2 \cdot (y^2 + z^2) \cdot \mathfrak{p}}{z} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{y^2 + z^2 + (py + z\mathfrak{p})^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]$$

und wenn man jetzt Ax statt y, A statt p, $(\sqrt{1 - A^2}) \cdot x$ statt z, und $(\sqrt{1 - A^2})$ statt $\mathfrak{p}$ zurückführt; so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{x^2 \cdot (1 - A^2) \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(\delta y - x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

wie bei der ersten Auflösung.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Auflösung; so reduciren sich die Gleichungen XIII und XIV auf

$$\frac{d\delta z}{dx} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \qquad \text{und} \qquad \frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$

Eliminirt man $\frac{d\delta z}{dx}$ aus XV, so bekommt man

$$\text{XVIII)}\quad \delta U = \frac{\alpha - a}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot (pz - \mathfrak{p}y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Daraus folgen wieder die Gleichungen 8, 9, 10, 2, 3; und Gleichung XVI geht über in

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 - A^2) \cdot \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

wie bei der ersten Auflösung.

Dritter Fall. Macht man hier dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der vorigen Auflösung; so reduciren sich die Gleichungen XIII und XIV auf

$$\frac{d\delta z}{dx} = -\frac{pz - \mathfrak{p}y}{z^2} \cdot \delta y$$

und

$$\frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{pz - \mathfrak{p}y}{z^2} \cdot \delta^2 y - \frac{2pyz - 3y^2 \cdot \mathfrak{p} - z^2 \cdot \mathfrak{p}}{z^4} \cdot \delta y^2$$

und wenn man $\frac{d\delta z}{dx}$ aus XV eliminirt, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad \delta U = -\frac{\alpha - a}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \mathfrak{p} \cdot (p \cdot z - \mathfrak{p} \cdot y) \cdot \delta y$$

Hier kann $\delta U = 0$ werden, entweder wenn $pz - \mathfrak{p}y = 0$ oder wenn $\mathfrak{p} = 0$.


Digitized by Google

Erstens. Setzt man $p\mathfrak{z} - \mathfrak{p}y = 0$, so bekommt man wieder die Gleichungen 8, 9, 10, 11, 2, 3; und Gleichung XVI geht über in

$$\delta^2 U = \frac{(\alpha - a)\cdot(y^2 + z^2)\cdot \mathfrak{p}^2}{z^4 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \delta y^2 = \frac{\alpha - a}{(1 - A^2)\cdot x^2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \delta y^2$$

wie im dritten Falle der ersten Auflösung.

Zweitens. Setzt man $\mathfrak{p} = 0$, so bekommt man $z = C$, und man hat wieder die Gleichungen 6 und 7. Gleichung XVI geht jetzt über in

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)$$

oder in

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{p}{z}\right)^2 \cdot \delta y^2$$

welcher Ausdruck genau derselbe ist, wie der correspondirende in der ersten Auflösung.

(Man vergleiche die Bemerkung hinter dem dritten Falle der ersten Auflösung.)

Dritte Auflösung.

Will man lieber die indirecte Eliminationsmethode mittelst der Multiplicatoren anwenden; so forme man Gleichung I um in

$$\text{XX)}\quad z^2 + y^2 - x^2 = 0$$

Hier hat man z und y als solche zusammengehörige Functionen zu betrachten, dass XX identisch wird. Differentiirt man, so muss folgende Gleichung

$$\text{XXI)}\quad z \cdot \mathfrak{p} + y \cdot p - x = 0$$

ebenfalls eine identische sein. Man denke sich nun unter H und K zwei (vorerst noch unbestimmte, jedenfalls aber) nichtmutable Functionen von x, multiplicire damit bezüglich die Gleichungen XX und XXI, und addire diese Producte zu Gleichung II; so wird dieselbe nicht geändert, d. h. man hat noch vollkommen genau

$$\text{XXII)}\quad U = (\alpha - a)\cdot\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} + H\cdot(y^2 + z^2 - x^2) + K\cdot(py + \mathfrak{p}z - x)$$

Erster Fall. Man mutire diese Gleichung in der Weise, dass die Elemente δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ noch ganz allgemein sind; dadurch bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXIII)}\quad \delta U = (H\cdot y + K\cdot p)\cdot\delta y &+ \left(\frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K\cdot y\right)\cdot\frac{d\delta y}{dx} \\ + (H\cdot z + K\cdot\mathfrak{p})\cdot\delta z &+ \left(\frac{(\alpha - a)\cdot\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K\cdot z\right)\cdot\frac{d\delta z}{dx}\end{aligned}$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ ganz frei sein; man denke sich also unter H und K solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$\text{12)}\quad Hz + K\cdot\mathfrak{p} = 0,\ \text{und}\ \text{13)}\quad \frac{(\alpha - a)\cdot\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K\cdot z = 0$$

stattfinden. Dadurch reducirt sich Gleichung XXIII auf

$$\delta U = (Hy + Kp)\cdot\delta y + \left(\frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K\cdot y\right)\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, müssen noch weiter die identischen Gleichungen stattfinden:

$$\text{14)}\quad H\cdot y + K\cdot p = 0,\ \text{und}\ \text{15)}\quad \frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K\cdot y = 0$$

Aus 12 und 13 folgt

$$K = -\frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p}}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}, \text{ und } H = +\frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p}^2}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Dadurch gehen die Gleichungen 14 und 15 über in

$$\frac{(\alpha - a) \cdot y \cdot \mathfrak{p}^2}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} - \frac{(\alpha - a) \cdot p \cdot \mathfrak{p}}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = 0$$

und

$$\frac{(\alpha - a) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} - \frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p} \cdot y}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = 0$$

Vereinfacht man diese beiden Gleichungen, so bekommt man

$$16) \quad \mathfrak{p} \cdot (y\mathfrak{p} - zp) = 0, \quad \text{und } 17) \quad zp - y\mathfrak{p} = 0$$

Diesen beiden Gleichungen geschieht gleichzeitig Genüge, wenn $y\mathfrak{p} - zp = 0$; und somit bekommt man wieder die Gleichungen 8, 9, 10, 11, 2, 3. Um zu erfahren, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von beiden stattfinde; mutire man Gleichung XXIII noch einmal, und man bekommt überhaupt

$$\begin{aligned}\delta^2 U = (H \cdot y + K \cdot p) \cdot \delta^2 y &+ \left(\frac{(\alpha - a) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} \\ + (H \cdot z + K \cdot \mathfrak{p}) \cdot \delta^2 z &+ \left(\frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z\right) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} \\ + H \cdot (\delta y^2 + \delta z^2) &+ 2K \cdot \left(\delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right) \\ + \frac{\alpha - a}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} &\cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\end{aligned}$$

In Folge der Gleichungen 12, 13, 14, 15 reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\begin{aligned}\delta^2 U = H \cdot (\delta y^2 + \delta z^2) &+ 2K \cdot \left(\delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right) \\ + \frac{\alpha - a}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} &\cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\end{aligned}$$

Führt man nun aus den Gleichungen XI, XIII, 12 und 13 für δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, H, K die Ausdrücke ein, und berücksichtigt man hierauf die Gleichung $z \cdot p - \mathfrak{p}y = 0$; so bekommt man

$$\begin{aligned}\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \Bigg[&\frac{(y^2 + z^2) \cdot \mathfrak{p}^2}{z^2} \cdot \delta y^2 - \frac{2 \cdot (y^2 + z^2) \cdot \mathfrak{p}}{z} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} \\ &+ \frac{y^2 + z^2 + (py + \mathfrak{p}z)^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\Bigg]\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber schon im ersten Falle der zweiten Auflösung vorgekommen.

Zweiter Fall. Man mutire Gleichung XXII mit der Einschränkung, dass $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc.; und es gibt sich

$$\text{XXIV)} \quad \delta U = \left(\frac{(\alpha - a) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z\right) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Elemente $\frac{d\delta z}{dx}$ frei sein; man denke sich also unter K eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$18) \quad \frac{(\alpha - a) \cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z = 0$$

stattfindet. Dadurch reducirt sich XXIV auf

Digitized by Google

$$\delta U = \left(\frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss die fernere identische Gleichung

$$19)\quad \frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + Ky = 0$$

stattfinden. Aus Gleichung 18 folgt aber $K = - \frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$, und dadurch geht Gleichung 19 über in $\frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} - \frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}y}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = 0$, woraus die einfachere Gleichung $pz - \mathfrak{p}y = 0$ folgt, so dass sich jetzt abermals die Gleichungen 8, 9, 10, 11, 2, 3 ergeben. Um zu untersuchen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand, oder keiner von beiden stattfinde; mutire man Gleichung XXIV noch einmal, und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \left(\frac{(\alpha - a)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot y\right) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \left(\frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z\right) \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}$$
$$+ \frac{(\alpha - a)}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]$$

In Folge der Gleichungen 18 und 19 reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]$$

Setzt man nun für $\frac{d\delta z}{dx}$ seinen Ausdruck, wie er im zweiten Falle der zweiten Auflösung steht, hier ein, und berücksichtigt man $zp - \mathfrak{p}y = 0$; so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (y^2 + z^2 + (py + z\mathfrak{p})^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

welcher Ausdruck aber gradezu auf die im zweiten Falle der ersten und zweiten Auflösung befindliche einfachere Form gebracht werden kann.

Dritter Fall. Man mutire Gleichung XXII mit der Einschränkung, dass $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc.; so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \delta U = (H \cdot y + K \cdot p) \cdot \delta y + (H \cdot z + K \cdot \mathfrak{p}) \cdot \delta z + \left(\frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z\right) \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ frei sein; man denke sich also unter H und K solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$20)\quad H \cdot z + K \cdot \mathfrak{p} = 0, \quad \text{und } 21)\quad \frac{(\alpha - a)\cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + K \cdot z = 0$$

stattfinden. Dadurch reducirt sich Gleichung XXV auf

$$\delta U = (H \cdot y + K \cdot p) \cdot \delta y$$

Damit aber $\delta U = 0$ werden kann, muss noch die weitere identische Gleichung

$$22)\quad H \cdot y + K \cdot p = 0$$

stattfinden. Bestimmt man aus 20 und 21 die Ausdrücke für H und K, und setzt sie in 22 ein, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{(\alpha - a)\cdot y \cdot \mathfrak{p}^2}{z^2 \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} - \frac{(\alpha - a)\cdot p \cdot \mathfrak{p}}{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = 0$$

Digitized by Google

woraus die einfachere $\mathfrak{p}\cdot(y\cdot\mathfrak{p} - z\cdot p) = 0$ folgt. Man hat also jetzt

entweder 23) $y\cdot\mathfrak{p} - z\cdot p = 0$, oder 24) $\mathfrak{p} = 0$

Mutirt man Gleichung XXV noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\delta^2U = (H\cdot y + K\cdot p)\cdot\delta^2y + (H\cdot z + K\cdot\mathfrak{p})\cdot\delta^2z + \left(\frac{(\alpha - a)\cdot\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} + K\cdot z\right)\cdot\frac{d\delta^2z}{dx}$$
$$+ H\cdot(\delta y^2 + \delta z^2) + 2\cdot K\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx} + \frac{\alpha - a}{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(1+p^2)\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Allein wegen Gleichung 20, 21, 22 reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\text{XXVI)}\quad \delta^2U = H\cdot(\delta y^2 + \delta z^2) + 2K\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx} + \frac{\alpha - a}{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(1+p^2)\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Erstens. Setzt man $y\mathfrak{p} - zp = 0$, so bekommt man wieder die Gleichungen 8, 9, 10, 11, 2 und 3. Führt man für H und K die Ausdrücke aus den Gleichungen 20. 21, und für δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ die Ausdrücke, wie sie im dritten Falle der zweiten Auflösung stehen, in XXVI ein; so bekommt man

$$\delta^2U = \frac{(\alpha - a)\cdot(y^2 + z^2)\cdot\mathfrak{p}^2}{z^4\cdot\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\cdot\delta y^2$$

Dieser Ausdruck steht aber schon im dritten Falle der zweiten Auflösung.

Zweitens. Setzt man $\mathfrak{p} = 0$, so bekommt man $z = C$, und $x^2 - y^2 = C^2$, welches wieder die Gleichungen 6 und 7 sind. Führt man nun in Gleichung XXVI für H, K, δz, $\frac{d\delta z}{dx}$ die Ausdrücke ein, und berücksichtigt man $\mathfrak{p} = 0$; so bekommt man

$$\delta^2U = \frac{\alpha - a}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\left(\frac{p}{z}\right)^2\cdot\delta y^2$$

welcher Ausdruck schon im dritten Falle der zweiten Auflösung vorgekommen ist.

(Man vergleiche die Bemerkung hinter dem dritten Falle der ersten Auflösung.)

Aufgabe 115.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Normalebenen alle durch den nemlichen festen Punkt (n, m, l) gehen, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Willkür gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man hierauf diese von zwei in festen Punkten der Abscissenaxe senkrechten Ebenen begränzt, die so begränzte Berührungslinie grösser oder kleiner wird, als die zu derselben Abscisse x gehörigen und von denselben festen Ebenen begränzten Berührungslinien aller andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden können.

Die Normalebene im Allgemeinen hat die Gleichung

$$\text{I)}\quad (x'' - x) + (y'' - y)\cdot p + (z'' - z)\cdot\mathfrak{p} = 0$$

Hier sind x'', y'', z'' die veränderlichen Coordinaten der Normalebene, dagegen x, y, z sind die (gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Curve, in welchen man grade die Normalebene legt. Da die Normalebene durch den festen Punkt (n, m, l) geht, so ist für diesen Punkt

$$\text{II)}\quad (n - x) + (m - y)\cdot p + (l - z)\cdot\mathfrak{p} = 0$$

Jede räumliche Curve, durch welche diese Differentialgleichung der ersten Ordnung

Digitized by Google

identisch wird, hat die Eigenschaft, dass alle ihre Normalebenen durch den Punkt (n, m, l) gehen; und wenn man diese Gleichung, welche, weil y und z als Functionen von x gedacht werden müssen, eine totale Differentialgleichung ist, integrirt; so bekommt man

$$\text{III)} \quad (n - x)^2 + (m - y)^2 + (l - z)^2 = r^2$$

wo r ein noch willkürlicher Constanter ist, so dass durch Gleichung III jede beliebige Kugelfläche vorgestellt wird, die ihren Mittelpunkt in dem festen Punkte (n, m, l) hat. Daraus folgt: „Jede beliebige Linie auf allen den Kugelflächen, deren Mittelpunkt der Punkt (n, m, l) ist, hat in allen ihren Punkten die Eigenschaft, dass alle ihre Normalebenen durch den festen Punkt (n, m, l) gehen." Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man den Punkt (n, m, l) als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt; und dabei ist $m = 0$, $n = 0$, $l = 0$, so dass Gleichung III sich zurückzieht auf

$$\text{IV)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Die festen Punkte der Abscissenaxe, in welchen man die (in der Aufgabe vorgeschriebenen) senkrechten Ebenen errichtet, sollen gegeben sein durch $x = a$ und $x = \alpha$; und somit ist die Aufgabe jetzt folgende: Es soll

$$\text{V)} \quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y und z zu suchenden Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei Gleichung IV identisch wird. Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z und somit auch $\frac{dz}{dx}$ als mittelbar mutabel betrachtet werden, und eliminire z und $\frac{dz}{dx}$ schon vor dem Mutiren. Aus IV folgt $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, und somit ist $\frac{dz}{dx} = \frac{-x - p \cdot y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$. Führt man nun diesen für $\mathfrak{p}$ gefundenen Ausdruck in V ein, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{\frac{r^2 - y^2 + p^2 \cdot r^2 - p^2 \cdot x^2 + 2p \cdot x \cdot y}{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Mutirt man, so gibt sich

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2}{U} \cdot \frac{x \cdot y + p \cdot (r^2 - x^2)}{r^2 - x^2 - y^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{x + py}{r^2 - x^2 - y^2} \cdot \delta y\right)$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, welche bei einer nach Belieben gewählten Abscisse x den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als er bei der nemlichen Abscisse x von allen möglichen Curven, deren Normalebenen durch den festen Punkt (n, m, l) gehen, und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, gemacht werden kann; so sind jetzt δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Es kann also nur dann $\delta U = 0$ werden, wenn die identische Gleichung

$$1) \quad x \cdot y + p \cdot (r^2 - x^2) = 0$$

stattfindet. Daraus folgt $\frac{dy}{y} = \frac{-x \cdot dx}{r^2 - x^2}$, und somit ist $\lg \text{nat}\, y = C + \frac{1}{2} \cdot \lg \text{nat}$ $(r^2 - x^2)$, oder mit Aenderung des Constanten

$$2) \quad y = A \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Diese Gleichung kann man auch umformen in

$$3) \quad \left(\frac{y}{A \cdot r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

Der gesuchten Curve Projection in der Coordinatenebene XY ist also eine Ellipse. Eliminirt man x aus IV, so bekommt man

$$4) \quad z = \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A} \cdot y$$

Digitized by Google

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht, und in der Abscissenaxe folglich auch im Mittelpunkte der durch Gleichung IV dargestellten Kugel liegt. Die gesuchte Curve ist also eine ebene Curve, und zwar derjenige grösste Kreis, welcher in der durch den jedesmaligen Berührungspunkt und durch die Abscissenaxe gehenden Ebene liegt. Ferner ist

$$U' = \frac{(\alpha - a) \cdot r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und

$$\delta^2 U = \frac{\alpha - a}{(1 - A^2) \cdot r \cdot (r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \left(x \cdot \delta y + (r^2 - x^2) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Da $(1 - A^2)$ positiv ist, weil sonst (nach Gleichung 4) das z imaginär wäre; so ist auch $\delta^2 U$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

Man hat hier die zwei Constanten r und A zu bestimmen.

α) Soll z. B. die gesuchte Curve durch den bestimmten Punkt (g, h, k) gehen, so gehen die Gleichungen IV und 2 bezüglich über in

$$g^2 + h^2 + k^2 = r^2, \text{ und } h = A \cdot \sqrt{r^2 - g^2}$$

woraus sich A und r bestimmen lassen, so dass jetzt eine einzige Bedingung zur Bestimmung der beiden Constanten hinreicht.

β) Es ist $\frac{dy}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe X und der in der Coordinatenebene XY liegenden Projection der Berührenden eingeschlossen wird; ebenso ist $\frac{dz}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der Abscissenaxe X und der in der Coordinatenebene XZ liegenden Projection der Berührenden eingeschlossen wird. Sollen nun bei der Abscisse $x = g$ diese beiden goniometrischen Tangenten bezüglich die Werthe e und f haben; so bekommt man, da aus den Gleichungen 2 und 4 jetzt $\frac{dy}{dx} = \frac{-A \cdot x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{-x \cdot \sqrt{1 - A^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ folgt, bezüglich die Gleichungen

$$\frac{-A \cdot g}{\sqrt{r^2 - g^2}} = e, \quad \text{und} \quad \frac{-g \cdot \sqrt{1 - A^2}}{\sqrt{r^2 - g^2}} = f$$

woraus $A = \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}}$ und $r = g \cdot \sqrt{1 + e^2 + f^2}$ folgt. Hier waren aber zwei Bedingungen nöthig.

Und so fort.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Voruntersuchung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe; so erkennt man, dass folgende Einschränkung möglich ist:

Man suche aus allen den Curven, deren Normalebenen durch den festen Punkt (n, m, l) gehen, diejenige heraus, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, bei denen nicht nur

- α) die Normalebenen immer durch den festen Punkt (n, m, l) gehen, sondern welche auch
- β) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, und zugleich
- γ) mit ihr den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungspunkt gemeinschaftlich haben,

gemacht werden kann. Hier muss bei dem grade genommenen Werthe des x nicht nur $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. sein, sondern es muss auch noch gleichzeitig $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc. sein; und dass beide Systeme von Gleichungen gleichzeitig miteinander bestehen können, wird aus der oben besagten Voruntersuchung, wenn man sie anstellt, hervorgehen. Gleichung VII reducirt sich jetzt auf

$$\text{VIII)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot (x \cdot y + p \cdot r^2 - p \cdot x^2)}{U \cdot (r^2 - x^2 - y^2)} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Digitized by Google

Daraus folgen wieder die Gleichungen 1, 2, 3, 4, und

$$U' = \frac{(\alpha - a) \cdot r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und

$$\delta^2 U = \frac{(\alpha - a) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}{(1 - A^2) \cdot r} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

woran man erkennt, dass wieder ein Minimum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Die Form der Ausdrücke $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ etc. ist zugleich mit der Form der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. gegeben; man kann sich also unter δy, $\delta^2 y$ etc. solche Functionen denken, wo bei dem grade für x genommenen Werthe einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., ohne dass zugleich $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. stattfinden muss. Nun ist $\frac{dz}{dx} = \frac{-x - p \cdot y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, und daraus folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., dass

$$\frac{d\delta z}{dx} = -\frac{x \cdot y + p \cdot r^2 - p \cdot x^2}{(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta y$$

und

$$\frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{x \cdot y + p \cdot r^2 - p \cdot x^2}{(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta^2 y$$

$$- \frac{r^2 \cdot x - x^3 + 2x \cdot y^2 + 3py \cdot r^2 - 3py \cdot x^2}{(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \delta y^2$$

etc. etc.

Daran erkennt man, dass, wenn gleich $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc. sind, die mittelbaren Ausdrücke $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ etc. doch nicht nothwendig zu Null werden müssen, sondern dazu wäre erforderlich, dass man auch die willkürlichen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. zu Null macht, so dass von keiner Mutation die Rede sein könnte.

Somit steht es nicht in unserer Willkür, die gesuchte Curve nur aus der Zahl derjenigen herauszuwählen, deren zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungslinien alle parallel miteinander laufen, weil dazu nöthig ist, dass gleichzeitig $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc., wie in früheren Aufgaben zur Genüge nachgewiesen ist. Man kann jedoch folgende Einschränkung machen:

Man suche aus allen den Curven, deren Normalebenen durch den festen Punkt (n, m, l) gehen, diejenige heraus, von welcher bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Curven, bei denen nicht nur

α) die Normalebenen immer durch den festen Punkt (n, m, l) gehen, sondern welche auch

β) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, und

γ) deren zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Berührungslinien eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XY fallenden Projectionen mit der Projection der zu derselben Abscisse x gehörigen Berührungslinie der gesuchten Curve parallel laufen,

gemacht werden kann; so genügt, wenn einzeln stattfindet $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc., wie aus dem dritten Falle der ersten Auflösung in voriger Aufgabe bekannt ist. Gleichung VII reducirt sich jetzt auf

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad \delta U = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot (xy + p \cdot r^2 - p \cdot x^2) \cdot (x + py)}{U \cdot (r^2 - x^2 - y^2)^2} \cdot \delta y$$

Hier kann $\delta U = 0$ werden, entweder wenn $xy + p \cdot r^2 - p \cdot x^2 = 0$ oder wenn $x + py = 0$ ist.

Erstens. Ist $xy + p \cdot r^2 - p \cdot x^2 = 0$, so bekommt man wieder die Gleichungen 2, 3, 4. Ferner ist

$$U' = \frac{(\alpha - a) \cdot r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \text{ und } \delta^2 U = \frac{(\alpha - a) \cdot x^2}{(1 - A^2) \cdot r \cdot (r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} \cdot \delta y^2$$

Es findet also ein Minimum-stand statt.

Zweitens. Ist $x + p \cdot y = 0$, so ist $x^2 + y^2 = B^2$; und wenn man x und y aus IV eliminirt, so bekommt man $z = \sqrt{r^2 - B^2}$. Diese Gleichung gehört aber zu einer auf der Axe Z senkrechten und mit der Coordinatenebene XY parallelen Ebene, so dass die jetzige Curve jeder mit der Coordinatenebene XY parallele Kreis sein kann. Sie ist ein grösster, aber auch zugleich in der Coordinatenebene XY selbst liegender Kreis, wenn $B^2 = r^2$. Hierbei ist

$$U' = \frac{(\alpha - a) \cdot B}{\sqrt{B^2 - x^2}} \text{ und } \delta^2 U = \frac{(\alpha - a) \cdot x^2}{B \cdot (r^2 - B^2) \cdot \sqrt{B^2 - x^2}} \cdot \delta y^2$$

Es findet also abermals ein Minimum-stand statt.

Darüber, dass es in diesem dritten Falle zwei verschiedene Curven gibt, welche einen Minimum-stand liefern, vergleiche man die hinter dem dritten Falle der ersten Auflösung in voriger Aufgabe gemachte Bemerkung.

Aufgabe 116.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Berührungslinien immer durch den nemlichen festen Punkt hindurchgehen, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Berührungslinie zieht, und wenn man hierauf von zwei im Raume irgendwo festliegenden Punkten Perpendikel auf diese Berührungslinie fällt, die Summe dieser beiden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die im Raume festliegenden Punkte (fig. 20) seien H und K. Der Punkt, durch welchen alle Berührenden gehen sollen, sei D. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe in die Punkte H und K legt. Die Coordinatenebenen XY und XZ liegen dabei in der Linie OX. Hierauf lege man in den Punkt D eine auf OX senkrechte Ebene, so gibt sich der Punkt O; und diesen nehme man zum Anfange der Coordinaten. Die in Rede stehenden Perpendikel HM und KN haben jetzt die Projectionen Hm, Hm', und Kn, Kn'. Der nunmehr in der Coordinatenebene YZ liegende Punkt D hat die Projectionen d und d'. Die Gleichungen der berührenden Graden sind $y' - y = (x' - x) \cdot p$ und $z' - z = (x' - x) \cdot \mathfrak{p}$. Für den Punkt D ist $x' = 0$; also ist $Od' = y' = y - p \cdot x$, und $Od = z' = z - \mathfrak{p} \cdot x$. Ferner ist (nach der 107ten Aufgabe)

$$HM = \sqrt{\frac{((a - x)\, p + y)^2 + ((a - x)\, \mathfrak{p} + z)^2 + (zp - y\mathfrak{p})^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{u}^2 + u^2 + \omega^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

und

$$KN = \sqrt{\frac{((\alpha - x)\, p + y)^2 + ((\alpha - x)\, \mathfrak{p} + z)^2 + (zp - y\mathfrak{p})^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \sqrt{\frac{w^2 + \mathfrak{w}^2 + \omega^2}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Erst wenn die gesuchte Curve gefunden ist, kann man beurtheilen, ob die beiden Radicale gleiche oder entgegengesetzte Bedeutung haben müssen. Nun verlangt die Aufgabe, dass die Summe der beiden Linien HM und KN, diese mögen einerlei oder entgegengesetzte Richtung im Raume haben, ein Maximum-stand oder Minimum-stand

Digitized by Google

werde. Man lege also, damit auch wirklich die Summe und nicht die Differenz der beiden Linien HM und KN stattfinde, den beiden Radicalen einerlei Bedeutung bei; und da kein Grund vorhanden ist, warum man ihnen vorzugsweise ihre negative Bedeutung beilegen sollte, so lege man ihnen ohneweiters ihre positive Bedeutung bei, und stelle die Aufgabe auf folgende Weise:

Es soll

$$\text{I)} \quad U = HM + KN = \left(\sqrt{\frac{u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2}{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2}{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während noch die Bedingungsgleichungen

$$\text{II)} \quad y - p\cdot x = g, \quad \text{und} \quad \text{III)} \quad z - \mathfrak{p}\cdot x = h$$

gegeben sind, wo g und h bestimmte constante (positive oder negative) Werthe haben.

Erste Auflösung.

Man mutire Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$ bezüglich statt $\sqrt{u^2+\mathfrak{u}^2+\omega^2}$, $\sqrt{w^2+\mathfrak{w}^2+\omega^2}$ und $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\delta U = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{K}^3}\Big\{[\mathfrak{B}(u-\omega\mathfrak{p}) + \mathfrak{A}(w-\omega\mathfrak{p})]\cdot\mathfrak{K}^2\cdot\delta y + [\mathfrak{B}(\mathfrak{u}+\omega p) + \mathfrak{A}(\mathfrak{w}+\omega p)]\cdot\mathfrak{K}^2\cdot\delta z$$
$$+ [\mathfrak{B}(u(a-x)+\omega z)\cdot\mathfrak{K}^2 + \mathfrak{A}(w(\alpha-x)+\omega z)\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot p]\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ [\mathfrak{B}(\mathfrak{u}(a-x)-\omega y)\cdot\mathfrak{K}^2 + \mathfrak{A}(\mathfrak{w}(\alpha-x)-\omega y)\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}]\cdot\frac{d\delta z}{dx}\Big\}$$

Aus den Bedingungsgleichungen II und III folgt aber

$$\delta y = x\cdot\frac{d\delta y}{dx}, \quad \text{und} \quad \delta z = x\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

Eliminirt man δy und δz, so bekommt man

$$\delta U = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{K}^3}\Big\{[(\mathfrak{B}(au+\omega z-\omega\mathfrak{p}x) + \mathfrak{A}(\alpha w+\omega z-\omega\mathfrak{p}x))\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot p]\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ [(\mathfrak{B}(a\mathfrak{u}-\omega y+\omega px) + \mathfrak{A}(\alpha\mathfrak{w}-\omega y+\omega px))\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}]\cdot\frac{d\delta z}{dx}\Big\}$$

Daraus folgen nun die zwei Gleichungen

$$\text{IV)} \quad (\mathfrak{B}(au+\omega z-\omega\mathfrak{p}x) + \mathfrak{A}(\alpha w+\omega z-\omega\mathfrak{p}x))\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot p = 0$$

$$\text{V)} \quad (\mathfrak{B}(a\mathfrak{u}-\omega y+\omega px) + \mathfrak{A}(\alpha\mathfrak{w}-\omega y+\omega px))\cdot\mathfrak{K}^2 - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p} = 0$$

Schreibt man die von $\mathfrak{K}$ freien Theilsätze dieser Gleichungen auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, und dividirt man dann mit der zweiten in die erste; so bleibt

$$\text{VI)} \quad \frac{\mathfrak{B}(au+\omega z-\omega\mathfrak{p}x) + \mathfrak{A}(\alpha w+\omega z-\omega\mathfrak{p}x)}{\mathfrak{B}(a\mathfrak{u}-\omega y+\omega px) + \mathfrak{A}(\alpha\mathfrak{w}-\omega y+\omega px)} = \frac{p}{\mathfrak{p}}$$

Multiplicirt man die beiden Nenner hinweg, und führt man dann für u, $\mathfrak{u}$, w, $\mathfrak{w}$, ω die Ausdrücke zurück; so bekommt man

$$\text{VII)} \quad (zp - y\mathfrak{p})\cdot[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(yp + z\mathfrak{p} - x\cdot p^2 - x\cdot\mathfrak{p}^2) - \mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}a] = 0$$

Setzt man nun $zp - y\mathfrak{p} = 0$, so bekommt man

$$\text{VIII)} \quad z = E\cdot y$$

d. h. die gesuchte Curve liegt in der durch Gleichung VIII gegebenen Ebene, ist also von einfacher Krümmung. Diese Ebene liegt aber in der Abscissenaxe, und steht auf der Coordinatenebene YZ senkrecht. Aus Gleichung VIII folgt noch

$$\text{IX)} \quad \mathfrak{p} = E\cdot p$$

Führt man für z und $\mathfrak{p}$ die Ausdrücke in die Gleichungen IV und V ein; so bekommt man bezüglich

$$\text{X)} \quad [a + \alpha + (2x\cdot p^2 - 2py)\cdot(1+E^2)]\cdot[y + (a-x)\cdot p]\cdot$$
$$[y + (\alpha - x)\cdot p]\cdot\sqrt{1+E^2} = 0$$

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad [a + \alpha + (2x \cdot p^2 - 2py) \cdot (1 + E^2)] \cdot [y + (a - x) \cdot p] \cdot [y + (\alpha - x) \cdot p] \cdot E \cdot \sqrt{1 + E^2} = 0$$

Diese beiden Gleichungen liefern nun ganz das nemliche Resultat, wie sein muss. Zugleich erkennt man, dass man nur den ersten Factor dieser Gleichungen berücksichtigen darf, weil nur er die beiden Elemente a und α zugleich enthält. Man setze also

$$\text{XII)}\quad a + \alpha + (2x \cdot p^2 - 2py) \cdot (1 + E^2) = 0$$

Um diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie zuerst noch einmal; und wenn man dabei berücksichtigt, dass $dy = p \cdot dx$, so bekommt man nur

$$\text{XIII)}\quad 2\,(2px - y) \cdot dp = 0$$

Es ist also entweder $dp = 0$, oder $2px - y = 0$.

Erstens. Ist $dp = 0$, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad y = A \cdot x + B$$

und in Folge von Gleichung VIII ist

$$\text{XV)}\quad z = AE \cdot x + B \cdot E$$

Dieses sind aber die Gleichungen einer graden Linie, welche insoferne die Aufgabe löst, als eine grade Linie zugleich ihre eigene Berührende ist. Gleichung XIV enthält aber zwei willkürliche Constanten, während doch die vorgegebene Differentialgleichung XII nur von der ersten Ordnung ist. Allein der Umstand, dass XII durch XIV identisch werden muss, dient dazu, einen der Constanten durch den andern zu bestimmen. Man setze also $(Ax + B)$ statt y, und A statt p in XII überall ein, und reducire soviel als möglich; so bleibt nur $a + \alpha - 2AB \cdot (1 + E^2) = 0$, woraus $A = \frac{a + \alpha}{2B \cdot (1 + E^2)}$ folgt. Gleichung XIV und XV gehen also über in

$$\text{XVI)}\quad y = \frac{a + \alpha}{2B \cdot (1 + E^2)} \cdot x + B$$

$$\text{XVII)}\quad z = \frac{(a + \alpha) \cdot E}{2B \cdot (1 + E^2)} \cdot x + B \cdot E$$

Durch diese beiden Gleichungen müssen aber auch die Gleichungen II und III identisch werden; man führe also für y, p, z, $\mathfrak{p}$ die Ausdrücke in II und III ein, und reducire soviel als möglich, so bleibt dann bezüglich $B = g$ und $B \cdot E = h$; es ist also $B = g$ und $E = \frac{h}{g}$. Die Gleichungen XVI und XVII gehen also über in

$$\text{XVIII)}\quad y = \frac{(a + \alpha) \cdot g}{2 \cdot (g^2 + h^2)} \cdot x + g$$

$$\text{XIX)}\quad z = \frac{(a + \alpha) \cdot h}{2 \cdot (g^2 + h^2)} \cdot x + h$$

Sonach sind die Gleichungen der gesuchten Graden vollkommen bestimmt, und man kann sie keiner Nebenbedingung mehr unterwerfen. Führt man nun die für y, z, p, $\mathfrak{p}$ sich ergebenden Ausdrücke in Gleichung I ein, so bekommt man

$$\text{XX)}\quad U' = \sqrt{(a + \alpha)^2 + 4 \cdot (g^2 + h^2)}$$

Zweitens. Ist $2px - y = 0$, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad y^2 = C \cdot x$$

und in Folge von Gleichung VIII hat man $z^2 = E^2 \cdot y^2$, also ist

$$\text{XXII)}\quad z^2 = C \cdot E^2 \cdot x$$

Die jetzige Curve ist der Durchschnitt zweier auf den Coordinatenebenen YX und ZX senkrecht stehender parabolischer Cylinder. Durch Gleichung XXI muss aber Gleichung XII identisch werden; man führe also $\sqrt{Cx}$ statt y, und $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{x}}$ statt p in Gleichung XII ein, so ergibt sich $C = \frac{2\,(a + \alpha)}{1 + E^2}$; und die Gleichungen XXI und XXII gehen über in

$$\text{XXIII)}\quad y^2 = \frac{2 \cdot (a + \alpha)}{1 + E^2} \cdot x$$

Digitized by Google

und

$$\text{XXIV)}\quad z^2 = \frac{2 \cdot (a + \alpha) \cdot E^2}{1 + E^2} \cdot x$$

Die Gleichung XXIII enthält keinen Constanten mehr, welcher nicht schon in XII selbst enthalten ist. Da zugleich Gleichung XXIII kein besonderer Fall von XVI ist, so ist XXIII ein singuläres Integral. Nun ist zu untersuchen, ob durch XXIII und XXIV auch II und III identisch werden. Zu diesem Zwecke mache man die entsprechenden Substitutionen, und II und III gehen bezüglich über in

$$\sqrt{\frac{(a + \alpha) \cdot x}{2 \cdot (1 + E^2)}} = g \text{ und } \sqrt{\frac{(a + \alpha) \cdot x \cdot E^2}{2 \cdot (1 + E^2)}} = h$$

Da aber letztere Gleichungen keine identischen sind, so müssen die Gleichungen XXIII und XXIV als unbrauchbar unberücksichtigt bleiben.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchten Functionen y und z von x auch den Gleichungen II und III genügen müssen; so werden die gesuchten Functionen Integrale der Gleichungen II und III sein. Man integrire also diese Gleichungen, und forme sie zu diesem Zwecke um in $\frac{dy}{y - g} = \frac{dx}{x}$ und in $\frac{dz}{z - h} = \frac{dx}{x}$; so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad y = c \cdot x + g, \quad \text{und} \quad \text{XXVI)}\quad z = e \cdot x + h$$

Führt man nun die jetzt für y, z, p, $\mathfrak{p}$ sich ergebenden Ausdrücke in Gleichung I ein, so bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad U = \left(\sqrt{\frac{(ac + g)^2 + (ae + h)^2 + (ch - eg)^2}{1 + c^2 + e^2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{(\alpha c + g)^2 + (\alpha e + h)^2 + (ch - eg)^2}{1 + c^2 + e^2}}\right)$$

Man erkennt nun an den für y und z hergestellten Functionen, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c und des e auch stetig nebeneinander liegende Werthe des y und des z gehören; ebenso erkennt man an dem für U hergestellten Ausdrucke, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c und des e auch stetig nebeneinander liegende Werthe des U gehören. Um nun zu wissen, wann U ein Maximumstand oder Minimum-stand ist, differentiire man U nach c und e. Setzt man nach ausgeführter Differentiation noch $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$ bezüglich statt $\sqrt{(ac + g)^2 + (ae + h)^2 + (ch - eg)^2}$, statt $\sqrt{(\alpha c + g)^2 + (\alpha e + h)^2 + (ch - eg)^2}$ und statt $\sqrt{1 + c^2 + e^2}$ so gibt sich

$$\frac{d_c U}{dc} = \frac{1}{\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}^3} \cdot \Big\{[\mathfrak{H}\,(a\,(ac + g) + h\,(ch - eg)) + \mathfrak{G}\,(\alpha\,(\alpha c + g) + h\,(ch - eg))] \cdot \mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{G} + \mathfrak{H})\,\mathfrak{G}\mathfrak{H} \cdot c\Big\}$$

und

$$\frac{d_e U}{de} = \frac{1}{\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}^3} \cdot \Big\{[\mathfrak{H}\,(a\,(ae + h) - g\,(ch - eg)) + \mathfrak{G}\,(\alpha\,(\alpha e + h) - g\,(ch - eg))] \cdot \mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{G} + \mathfrak{H})\,\mathfrak{G}\mathfrak{H} \cdot e\Big\}$$

Damit nun $\frac{d_c U}{dc} = 0$ und $\frac{d_e U}{de} = 0$ werden, müssen die beiden Gleichungen

$$\text{XXVIII)}\quad [\mathfrak{H}\,(a\,(ac + g) + h\,(ch - eg)) + \mathfrak{G}\,(\alpha\,(\alpha c + g) + h\,(ch - eg))] \cdot \mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{G} + \mathfrak{H})\,\mathfrak{G}\mathfrak{H} \cdot c = 0$$

und

$$\text{XXIX)}\quad [\mathfrak{H}\,(a\,(ae + h) - g\,(ch - eg)) + \mathfrak{G}\,(\alpha\,(\alpha e + h) - g\,(ch - eg))] \cdot \mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{G} + \mathfrak{H})\,\mathfrak{G}\mathfrak{H} \cdot e = 0$$

Digitized by Google

stattfinden. Bringt man in beiden Gleichungen die von $\mathfrak{M}$ freien Theilsätze auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, und dividirt dann die zweite in die erste; so bleibt nur

$$\frac{(a\,(ac + g) + h\,(ch - eg)) \cdot \mathfrak{H} + (\alpha\,(\alpha c + g) + h\,(ch - eg)) \cdot \mathfrak{G}}{(a\,(ae + g) - g\,(ch - eg)) \cdot \mathfrak{H} + (\alpha\,(\alpha c + g) - g \cdot (ch - eg)) \cdot \mathfrak{G}} = \frac{c}{e}$$

Multiplicirt man nun hier auf beiden Seiten die Nenner hinweg, so bekommt man

$$\text{XXX)} \quad (ch - eg) \cdot [(- a + cg + eh) \cdot \mathfrak{H} + (- \alpha + cg + eh) \cdot \mathfrak{G}] = 0$$

Setzt man $ch - eg = 0$, so wird

$$\text{XXXI)} \quad e = \frac{ch}{g}$$

Führt man diesen Ausdruck für e in Gleichung XXVIII ein, so bekommt man

$$\text{XXXII)} \quad \left[(a + \alpha) \cdot \left(1 + c^2 + \frac{h^2}{g^2} \cdot c^2\right) - c\,(ac + \alpha c + 2g) \cdot \frac{g^2 + h^2}{g^2}\right] \times$$

$$(ac + g)\,(\alpha c + g) \cdot \frac{\sqrt{g^2 + h^2}}{g} = 0$$

Es ist offenbar, dass man nur den in den eckigen Klammern stehenden Factor zu Null werden lassen kann, weil nur dieser die beiden Elemente a und α zugleich enthält. Daraus folgt

$$\text{XXXIII)} \quad c = \frac{(a + \alpha) \cdot g}{2 \cdot (g^2 + h^2)}$$

Mit Zuziehung der Gleichung XXXI bekommt man ferner

$$\text{XXXIV)} \quad e = \frac{(a + \alpha) \cdot h}{2 \cdot (g^2 + h^2)}$$

Die Gleichungen XXV und XXVI gehen also jetzt über in

$$\text{XXXV)} \quad y = \frac{(a + \alpha) \cdot g}{2 \cdot (g^2 + h^2)} \cdot x + g$$

$$\text{XXXVI)} \quad z = \frac{(a + \alpha) \cdot h}{2 \cdot (g^2 + h^2)} \cdot x + h$$

Dieses sind aber genau wieder dieselben Gleichungen, wie XVIII und XIX.

Es ist bemerkenswerth, dass diese zweite Auflösung nur auf den Fall führt, welcher mit dem in der ersten Auflösung enthaltenen allgemeinen Integral übereinstimmt. Der Grund davon ist aber der, dass die in der ersten Auflösung erhaltenen singulären Integrale XXIII und XXIV gar keine Integrale der Gleichungen II und III sind, und somit die zweite Auflösung, welche ganz allein von den Integralen der Gleichungen II und III ausgeht, auch nicht auf besagte singuläre Integrale führen kann. Die zweite Auflösung ist also eben so vollständig, wie die erste.

Aufgabe 117.

Man hat bei einer auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curve in den zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene gelegt. In denselben Punkt hat man auch eine berührende Grade gelegt, deren in den Coordinatenebenen XY und XZ liegenden Projectionen die Abscissenaxe X durchschneiden. Wenn man nun die von diesen Durchschnittspunkten bis zum Ende der Abscisse sich erstreckenden Entfernungen mit der Abscisse multiplicirt, von diesen beiden Producten das Quadrat der Abscisse subtrahirt, und diese beiden Differenzen bestimmte (positive oder negative) Werthe haben sollen; welche räumliche Curve ist es, wenn zugleich die von der Normalebene und den drei Coordinatenebenen begränzte Pyramide ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Die gesuchte Curve RST habe (fig. 22) die Projectionen rst und r's't'. Die in S berührende Grade habe die Projectionen sg und s'h. Die zum Punkte S gehörige Nor-

Digitized by Google

malebene sei gegeben durch die Spuren P'Q und PQ. Wenn nun O der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so sind die Punkte w, O, v, Q die vier Ecken der in Frage stehenden Pyramide, deren Körperinhalt gegeben ist durch

$$\text{I)}\quad \frac{1}{6}\cdot Ow\cdot Ov\cdot OQ$$

Die hier in Rede stehenden Differenzen sind

$$\text{II)}\quad hk\cdot Ok - Ok^2 \text{ und III)}\quad gk\cdot Ok - Ok^2$$

und diese Differenzen sollen bezüglich die constanten Werthe A und B haben.

Die Gleichung der Normalebene ist im Allgemeinen

$$(x'' - x) + (y'' - y)\cdot p + (z'' - z)\cdot \mathfrak{p} = 0$$

Für den Punkt w verschwinden x'' und z'', für den Punkt v verschwinden x'' und y'', und für den Punkt Q verschwinden y'' und z''. Es ist also

$$y'' = Ow = \frac{1}{p}\cdot(x + py + \mathfrak{p}z),\quad z'' = Ov = \frac{1}{\mathfrak{p}}\cdot(x + py + \mathfrak{p}z)$$

$$\text{und } x'' = OQ = (x + py + \mathfrak{p}z)$$

Man bekommt also nach I für den Körperinhalt der Pyramide

$$\text{IV)}\quad U = \frac{1}{6\cdot p\cdot \mathfrak{p}}\cdot(x + py + \mathfrak{p}z)^3$$

Da ferner $hk = ks'\cdot \cot g\, s'hk = y\cdot\frac{1}{p} = \frac{y}{p}$; und da ebenso $gk = ks\cdot\cot g\, sgk = z\cdot\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{z}{\mathfrak{p}}$; so geben die in II und III aufgestellten Differenzen noch folgende Bedingungsgleichungen

$$\text{V)}\quad \frac{y}{p}\cdot x - x^2 = A,\quad \text{und VI)}\quad \frac{z}{\mathfrak{p}}\cdot x - x^2 = B$$

Erste Auflösung.

Mutirt man Gleichung IV, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U = \frac{(x + py + \mathfrak{p}z)^2}{6\cdot p^2\cdot \mathfrak{p}^2}\cdot\Big[3p^2\cdot\mathfrak{p}\cdot\delta y + 3p\cdot\mathfrak{p}^2\cdot\delta z + (2yp - x - \mathfrak{p}z)\cdot\mathfrak{p}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + (2z\mathfrak{p} - x - py)\cdot p\cdot\frac{d\delta z}{dx}\Big]$$

Aus den Gleichungen V und VI aber folgt

$$\frac{d\delta y}{dx} = \frac{p}{y}\cdot\delta y \quad\text{und}\quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{\mathfrak{p}}{z}\cdot\delta z$$

Führt man diese Ausdrücke in Gleichung VII ein, so reducirt sie sich auf

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{(x + py + \mathfrak{p}z)^2}{6\cdot p\cdot\mathfrak{p}}\cdot\Big[\frac{1}{y}(5py - x - \mathfrak{p}z)\cdot\delta y + \frac{1}{z}\cdot(5\mathfrak{p}z - x - py)\cdot\delta z\Big]$$

Hier kann $\delta U = 0$ werden, wenn entweder die einzige Gleichung $x + py + \mathfrak{p}z = 0$, oder wenn gleichzeitig die beiden Gleichungen $5py - x - \mathfrak{p}z = 0$ und $5\mathfrak{p}z - x - py = 0$ stattfinden.

Erstens. Wenn gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$5py - x - \mathfrak{p}z = 0,\quad\text{und}\quad 5\mathfrak{p}z - x - py = 0$$

stattfinden; so eliminire man $\mathfrak{p}z$, und man bekommt $4py - x = 0$ Daraus folgt $4y^2 - x^2 = g$. Wenn man aber aus den beiden Differentialgleichungen py eliminirt, so bekommt man $4\mathfrak{p}z - x = 0$, und daraus folgt $4z^2 - x^2 = h$. Die gesuchte räumliche Curve ist also der Durchschnitt zweier hyperbolischer Cylinder, die bezüglich auf den Coordinatenebenen XY und XZ senkrecht stehen. Man hat aber vor Allem zu untersuchen, ob durch die gefundenen Functionen auch die Gleichungen V und VI identisch werden; man führe also $\sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + g)}$ statt y, $\frac{x}{\sqrt{4(x^2 + g)}}$ statt p,

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{1}{4}(x^2+h)}$ statt z, und $\frac{x}{\sqrt{4(x^2+h)}}$ statt $\mathfrak{p}$, in die Gleichungen V und VI ein; dadurch ergiebt sich dann $g = A$ und $h = B$, so dass die Gleichungen

$$4y^2 - x^2 = A, \text{ und } 4z^2 - x^2 = B$$

der gesuchten räumlichen Curve vollkommen bestimmt sind, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden können. Unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bekommt man nun

$$\delta^2 U = 3x \cdot \sqrt{(x^2+A)\cdot(x^2+B)} \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+A}} \cdot \delta y - \frac{1}{\sqrt{x^2+B}} \cdot \delta z\right)^2 + \frac{4}{x^2+A} \cdot \delta y^2 + \frac{4}{x^2+B} \cdot \delta z^2\right]$$

Der in die eckigen Klammern gesetzte Factor ist jedenfalls positiv, weil sowohl (x^2+A) als auch (x^2+B) positiv sind; aber der ausserhalb der eckigen Klammern befindliche Factor ist zweideutig wegen des Radicals. Da aber $U' = \frac{9}{4} \cdot x \cdot \sqrt{(A+x^2)\cdot(B+x^2)}$ ist, so sieht man, dass die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke das Radical als gemeinschaftlichen Factor enthalten; und man entscheidet sich (nach §. 114, a., S. 170) auf folgende Weise:

α) Wenn das Radical die Bedeutung hat, dass $x \cdot \sqrt{(x^2+A)\cdot(x^2+B)}$ positiv wird; so sind $\delta^2 U$ und U' zugleich positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

β) Wenn das Radical die Bedeutung hat, dass $x \cdot \sqrt{(x^2+A)\cdot(x^2+B)}$ negativ wird; so sind $\delta^2 U$ und U' zugleich negativ, und es findet ein Maximum-stand statt, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Zweitens. Wenn nur die einzige Gleichung $\mathfrak{x} + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z = 0$ stattfindet, so bekommt man

$$x^2 + y^2 + z^2 = E^2$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Kugel, deren Coordinaten im Punkte O anfangen, so dass jede auf dieser Kugelfläche gelegene Curve für die Aufgabe passen kann. Dabei ist unter allen Umständen $U' = 0$. Es ist aber auch $\delta^2 U = 0$, während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird; somit findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Da die gesuchten Functionen y und z auch den Gleichungen V und VI genügen müssen; so werden die gesuchten Functionen Integrale der Gleichungen V und VI sein. Man integrire also diese Gleichungen, und forme sie zu diesem Zwecke um in

$$\frac{dy}{y} = \frac{x \cdot dx}{x^2+A} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{z} = \frac{x \cdot dx}{x^2+B}$$

Durch Integration bekommt man bezüglich $y^2 = c \cdot (x^2+A)$ und $z^2 = e \cdot (x^2+B)$. Man hat also $y = \sqrt{c\cdot(x^2+A)}$, $z = \sqrt{e\cdot(x^2+B)}$, $p = \frac{cx}{\sqrt{c\cdot(x^2+A)}}$ und $\mathfrak{p} = \frac{e \cdot x}{\sqrt{e\cdot(x^2+B)}}$. Führt man diese Ausdrücke in IV ein, so ergibt sich

$$\text{IX)} \quad U = \frac{1}{6ce} \cdot (1+c+e)^3 \cdot x \cdot \sqrt{c\,(x^2+A)\cdot e\,(x^2+B)}$$

Man erkennt nun an den für y und z hergestellten Functionen, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c und des e auch stetig nebeneinander liegende Werthe des y und des z gehören; ebenso erkennt man an der für U hergestellten Function, dass zu stetig nebeneinander liegenden Werthen des c und des e auch stetig nebeneinander liegende Werthe des U gehören. Um nun zu wissen, wann U ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, differentiire man U nach c und e; und man bekommt

$$\frac{d_c U}{dc} = \frac{1}{12c^2 \cdot e} \cdot (1+c+e)^2 \cdot (5c - 1 - e) \cdot x \cdot \sqrt{c\,(x^2+A)\cdot e\,(x^2+B)}$$

Digitized by Google

$$\frac{d_e U}{de} = \frac{1}{12c \cdot e^2} \cdot (1 + c + e)^2 \cdot (5e - 1 - c) \cdot x \cdot \sqrt{c (x^2 + A) \cdot e (x^2 + B)}$$

Es werden aber $\frac{d_c U}{dc}$ und $\frac{d_e U}{de}$ gleichzeitig zu Null, entweder wenn die beiden Gleichungen $5c - 1 - e = 0$ und $5e - 1 - c = 0$ zugleich stattfinden; oder auch wenn nur die einzige Gleichung $1 + c + e = 0$ stattfindet.

Erstens. Wenn die beiden Gleichungen $5c - 1 - e = 0$ und $5e - 1 - c = 0$ zugleich stattfinden, so wird $c = \frac{1}{4}$ und $e = \frac{1}{4}$; und die gesuchten Functionen sind jetzt $y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + A)$ und $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + B)$, oder $4y^2 - x^2 = A$ und $4z^2 - x^2 = B$, ganz wie bei der ersten Auflösung. Ebenso ist auch jetzt wieder

$$U' = \frac{9}{4} \cdot x \cdot \sqrt{(x^2 + A)(x^2 + B)}$$

Differentiirt man zum zweiten Male nach c und nach e, und führt man dann für c und e die Werthe ein; so bekommt man

$$\frac{d_c^2 U}{dc^2} = 15 \cdot x \cdot \sqrt{(x^2 + A)(x^2 + B)}, \quad \frac{d_c d_e U}{dc \cdot de} = -3x \cdot \sqrt{(x^2 + A)(x^2 + B)}$$

$$\text{und } \frac{d_e^2 U}{de^2} = 15x \cdot \sqrt{(x^2 + A)(x^2 + B)}$$

Es ist also

$$\frac{d_c^2 U}{dc^2} \times \frac{d_e^2 U}{de^2} - \left(\frac{d_c d_e U}{dc \cdot de}\right)^2 = 216x^2 \cdot (x^2 + A)(x^2 + B)$$

jedenfalls positiv; und da die beiden Ausdrücke $\frac{d_c^2 U}{dc^2}$ und $\frac{d_e^2 U}{de^2}$ mit U' das Radical $\sqrt{(x^2 + A) \cdot (x^2 + B)}$ als gemeinschaftlichen Factor enthalten, so ist hier die Entscheidung über das Vorhandensein eines Maximum-standes oder Minimum-standes ganz die nemliche, wie im ersten Falle der ersten Auflösung.

Zweitens. Lässt man nur die einzige Gleichung $1 + e + c = 0$ stattfinden, so ist von den Elementen e und c eines willkürlich; da aber dabei gleichzeitig $\frac{d_c^2 U}{dc^2} = 0$, $\frac{d_c d_e U}{dc \cdot de} = 0$, $\frac{d_e^2 U}{de^2} = 0$ ist, während die partiellen Differentialquotienten der dritten Ordnung nicht verschwinden, so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Also Alles wie bei der ersten Auflösung.

Aufgabe 118.

Gibt es wohl unter den räumlichen Curven, deren Normalebenen alle durch eine gegebene Grade gehen, eine solche, bei welcher, wenn man sie auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezieht, das Dreieck, das die Coordinatenaxen Y und Z und die in der Coordinatenebene YZ von der Normalebene erzeugte Spur einschliessen, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

Die Gleichung der Normalebene ist

$$\text{I)} \quad (x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0.$$

Für den Punkt, wo die Normalebene in die Axe Y einschneidet, ist $x'' = 0$ und $z'' = 0$; also ist jetzt

$$\text{II)} \quad y'' = \frac{1}{p} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Digitized by Google

Für den Punkt, wo die Normalebene in die Axe Z einschneidet, ist $x'' = 0$ und $y'' = 0$; also ist jetzt

$$\text{III)} \quad z'' = \frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$$

Des in der Aufgabe besagten Dreiecks Inhalt ist also $= \frac{1}{2} \cdot y'' \cdot z''$, oder

$$\text{IV)} \quad U = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

Die Grade, durch welche alle Normalebenen gehen sollen, sei gegeben durch die Gleichungen

$$\text{V)} \quad y'' = A \cdot x'' + B, \quad \text{VI)} \quad z'' = \mathfrak{A} \cdot x'' + \mathfrak{B}$$

Liegt nun die Normalebene ganz in dieser Linie, so muss Gleichung I durch die Gleichungen V und VI bei jedem Werthe des x'' identisch werden. Führt man daher die Gleichungen V und VI in I ein, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad (1 + A \cdot p + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p}) \cdot x'' + (B - y) \cdot p + (\mathfrak{B} - z) \cdot \mathfrak{p} - x = 0$$

Aber eben weil diese Gleichung bei jedem Werthe des x'' identisch wird, so zerfällt sie gradezu in folgende zwei

$$\text{VIII)} \quad 1 + A \cdot p + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p} = 0, \text{ und IX)} \quad (y - B) \cdot p + (z - \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{p} + x = 0$$

Jede Curve, durch welche diese beiden Differentialgleichungen der ersten Ordnung identisch werden, hat die Eigenschaft, dass alle ihre Normalebenen in der durch V und VI gegebenen Graden liegen. Wenn man nun die Gleichungen VIII und IX, welche, weil y, z, p, $\mathfrak{p}$ Functionen von x sind, totale Differentialgleichungen sind, integrirt; so bekommt man

$$\text{X)} \quad x + A \cdot y + \mathfrak{A} \cdot z = n, \text{ und XI)} \quad (y - B)^2 + (z - \mathfrak{B})^2 + x^2 = m^2$$

Durch Gleichung X ist eine Ebene dargestellt, welche auf der durch V und VI gegebenen Graden senkrecht steht. Durch Gleichung XI ist eine Kugel dargestellt, deren Mittelpunkt in der Coordinatenebene YZ liegt. Für den Punkt, wo die gegebene Grade durch die Coordinatenebene YZ geht, reduciren sich die Gleichungen V und VI auf $x'' = 0$, $y'' = B$, $z'' = \mathfrak{B}$; und man erkennt, dass der Mittelpunkt der durch XI dargestellten Kugel da liegt, wo die gegebene Grade durch die Coordinatenebene YZ hindurchgeht. Nun lassen sich aus den Gleichungen X und XI für y und z Functionen absondern, welche nichts Unbestimmtes mehr enthalten, als die willkürlichen Constanten n und m; und somit ist die Aufgabe nur noch folgende: „Man soll für die Constanten n und m solche Werthe ermitteln, dass dabei

$$\text{XII)} \quad U = \frac{1}{2 \cdot p \cdot \mathfrak{p}} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird." Dazu hat man bekanntlich folgende drei Methoden:

Erste Methode. Man nehme die Gleichungen VIII, IX, X, XI, und eliminire y, z, p, $\mathfrak{p}$ aus XII. Dabei hat man zu verfahren, wie bei der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe.

Zweite Methode. Man mutire die Gleichungen VIII, IX, XII, und eliminire zwei der vier Stücke δy, δz, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$ auf directem Wege. Dabei hat man zu verfahren, wie bei der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe.

Dritte Methode. Man mutire wieder die Gleichungen VIII, IX, XII, und eliminire zwei der vier Stücke δy, δz, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$ auf indirectem Wege mittelst zweier Multiplicatoren. Auch dazu ist in den frühern Aufgaben sowie in der (im ersten Bande befindlichen) Theorie hinreichend Anleitung gegeben.

Man bemerke noch: Die gesuchte Curve liegt ganz in der Ebene $x + A \cdot y + \mathfrak{A} \cdot z = n$; also stehen alle Normalebenen der gesuchten Curve auf der Ebene $x + A \cdot y + \mathfrak{A} \cdot z = n$ senkrecht. Die gesuchte Curve liegt ganz in der Kugelfläche



$(y - B)^2 + (z - \mathfrak{B})^2 + x^2 = m^2$; also gehen alle Normalebenen der gesuchten Curve durch den Mittelpunkt dieser Kugel. Somit erkennt man, dass alle Normalebenen der gesuchten Curve in der Graden $y'' = A \cdot x'' + B$, $z'' = \mathfrak{A} \cdot x'' + \mathfrak{B}$ liegen.

Aufgabe 119.

Bei irgend einer räumlichen Curve wird in den zu einer nach Willkür genommenen Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene gelegt. Zwei in festen Punkten der Axe Y senkrechte Ebenen und ebenso zwei in festen Punkten der Axe Z senkrechte Ebenen schneiden diese Krümmungsebene, wodurch auf dieser ein Parallelogramm begränzt wird. Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven hat in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass besagtes Parallelogramm ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als das zu derselben Abscisse x gehörige und von denselben vier festen Ebenen begränzte Parallelogramm aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven?

Die Krümmungsebene sei (fig. 23) durch ihre Spuren P'Q und PQ gegeben. Die in zwei festen Punkten b und β der Axe Y senkrechten Ebenen haben die Spuren $\beta t'$ und bw'; die in zwei festen Punkten c und γ der Axe Z senkrechten Ebenen haben die Spuren ck und γu. Das auf der Krümmungsebene P'QP begränzte Parallelogramm DEFG habe die Projectionen d'e'f'g' und defg. Die Gleichung einer Krümmungsebene im Allgemeinen ist

$$\text{I)}\quad (z' - z) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - (y' - y) \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - (x' - x) \cdot \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

Wenn man noch zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$, $\mathfrak{q}$ statt $\frac{d^2z}{dx^2}$ setzt; so folgt aus letzterer Gleichung

$$\text{II)}\quad x' = \frac{(z' - z) \cdot q - (y' - y) \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p} \cdot q - p \cdot \mathfrak{q})}{\mathfrak{p} \cdot q - p \cdot \mathfrak{q}}$$

Hier sind x', y', z' die veränderlichen Coordinaten der Krümmungsebene, dagegen x, y, z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des zur Curve gehörigen Punktes, wo man grade die Berührung wählt. Es kommt also jetzt darauf an, den Inhalt des Parallelogramms DEFG zu bestimmen, was am bequemsten mittelst folgenden Lehrsatzes geschieht:

„Das Quadrat irgend einer ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate „ihrer auf die drei Cordinatenebenen projicirten Figuren."

Man setze zur Abkürzung $Ob = b$, $O\beta = \beta$, $Oc = c$, $O\gamma = \gamma$; so hat man jetzt

$$O\delta = \frac{(c - z) \cdot q - (b - y) \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p}q - p \cdot \mathfrak{q})}{\mathfrak{p} \cdot q - p \cdot \mathfrak{q}}$$

$$O\eta = \frac{(c - z) \cdot q - (\beta - y) \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

$$O\lambda = \frac{(\gamma - z) \cdot q - (b - y) \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

$$O\zeta = \frac{(\gamma - z) \cdot q - (\beta - y) \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

Das Parallelogramm defg hat den Inhalt $(\lambda g - \eta e)\,(O\eta - O\delta)$, oder

$$\text{III)}\quad (\gamma - c) \cdot \frac{(b - \beta) \cdot \mathfrak{q}}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

Das Parallelogramm d'e'f'g' hat den Inhalt $(\eta e' - \lambda g')\,(O\lambda - O\delta)$, oder

$$\text{IV)}\quad (\beta - b) \cdot \frac{(\gamma - c) \cdot q}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

Digitized by Google

Die auf die Coordinatenebene YZ bezogene Projection des Parallelogramms DEFG ist aber ein Rechteck, und dieses hat den Inhalt $(O\beta - Ob) \cdot (O\gamma - Oc)$, oder

$$\text{V)} \quad (\beta - b) \cdot (\gamma - c)$$

Setzt man nun U statt DEFG, so bekommt man nach obigem Lehrsatze

$$U^2 = (\gamma - c)^2 \cdot (b - \beta)^2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}\right)^2$$
$$+ (\gamma - c)^2 \cdot (\beta - b)^2 \cdot \left(\frac{q}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}\right)^2 + (\gamma - c)^2 \cdot (\beta - b)^2$$

Da aber $(b - \beta)^2 = (\beta - b)^2$, so geht vorige Gleichung gradezu über in

$$\text{VI)} \quad U = (\beta - b) \cdot (\gamma - c) \cdot \frac{\sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

Weil die beiden Ordinatendifferenzen $(\beta - b)$ und $(\gamma - c)$ positiv sind, so ist auch das ganze (bei den Ordinaten b und c anfangende und bis zu den Ordinaten β und γ erstreckte) Stück DEFG der Krümmungsebene positiv. Man hat desshalb das Radical zweideutig gelassen, damit man ihm, sobald man einmal weiss, ob $(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})$ positiv oder negativ ist, diejenige Bedeutung beilegen kann, bei welcher U positiv wird. Mutirt man, und setzt man dann zur Abkürzung N statt $(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2 \cdot \sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}$; so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{(\beta - b) \cdot (\gamma - c)}{N} \cdot \left[(p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q) \cdot \left(q \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2} - \mathfrak{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + (q^2 + \mathfrak{q}^2) \cdot \left(\mathfrak{q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - q \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)\right]$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Curve, von welcher bei einer nach Belieben gewählten Abscisse x das besagte Parallelogramm grösser oder kleiner gemacht wird, als es bei der nemlichen Abscisse x von allen möglichen, der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven gemacht werden kann; so müssen folgende vier identische Gleichungen stattfinden:

$$1) \quad (p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q) \cdot q = 0, \qquad 2) \quad (p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q) \cdot \mathfrak{q} = 0$$
$$3) \quad (q^2 + \mathfrak{q}^2) \cdot \mathfrak{q} = 0, \qquad 4) \quad (q^2 + \mathfrak{q}^2) \cdot q = 0$$

Diese vier Gleichungen werden aber gleichzeitig erfüllt, wenn $q = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$, und daraus folgen für y und z die Functionen

$$5) \quad y = A \cdot x + B, \text{ und } 6) \quad z = E \cdot x + F$$

Man hat also die grade Linie im Raume, bei welcher man noch die Constanten zu bestimmen hat.

1) Zwingt man diese Grade, durch zwei feste Punkte (n, m, l) und (n′, m′, l′) zu gehen; so gehen die Gleichungen 5 und 6 über in

$$m = An + B, \; l = En + F, \; m' = An' + B, \; l' = En' + F$$

und aus diesen Gleichungen kann man die Constanten A, B, E, F bestimmen.

2) Zwingt man diese Grade, durch einen festen Punkt (n, m, l) zu gehen, und ausserdem eine solche Lage anzunehmen, dass ihre in XY gelegene Projection mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen goniometrische Tangente $= g$, und dass ihre in XZ gelegene Projection mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen goniometrische Tangente $= h$; so hat man folgende Gleichungen:

$$m = An + B, \; l = En + F, \; A = g, \; E = h$$

woraus man wieder die vier Constanten A, B, E, F bestimmen kann.

Und so fort.

Mag man nun die Constanten unbestimmt lassen, oder sie auf irgend eine Weise bestimmen; es ist immer $U' = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt, was sich durch folgende geometrische Betrachtung noch näher erörtern lässt. „Die zu irgend einem Punkte der gesuchten Graden gehörige Krümmungsebene fällt ganz in die Grade hinein. In jede

Digitized by Google

grade Linie kann man aber eine unendliche Menge sich durch ihre Richtung voneinander unterscheidender Ebenen hineinlegen; also hat auch schon jeder einzelne Punkt einer Graden eine unendliche Menge sich durch ihre Richtung voneinander unterscheidender Krümmungsebenen. Sowie nun die Krümmungsebene eines jeden Punktes einer Graden keine bestimmte Richtung hat, ebenso hat auch das auf die in der Aufgabe vorgeschriebene Weise begränzte Parallelogramm selbst keine bestimmte Grösse." Somit kann auch von einem Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein, und dieser erste Fall nicht weiter beachtet werden.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Curve, von welcher bei irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x das besagte Parallelogramm grösser oder kleiner gemacht wird, als es von allen den Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei der grade gewählten Abscisse x alle ihre Berührungslinien mit der Berührungslinie der gesuchten Curve parallel haben,

gemacht werden kann; so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$ etc., und Gleichung VII zieht sich zurück auf

$$\text{VIII)} \quad \delta U = \frac{(\beta - b)\cdot(\gamma - c)}{N}\cdot(pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cdot\left(q\cdot\frac{d^2\delta z}{dx^2} - \mathfrak{q}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Es müssen also jetzt die identischen Gleichungen

$$7) \quad (pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cdot q = 0 \qquad 8) \quad (pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cdot\mathfrak{q} = 0$$

stattfinden. Diese Gleichungen werden erfüllt, entweder wenn die zwei Gleichungen $q = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$ zugleich bestehen, oder wenn auch nur die einzige Gleichung $pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0$ stattfindet.

Erstens. Lässt man $q = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$ zugleich bestehen, so hat man wieder $y = Ax + B$ und $z = Ex + F$, wie im ersten Falle.

Zweitens. Lässt man aber nur die einzige Gleichung $pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0$ stattfinden, so bekommt man $p^2 + \mathfrak{p}^2 = C$, welche Gleichung man aber auch noch auf folgende Weise darstellen kann

$$9) \quad 1 + p^2 + \mathfrak{p}^2 = \frac{1}{e^2}$$

oder

$$10) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = e$$

Es ist aber $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$ sowohl der Sinus des Winkels, welchen die jedesmalige Berührende mit der Coordinatenebene YZ bildet, als auch der Cosinus des Winkels, welchen die jedesmalige Berührende mit der Abscissenaxe X bildet. Der Gleichung 10 entsprechen also alle jene unendlichvielen räumlichen Curven, bei welchen die Berührenden aller Punkte mit der Coordinatenebene YZ einerlei Winkel bilden. Man bekommt aber alle diese Curven, wenn man für z irgend eine beliebige Function von x annimmt, sie in Gleichung 10 einsetzt, und das zugehörige y mittelst Integration herstellt. Aus 9 folgt $p = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{1 - e^2 - e^2\cdot\mathfrak{p}^2}$, und somit ist

$$q = -\frac{e\cdot\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}}{\sqrt{1 - e^2 - e^2\cdot\mathfrak{p}^2}}$$

Wenn man nun für p und q die Ausdrücke in Gleichung VI substituirt, und zugleich die (hinter Gleichung VI gemachte) Bemerkung hinsichtlich der Zweideutigkeit des Radicals beachtet; so bekommt man

$$\text{X)} \quad U' = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\cdot(\beta - b)\cdot(\gamma - c)$$

d. h. U' ist constant bei jedem beliebigen Werthe des x und bei jeder willkürlichen Function z von x. Mutirt man Gleichung VIII noch einmal, so gibt sich

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \frac{(\beta - b)(\gamma - c)}{N} \cdot \left(p \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) \cdot \left(q \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2} - \mathfrak{q} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten; und man erkennt, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 120.

Bei irgend einer räumlichen Curve wird in den zu der nach Willkür genommenen Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene gelegt. Hierauf fällt man von zwei irgendwo im Raume festliegenden Punkten Perpendikel auf die Krümmungsebene. Welche unter allen auf das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven hat in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass das Product dieser beiden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

Wenn überhaupt $A \cdot x' + By' + Cz' + E = 0$ die Gleichung einer Ebene ist, und a, b, c die Coordinaten eines Punktes im Raume, und α, β, γ die Coordinaten eines andern Punktes im Raume sind; so sind die Entfernungen beider Punkte von jener Ebene gegeben durch die Ausdrücke

$$\frac{Aa + Bb + Cc + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ und } \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wenn nun, wie gewöhnlich p statt $\frac{dy}{dx}$, q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$, $\mathfrak{q}$ statt $\frac{d^2z}{dx^2}$ gesetzt wird; so ist die Gleichung der Krümmungsebene

$$-(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot x' - \mathfrak{q} \cdot y' + q \cdot z' - [zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] = 0$$

Es ist also $A = -(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})$, $B = -\mathfrak{q}$, $C = +q$, und $E = -[zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})]$. Die Entfernung des Punktes (a, b, c) bis zur Krümmungsebene ist also

$$\frac{-(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot a - \mathfrak{q} \cdot b + q \cdot c - [zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})]}{\sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}$$

und die Entfernung des Punktes (α, β, γ) bis zur Krümmungsebene ist

$$\frac{-(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot \alpha - \mathfrak{q} \cdot \beta + q \cdot \gamma - [zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})]}{\sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}$$

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe durch die beiden Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) legt; dabei ist dann $b = 0$, $c = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, und die beiden letzten Ausdrücke reduciren sich auf

$$\frac{(x - a) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})}{\sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}} \text{ und } \frac{(x - \alpha) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})}{\sqrt{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}$$

Das hier in Rede stehende Product ist also

$$\text{I)} \quad U = \frac{[(x - a) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})] \cdot [(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})]}{\mathfrak{q}^2 + q^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}$$

Lässt man dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe, so müssen folgende sechs identische Gleichungen zugleich stattfinden:

$$\text{II)} \quad [(2x - a - \alpha) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - 2(zq - y\mathfrak{q})] \cdot \mathfrak{q} = 0$$

$$\text{III)} \quad [-(2x - a - \alpha) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + 2(zq - y\mathfrak{q})] \cdot q = 0$$

$$\begin{aligned}\text{IV)} \quad & [-2(x - a)(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + (2x - a - \alpha)(zq - y\mathfrak{q})] \cdot [\mathfrak{q}^2 + q^2 \\ & + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2] \cdot \mathfrak{q} + 2 \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})[(x - a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \\ & - (zq - y\mathfrak{q})] \cdot [(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})]\, \mathfrak{q} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{V)} \quad & [2(x - a)(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (2x - a - \alpha)(zq - y\mathfrak{q})] \cdot [\mathfrak{q}^2 + q^2 \\ & + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2] \cdot q - 2(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})[(x - a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \\ & - (zq - y\mathfrak{q})] \cdot [(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})] \cdot q = 0\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad [2(x-a)(x-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot\mathfrak{p} - (2x-a-\alpha)(zq - y\mathfrak{q})\cdot\mathfrak{p}$$
$$- (2x-a-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot z + 2z(zq - y\mathfrak{q})]\cdot[q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2]$$
$$- 2\cdot[q + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot\mathfrak{p}]\cdot[(x-a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})$$
$$- (zq - y\mathfrak{q})]\cdot[(x-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})] = 0$$

$$\text{VII)}\quad [-2(x-a)(x-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot p + (2x-a-\alpha)(zq - y\mathfrak{q})\cdot p$$
$$+ (2x-a-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot y - 2y(zq - y\mathfrak{q})]\cdot[q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2]$$
$$- 2\cdot[\mathfrak{q} - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot p]\cdot[(x-a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})$$
$$- (zq - y\mathfrak{q})][(x-\alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (zq - y\mathfrak{q})] = 0$$

Erstens. Alle diese Gleichungen werden erfüllt, wenn $q = 0$ und $\mathfrak{q} = 0$. Die gesuchte Curve hat also die Gleichungen

$$y = gx + f \quad \text{und} \quad z = kx + h$$

d. h. die gesuchte Curve ist die grade Linie im Raume. Hier wird $U' = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt, und man hat wieder das nemliche Resultat, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe. (Man vergleiche die dort befindliche Bemerkung.)

Zweitens. Alle diese Gleichungen werden aber auch erfüllt, wenn gleichzeitig

$$\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q} = 0 \quad \text{und} \quad zq - y\mathfrak{q} = 0$$

stattfindet. Eliminirt man $\mathfrak{q}$ aus diesen Gleichungen, so fällt auch q weg, und man bekommt $\frac{\mathfrak{p}}{z} = \frac{p}{y}$, woraus $z = ky$ folgt, und wo y eine ganz beliebige Function von x ist. Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche in der Abscissenaxe liegt und auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht. Jede beliebige Curve, welche in dieser Ebene liegt, entspricht also der Aufgabe; und jederzeit ist $U' = 0$. Ob aber ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand oder keiner von beiden stattfindet, wird sich an dem Mutationscoefficient der zweiten Ordnung erweisen.

Aufgabe 121.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Krümmungsebenen beständig einer festen Graden parallel bleiben, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Krümmungsebene legt, und wenn man hierauf aus zwei festen Punkten der Axe Y und ebenso aus zwei festen Punkten der Axe Z senkrechte Ebenen errichtet, das dadurch auf der Krümmungsebene begränzte Parallelogramm grösser oder kleiner wird, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Es sei die Gleichung einer Ebene

$$\text{I)}\quad A\cdot z' + B\cdot y' + C\cdot x' + E = 0$$

und die Gleichungen einer Graden seien

$$\text{II)}\quad z'' = \mathfrak{A}\cdot x'' + \mathfrak{C}, \qquad \text{und} \qquad \text{III)}\quad y'' = \mathfrak{B}\cdot x'' + \mathfrak{E}$$

Der Winkel, welchen die Ebene mit der Graden bildet, hat bekanntlich einen Sinus, welcher gegeben ist durch

$$\frac{A\cdot\mathfrak{A} + B\cdot\mathfrak{B} + C}{(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2})\cdot(\sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$$

In dem Falle, dass Linie und Ebene miteinander parallel sind, ist dieser Sinus Null, d. h. es ist

$$\text{IV)}\quad A\cdot\mathfrak{A} + B\cdot\mathfrak{B} + C = 0$$

Digitized by Google

Die Gleichung der Krümmungsebene im Allgemeinen ist

$$\text{V)}\quad q \cdot z' - \mathfrak{q} \cdot y' - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot x' - [qz - \mathfrak{q} \cdot y - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot x]' = 0$$

Es ist also $A = +q$, $B = -\mathfrak{q}$, $C = -(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})$; und Gleichung IV geht über in

$$\text{VI)}\quad \mathfrak{A} \cdot q - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{q} - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) = 0$$

Jede räumliche Curve, durch welche diese Differentialgleichung der zweiten Ordnung identisch wird, hat die Eigenschaft, dass alle ihre Krümmungsebenen mit der durch die Gleichungen II und III gegebenen Graden parallel sind; und wenn man diese Gleichung, welche, weil y, z, p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$ Functionen von x sind, eine totale Differentialgleihung ist, integriren will; so wird man am besten verfahren, zunächst $\mathfrak{p}$ als Function von p zu behandeln. Nun ist $\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{p}}{dx} = \frac{d\mathfrak{p}}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d\mathfrak{p}}{dp} \cdot q$; und dabei geht Gleichung VI über in

$$\left(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dp} - \mathfrak{p} + p \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dp}\right) \cdot q = 0$$

Daraus folgt $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dp} - \mathfrak{p} + p \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dp} = 0$, oder $\frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - \mathfrak{A}} = \frac{dp}{p - \mathfrak{B}}$; also ist $(\mathfrak{p} - \mathfrak{A}) = n \cdot (p - \mathfrak{B})$, und $\mathfrak{p} = n \cdot p + (\mathfrak{A} - n \cdot \mathfrak{B})$. Daraus folgt endlich

$$\text{VII)}\quad z = n \cdot y + (\mathfrak{A} - n \cdot \mathfrak{B}) \cdot x + m$$

Hier sind n und m noch zwei willkürliche Constanten, aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind aus den Gleichungen II und III bekannt. Jede beliebige auf der durch Gleichung VII dargestellten Ebene befindliche Curve hat also die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsebenen mit der durch II und III dargestellten Graden parallel laufen. Da ferner zwischen x, y, z nur eine einzige Gleichung stattfindet, so kann man für y jede beliebige Function nehmen, und indem man sie in Gleichung VII einsetzt, ergibt sich die entsprechende Function z von x. Die Aufgabe ist also jetzt folgende: Es soll (nach der 119ten Aufgabe)

$$\text{VIII)}\quad U = (\beta - b) \cdot (\gamma - c) \cdot \frac{\sqrt{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y und z zu suchenden Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei Gleichung VI identisch wird.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z als mittelbar mutabel behandelt wird.

Man kommt hier am leichtesten ans Ziel, wenn man das mittelbar mutable Element schon vor dem Mutiren eliminirt. Aus VII folgt $\mathfrak{p} = n \cdot p + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})$, und $\mathfrak{q} = n \cdot q$; Gleichung VIII geht also über in

$$\text{IX)}\quad U = (\beta - b)\,(\gamma - c) \cdot \frac{\sqrt{1 + n^2 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2}}{\mathfrak{A} - nB}$$

In diesem Ausdrucke ist, wie man sieht, n das einzige veränderliche Element, und zwar ein solches, welches nur Werthänderungen erleiden kann. Differentiirt man nun nach n, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{dU}{dn} = (\beta - b)\,(\gamma - c) \cdot \frac{n \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2 \cdot \sqrt{1 + n^2 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2}}$$

Aus $\frac{dU}{dn} = 0$ folgt $n = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$; und Gleichung VII geht über in

$$\text{XI)}\quad \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}y - (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot x = m$$

wo m ein noch ganz willkürlicher Constanter ist. Die Richtung der durch XI dargestellten Ebene erkennt man aber auf folgende Weise:

Die in YZ liegende Spur dieser Ebene hat die Gleichung

$$\text{XII)}\quad z = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot y + \frac{m}{\mathfrak{A}}$$

und die durch II und III dargestellte Grade hat eine in YZ liegende Projection mit der Gleichung

Digitized by Google

$$\text{XIII)}\quad z'' = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot y'' + \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$$

Verlängert man die durch XII und XIII dargestellten Linien, bis sie sich schneiden, so stehen sie senkrecht aufeinander. Um also die Richtung der durch XI gegebenen Ebene zu bestimmen, lege man in die gegebene Grade eine auf der Coordinatenebene YZ senkrechte Ebene; dann ist die durch XI dargestellte Ebene eine solche, welche sowohl auf letzterer senkrecht steht, als auch mit der gegebenen Graden parallel läuft. Aber eben weil das Element m willkürlich ist, so kann die gesuchte Ebene in jeder beliebigen Weite von der gegebenen Graden genommen werden. Alle diese Ebenen sind aber untereinander parallel, und jede liefert für das auf vorgeschriebene Weise begränzte Parallelogramm die nemliche Grösse. Es muss sich also für U ein constanter Werth ergeben, wie man noch auf analytischem Wege nachweisen kann. Aus XI folgt nemlich $\mathfrak{p} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot p + \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}}$, und $\mathfrak{q} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot q$; und somit geht Gleichung VIII über in

$$\text{XIV)}\quad U' = (\beta - b) \cdot (\gamma - c) \cdot \sqrt{\frac{1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}$$

und wenn man Gleichung X noch einmal differentiirt, und hierauf für n den Werth einführt; so bekommt man

$$\text{XV)}\quad \frac{d^2U}{dn^2} = (\beta - b)\,(\gamma - c) \cdot \frac{\mathfrak{A}^4}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^3} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}}$$

Die für U' und $\frac{d^2U}{dn^2}$ hergestellten Ausdrücke haben das Radical als gemeinschaftlichen Factor. Nun soll (nach der hinter Gleichung VI der 119ten Aufgabe gemachten Bemerkung) der Ausdruck U positiv sein, und dieses ist hier der Fall, wenn man dem Radical seine positive Bedeutung beilegt. Dabei wird auch δ^2U positiv, und es findet ein Minimum-stand statt, während von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Aufgabe 122.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Krümmungsebenen alle durch den nemlichen Punkt (g, h, k) gehen, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung so beschaffen ist, dass, wenn man ihren zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Krümmungsebene legt, und wenn man hierauf aus zwei festen Punkten (a, b, c) und (α, β, γ) auf diese Krümmungsebene Perpendikel fällt, das Product dieser Perpendikel grösser oder kleiner ist, als es bei derselben Abscisse x von allen andern Curven, welche nicht nur

α) der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) der oben gestellten Bedingung genügen,

gemacht werden kann.

Die Gleichung der durch den Punkt (g, h, k) gehenden Krümmungsebene ist

$$\text{I)}\quad (k - z) \cdot \mathfrak{q} - (h - y) \cdot q - (g - x) \cdot (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) = 0$$

Jede räumliche Curve, durch welche diese Differentialgleichung der zweiten Ordnung identisch wird, hat die Eigenschaft, dass alle ihre Krümmungsebenen durch den festen Punkt (g, h, k) gehen; und wenn man diese Gleichung, welche, weil y, z, p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$ Functionen von x sind, eine totale Differentialgleichung ist, integrirt; so bekommt man als vollständige Integralgleichung

$$\text{II)}\quad (z - k) \cdot m + (y - h) \cdot n = x - g$$

wo m und n zwei ganz willkürliche Constanten sind. Jede beliebige auf der durch Gleichung II dargestellten Ebene befindliche Curve hat also die Eigenschaft, dass ihre Krümmungsebenen durch den festen Punkt (g, h, k) gehen. Da ferner zwischen x, y, z nur eine einzige Gleichung stattfindet, so kann man für y jede beliebige

Digitized by Google

Function nehmen; und indem man sie in II einsetzt, ergibt sich die entsprechende Function z von x. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe selbst in die Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) legt; denn dabei ist $b = 0$, $c = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Die Aufgabe ist also jetzt folgende: Es soll (nach der 120sten Aufgabe)

$$\text{III)} \quad U = \frac{[(x - a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (z\mathfrak{q} - y\mathfrak{q})] \cdot [(x - \alpha)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) - (z\mathfrak{q} - y\mathfrak{q})]}{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y und z zu suchenden Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei Gleichung I identisch wird.

Man kommt auch hier am bequemsten ans Ziel, wenn das mittelbar mutable Element schon vor dem Mutiren eliminirt wird. Aus II folgt nach und nach

$$\text{IV)} \quad z = -\frac{n}{m} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot x + \frac{mk + nh - g}{m}$$

$$\text{V)} \quad \mathfrak{p} = -\frac{n}{m} \cdot p + \frac{1}{m}$$

$$\text{VI)} \quad \mathfrak{q} = -\frac{n}{m} \cdot q$$

Führt man diese Ausdrücke in III ein, so bekommt man nach gehörigen Reductionen

$$\text{VII)} \quad U = \frac{[mk + nh - (g - a)] \cdot [mk + nh - (g - \alpha)]}{1 + m^2 + n^2}$$

In diesem Ausdrucke sind, wie man sieht, m und n die einzigen veränderlichen Elemente, und zwar solche, welche nur Werthänderungen erleiden können. Differentiirt man nun nach m und nach n, so bekommt man folgende zwei partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d_m U}{dm} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(2mk + 2nh - 2g + a + \alpha) \cdot (1 + m^2 + n^2) \cdot k \\ - 2m \cdot (mk + nh - g + a) \cdot (mk + nh - g + \alpha)\end{array}\right\}}{(1 + m^2 + n^2)^2}$$

und

$$\frac{d_n U}{dn} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(2mk + 2nh - 2g + a + \alpha) \cdot (1 + m^2 + n^2) \cdot h \\ - 2n \cdot (mk + nh - g + a) \cdot (mk + nh - g + \alpha)\end{array}\right\}}{(1 + m^2 + n^2)^2}$$

Man setze $\frac{d_m U}{dm} = 0$ und $\frac{d_n U}{dn} = 0$, so bekommt man folgende zwei Gleichungen

$$\text{VIII)} \quad \begin{array}{l}(2mk + 2nh - 2g + a + \alpha) \cdot (1 + m^2 + n^2) \cdot h \\ = 2m\,(mk + nh - g + a)\,(mk + nh - g + \alpha)\end{array}$$

$$\text{IX)} \quad \begin{array}{l}(2mk + 2nh - 2g + a + \alpha)\,(1 + m^2 + n^2) \cdot k \\ = 2n\,(mk + nh - g + a)\,(mk + nh - g + \alpha)\end{array}$$

Dividirt man beide Gleichungen ineinander, so bekommt man $\frac{h}{k} = \frac{m}{n}$; und daraus folgt

$$\text{X)} \quad n = \frac{h}{k} \cdot m$$

Eliminirt man n aus VIII oder IX, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad m = k \cdot \frac{(g-a)(g-\alpha) - (h^2+k^2) \pm \sqrt{(2g - a - \alpha)^2 . (h^2+k^2) + [(h^2+k^2) - (g-a)(g-\alpha)]^2}}{(2g - a - \alpha) \cdot (h^2 + k^2)}$$

und Gleichung X geht über in

$$\text{XII)} \quad n = h \cdot \frac{(g-a)(g-\alpha) - (h^2+k^2) \pm \sqrt{(2g - a - \alpha)^2 . (h^2+k^2) + [(h^2+k^2) - (g-a)(g-\alpha)]^2}}{(2g - a - \alpha) \cdot (h^2 + k^2)}$$

Bei den Doppelzeichen gehören die oberen zusammen, und ebenso die unteren. Indem man diese für m und n gefundenen Werthe in II einsetzt, bekommt man eine vollkommen

Digitized by Google

bestimmte Gleichung für eine durch den Punkt (g, h, k) gehende Ebene; und jede in dieser Ebene befindliche Curve hat die Eigenschaft, dass das in der Aufgabe vorgeschriebene Product, je nachdem man bei den Doppelzeichen entweder nur die oberen oder nur die untern gelten lässt, grösser oder kleiner wird, als bei allen andern durch den Punkt (g, h, k) gehenden und der Richtung der gesuchten Ebene sich zunächst annähernden Nachbarebenen der Fall sein kann. Auch ist besagtes Product constant bei jeder beliebigen Function y von x und bei jedem Werthe des x, so dass von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Aufgabe 123.

Man legt in den zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörigen Punkt einer räumlichen Curve die Krümmungsebene. Ihre in den drei Coordinatenebenen liegenden Spuren schliessen mit den Coordinatenaxen Dreiecke ein. Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven ist es nun, wenn die Summe dieser drei Dreiecke grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Krümmungsebenen aller andern der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die Gleichung der Krümmungsebene ist bekanntlich

$$\text{I)}\quad (z'-z)\cdot q-(y'-y)\cdot \mathfrak{q}-(x'-x)\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})=0$$

wo x', y', z' die Coordinaten der Krümmungsebene, und x, y, z die Coordinaten des Punktes der gesuchten Curve sind, wo man grade die Krümmungsebene hinlegt.

Da, wo die Axe X von der Krümmungsebene geschnitten wird, ist $y'=0$ und $z'=0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{II)}\quad x'=+\frac{x\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})-z\cdot q+y\cdot\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q}}.$$

Da, wo die Axe Y von der Krümmungsebene geschnitten wird, ist $x'=0$ und $z'=0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{III)}\quad y'=+\frac{x\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})-z\cdot q+y\cdot\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}}$$

Da, wo die Axe Z von der Krümmungsebene geschnitten wird, ist $x'=0$ und $y'=0$; und somit ist für diesen Fall

$$\text{IV)}\quad z'=-\frac{x\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})-z\cdot q+y\cdot\mathfrak{q}}{q}$$

Die Summe der drei auf vorgeschriebene Weise begränzten Dreiecke ist also

$$U=\frac{1}{2}\cdot x'\cdot y'+\frac{1}{2}\cdot x'\cdot z'+\frac{1}{2}\cdot y'\cdot z'$$

Wenn man nun für x', y', z' die Ausdrücke einsetzt, und gehörig vereinfacht, so bekommt man

$$\text{V)}\quad U=\frac{1}{2}\cdot\frac{q-\mathfrak{q}-(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})}{q\cdot\mathfrak{q}\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})}\cdot(x\cdot(\mathfrak{p}q-p\mathfrak{q})-z\cdot q+y\cdot\mathfrak{q})^2$$

Die Aufgabe ist also, für y und z solche Functionen von x zu finden, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 124.

Man hat bei einer räumlichen Curve in den zur Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene gelegt. Hierauf hat man in zwei festen Punkten der Abscissenaxe senkrechte Ebenen errichtet, von welchen die Krümmungsebene geschnitten wird. Eine jede der dadurch entstandenen zwei Durchschnittslinien wird von den Coordinatenebenen

Digitized by Google

XY und XZ begränzt. Bei welcher unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven wird das Product der auf besagte Weise begränzten Längen dieser beiden Durchschnittslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Die Gleichung der Krümmungsebene ist

$$\text{I)}\quad (z'-z)\cdot q - (y'-y)\cdot \mathfrak{q} - (x'-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) = 0$$

Der in der Abscissenaxe gelegene Punkt, wo man die erste senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse a; der in der Abscissenaxe gelegene Punkt, wo man die zweite senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse α.

Die Projectionen des zur Abscisse a gehörigen Schnittes sind

$$\text{II)}\quad y_1' = -\frac{1}{\mathfrak{q}}\cdot[(a-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

und

$$\text{III)}\quad z_1' = +\frac{1}{q}\cdot[(a-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\cdot\mathfrak{q}]$$

Die Länge dieses Schnittes ist also

$$\sqrt{y_1'^2 + z_1'^2} = \frac{1}{q\cdot\mathfrak{q}}\cdot[(a-x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]\cdot\sqrt{q^2+\mathfrak{q}^2}$$

Die Projectionen des zur Abscisse α gehörigen Schnittes sind aber

$$\text{IV)}\quad y_2' = -\frac{1}{\mathfrak{q}}\cdot[(\alpha-x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

$$\text{V)}\quad z_2' = +\frac{1}{q}\cdot[(\alpha-x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

Die Länge dieses Schnittes ist also

$$\sqrt{z_2'^2 + y_2'^2} = \frac{1}{q\cdot\mathfrak{q}}\cdot[(\alpha-x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]\cdot\sqrt{q^2+\mathfrak{q}^2}$$

Sonach ist das Product dieser beiden Schnitte

$$\text{VI)}\quad U = \frac{q^2+\mathfrak{q}^2}{q^2\cdot\mathfrak{q}^2}\cdot[(a-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\cdot\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]\cdot[(\alpha-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

Die Aufgabe ist also jetzt, für y und z solche Functionen zu suchen, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 125.

Man hat bei einer räumlichen Curve in den zur Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene gelegt. Hierauf hat man in zwei festen Punkten der Abscissenaxe senkrechte Ebenen errichtet, von welchen die Krümmungsebene geschnitten wird. Diese zwei Durchschnittslinien und die in den Coordinatenebenen XY und XZ liegenden Spuren der Krümmungsebene schliessen ein Trapez ein. Welche räumliche Curve ist es nun, wenn dieses Trapez ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Es sei (fig. 24) die Krümmungsebene gegeben durch ihre Spuren P′QP. Die in festen Punkten r und t senkrecht gestellten Ebenen seien gegeben durch die Spuren Vr, rR, und Wt, tT. Das hier in Rede stehende Trapez ist aber gegeben durch seine Projectionen VrtW und RrtT. Es sei die Abscisse Or = a und die Abscisse Ot = α; so ist

$$rV = -\frac{1}{\mathfrak{q}}\cdot[(a-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

$$rR = +\frac{1}{q}\cdot[(a-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

$$tW = -\frac{1}{\mathfrak{q}}\cdot[(\alpha-x)\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

Digitized by Google

$$tT = + \frac{1}{\mathfrak{q}} \cdot [(\alpha - x) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q}]$$

Die Projection VrtW hat also den Inhalt

$$\text{I)} \quad \frac{Vr + tW}{2} \cdot rt = - \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}} \cdot [(a + \alpha - 2x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + 2zq - 2y\mathfrak{q}]$$

Die Projection RrtT aber hat den Inhalt

$$\text{II)} \quad \frac{rR + tT}{2} \cdot rt = + \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{q} \cdot [(a + \alpha - 2x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + 2zq - 2y\mathfrak{q}]$$

Die dritte, d. h. in der Coordinatenebene YZ gelegene Projection, wenn sie umgelegt wird, ist $v''w''t''r''$, und hat den Inhalt = Dreieck $Ov''r''$ — Dreieck $Ow''t''$, oder $\frac{Ov'' \cdot Or''}{2} - \frac{Ow'' \cdot Ot''}{2}$, oder $\frac{rV \cdot rR}{2} - \frac{tW \cdot tT}{2}$, oder

$$\frac{1}{2q \cdot \mathfrak{q}} [- ((a - x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q})^2 + ((\alpha - x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + zq - y\mathfrak{q})^2]$$

oder

$$\text{III)} \quad \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}}{q \cdot \mathfrak{q}} \cdot [(\alpha + a - 2x)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + 2zq - 2y\mathfrak{q}]$$

Nach dem Satze

„Das Quadrat jeder ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer auf „die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren"

bekommt man für den Inhalt des gesuchten Trapezes:

$$\text{IV)} \quad U = \frac{\alpha - a}{2} \cdot \frac{1}{q \cdot \mathfrak{q}} \cdot [(\alpha + a - 2x) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + 2zq - 2y\mathfrak{q}] \cdot \sqrt{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}$$

und die Aufgabe ist jetzt, für y und z solche Functionen von x zu suchen, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich. Namentlich ist zu bemerken, dass man, sobald die gesuchte Curve gefunden ist, dem Radical diejenige Bedeutung beilegt, wobei U positiv wird.

Aufgabe 126.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man zieht in ihrem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte eine Berührungslinie, und errichtet in zwei festen Punkten irgend einer gegebenen Graden senkrechte Ebenen. In jeder dieser Ebenen hat sowohl die Curve selbst als auch die Berührungslinie einen Durchgangspunkt. Man nimmt die Entfernung der beiden in der ersten Ebene befindlichen Durchgangspunkte, und ebenso die Entfernung der beiden in der zweiten Ebene befindlichen Durchgangspunkte. Welche Curve ist es nun, wenn sie in dem zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte (also in jedem ihrer Punkte) die Eigenschaft hat, dass das Product dieser beiden Entfernungen grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die gegebene Grade zugleich als Abscissenaxe annimmt. Derjenige feste Punkt, wo man die erste senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse a; und derjenige feste Punkt, wo man die zweite senkrechte Ebene errichtet, habe die Abscisse α. Die Coordinaten der gesuchten Curve seien x, y, z, und die Coordinaten der Berührenden seien x', y', z'. Die Gleichungen der zu einer räumlichen Curve gehörenden Berührenden sind bekanntlich

$$y' - y = (x' - x) \cdot p, \quad \text{und} \quad z' - z = (x' - x) \cdot \mathfrak{p}$$

oder

$$y' = y + (x' - x) \cdot p, \quad \text{und} \quad z' = z + (x' - x) \cdot \mathfrak{p}$$

Digitized by Google

Die Entfernung zweier im Raume befindlicher Punkte (A, B, C) und (A', B', C') ist bekanntlich gegeben durch

$$\text{I)}\quad \sqrt{(A - A')^2 + (B - B')^2 + (C - C')^2}$$

Da derjenige in der Abscissenaxe liegende feste Punkt, wo man die erste senkrechte Ebene errichtet, die Abscisse a hat; so hat der in dieser Ebene gelegene Durchgangspunkt der Curve die Ordinaten y_a und z_a, und der in dieser Ebene gelegene Durchgangspunkt der Berührenden hat die Ordinaten y'_a oder $(y + (a - x) \cdot p)$, und z'_a oder $(z + (a - x) \cdot \mathfrak{p})$. Schaut man auf den Ausdruck I zurück, und vergleicht man ihn mit den Coordinaten der beiden Durchgangspunkte; so erkennt man, dass $A = A' = a$, $B' = y_a$, $B = (y + (a - x) \cdot p)$, $C' = z_a$, und $C = (z + (a - x) \cdot \mathfrak{p})$; und der Ausdruck I geht über in

$$\text{II)}\quad \sqrt{(y - y_a + (a - x) \cdot p)^2 + (z - z_a + (a - x) \cdot \mathfrak{p})^2}$$

Da derjenige in der Abscissenaxe liegende feste Punkt, wo man die zweite senkrechte Ebene errichtet, die Abscisse α hat; so hat der in dieser Ebene gelegene Durchgangspunkt der Curve die Ordinaten y_α und z_α, und der in dieser Ebene gelegene Durchgangspunkt der Berührenden hat die Ordinaten y'_α oder $(y + (\alpha - x) \cdot p)$, und z'_α oder $(z + (\alpha - x) \cdot \mathfrak{p})$. Schaut man wieder auf den Ausdruck I zurück, und vergleicht man ihn mit den Coordinaten der beiden Durchgangspunkte, so erkennt man, dass $A = A' = \alpha$, $B' = y_\alpha$, $B = (y + (\alpha - x) \cdot p)$, $C' = z_\alpha$, und $C = (z + (\alpha - x) \cdot \mathfrak{p})$; und der Ausdruck I geht über in

$$\text{III)}\quad \sqrt{(y - y_\alpha + (\alpha - x) \cdot p)^2 + (z - z_\alpha + (\alpha - x) \cdot \mathfrak{p})^2}$$

Erst wenn die gesuchte Curve gefunden ist, kann man beurtheilen, ob die beiden (in II und III befindlichen) Radicale gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. ob das in Rede stehende Product selbst positiv oder negativ ist. Es ist aber bequem, wenn man vorerst für dieses Product

$$\text{IV)}\quad U = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{[(y-y_a+(a-x)p)^2 + (z-z_a+(a-x)\mathfrak{p})^2] \cdot [(y-y_\alpha+(\alpha-x)p)^2 + (z-z_\alpha+(\alpha-x)\mathfrak{p})^2]}$$

setzt, und die Zweideutigkeit des Productes durch den Factor $(\sqrt{1})$ bemerkbar macht.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 127.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man legt in ihren zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene. Von zwei zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten der gesuchten Curve fällt man Perpendikel auf diese Normalebene. Welche räumliche Curve hat aber in dem zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft, dass das Product beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die Gleichung irgend einer Ebene sei

$$\text{I)}\quad A \cdot x'' + B \cdot y'' + C \cdot z'' + E = 0$$

so ist die senkrechte Entfernung irgend eines Punktes (n, m, k) von dieser Ebene gegeben durch

$$\text{II)}\quad \frac{A \cdot n + B \cdot m + C \cdot k + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Gleichung der Normalebene einer räumlichen Curve ist bekanntlich $(x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$, oder

$$\text{III)}\quad x'' + p \cdot y'' + \mathfrak{p} \cdot z'' - (x + py + \mathfrak{p}z) = 0$$

Der Punkt der gesuchten Curve, dessen Abscisse $= a$, hat die Ordinaten y_a und z_a; dieses Punktes senkrechte Entfernung von der Normalebene ist also

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad \frac{a + p \cdot y_a + \mathfrak{p} \cdot z_a - (x + py + \mathfrak{p}z)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Der Punkt der gesuchten Curve, dessen Abscisse $= \alpha$, hat die Ordinaten y_α und z_α; dieses Punktes senkrechte Entfernung von der Normalebene ist also

$$\text{V)}\quad \frac{\alpha + p \cdot y_\alpha + \mathfrak{p} \cdot z_\alpha - (x + py + z\mathfrak{p})}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$$

Das hier in Rede stehende Product ist also:

$$\text{VI)}\ U = \frac{[a + p \cdot y_a + \mathfrak{p} \cdot z_a - (x + py + \mathfrak{p}z)] \cdot [\alpha + p \cdot y_\alpha + \mathfrak{p} \cdot z_\alpha - (x + py + \mathfrak{p}z)]}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 128.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man legt in ihren zur Abscisse a gehörigen Punkt die Normalebene, und ebenso legt man in ihren zur Abscisse α gehörigen Punkt die Normalebene. Von ihrem zu einer nach Belieben gewählten Absoisse x gehörigen Punkte fällt man Perpendikel auf diese beiden Normalebenen. Welche räumliche Curve ist es aber, wenn das Product beider Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei allen andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die zur Abscisse a gehörige Normalebene hat die Gleichung

$$\text{I)}\quad x'' + p_a \cdot y'' + \mathfrak{p}_a \cdot z'' - (a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a) = 0$$

Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\text{II)}\quad \frac{x + p_a \cdot y + \mathfrak{p}_a \cdot z - (a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a)}{\sqrt{1 + p_a^2 + \mathfrak{p}_a^2}}$$

Die zur Abscisse α gehörige Normalebene hat die Gleichung

$$\text{III)}\quad x''' + p_\alpha \cdot y''' + \mathfrak{p}_\alpha \cdot z''' - (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha) = 0$$

Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\text{IV)}\quad \frac{x + p_\alpha \cdot y + \mathfrak{p}_\alpha \cdot z - (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha)}{\sqrt{1 + p_\alpha^2 + \mathfrak{p}_\alpha^2}}$$

Das hier in Rede stehende Product ist also

$$\text{V)}\quad U = \frac{\left\{\begin{matrix}[x + p_a \cdot y + \mathfrak{p}_a \cdot z - (a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a)] \cdot \\ [x + p_\alpha \cdot y + \mathfrak{p}_\alpha \cdot z - (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha)]\end{matrix}\right\}}{\left(\sqrt{1 + p_a^2 + \mathfrak{p}_a^2}\right) \cdot \left(\sqrt{1 + p_\alpha^2 + \mathfrak{p}_\alpha^2}\right)}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 129.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man legt in ihren zu der festen Abscisse a gehörigen Punkt die Normalebene; man legt ebenso in ihren zu der festen Abscisse α gehörigen Punkt die Normalebene; ferner legt man auch in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Normalebene. Die in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren dieser drei Normalebenen schliessen ein Dreieck ein. Wenn nun der zu der grade gewählten Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Curve die Eigenschaft hat, dass des besagten Dreieckes Flächeninhalt grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensy-

Digitized by Google

stem bezogenen und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann; welche räumliche Curve wird gesucht?

Zu der festen Abscisse $x = a$ gehöre (fig. 25) der Punkt M, mit den Projectionen m und m'; die im Punkte M liegende Normalebene ist P'QP. Zu der festen Abscisse $x = \alpha$ gehöre der Punkt N, mit den Projectionen n und n'; die in dem Punkte N liegende Normalebene ist S'RS. Zu der nach Belieben genommenen Abscisse x gehöre der Punkt K, mit den Projectionen k und k'; die im Punkte K liegende Normalebene ist V'WV.

Die Gleichung der in K liegenden Normalebene ist

$$\text{I)}\quad (x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Die Gleichung der in N liegenden Normalebene ist

$$\text{II)}\quad (x''' - \alpha) + (y''' - y_\alpha) \cdot p_\alpha + (z''' - z_\alpha) \cdot \mathfrak{p}_\alpha = 0$$

Die Gleichung der in M liegenden Normalebene ist

$$\text{III)}\quad (x'''' - a) + (y'''' - y_a) \cdot p_a + (z'''' - z_a) \cdot \mathfrak{p}_a = 0$$

Legt man nun die Coordinatenebene YZ um, so kommt der Punkt V in die Lage $\mathfrak{V}$, der Punkt S kommt in die Lage $\mathfrak{S}$, und der Punkt P kommt in die Lage $\mathfrak{P}$; und man erkennt, dass das Dreieck fgh das hier in Rede stehende Dreieck ist. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez ufhw} - \text{Trapez ufgv} - \text{Trapez vghw}$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \cdot (uf + hw) \cdot (Ou - Ow) - \frac{1}{2} \cdot (uf + gv) \cdot (Ou - Ov)$$
$$- \frac{1}{2} \cdot (gv + hw) \cdot (Ov - Ow)$$

oder

$$\text{IV)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot [uf \cdot (Ov - Ow) + wh \cdot (Ou - Ov) + vg \cdot (Ow - Ou)]$$

Es kommt also noch darauf an, die Linien uf, wh, vg, Ov, Ow, Ou zu bestimmen, und die sich ergebenden Ausdrücke in Gleichung IV zu substituiren.

Für die in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren der Normalebene ist $x'' = 0$, $x''' = 0$, $x'''' = 0$; und die Gleichungen I, II, III gehen der Reihe nach über in

$$\text{V)}\quad p \cdot y'' + \mathfrak{p} \cdot z'' = x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}$$

$$\text{VI)}\quad p_\alpha \cdot y''' + \mathfrak{p}_\alpha \cdot z''' = \alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha$$

$$\text{VII)}\quad p_a \cdot y'''' + \mathfrak{p}_a \cdot z'''' = a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a$$

Die Gleichung V gehört der Linie V'V an, die Gleichung VI gehört der Linie S'S an, und die Gleichung VII gehört der Linie P'P an. Für den Punkt f ist $z'' = z'''$ und $y'' = y'''$, und aus den Gleichungen V und VI folgt

$$Ou = z'' = z''' = \frac{\mathfrak{p}_\alpha \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) - \mathfrak{p} \cdot (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha)}{p \cdot \mathfrak{p}_\alpha - \mathfrak{p} \cdot p_\alpha}$$

$$uf = y'' = y''' = -\frac{p_\alpha \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) - p \cdot (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha)}{p \cdot \mathfrak{p}_\alpha - \mathfrak{p} \cdot p_\alpha}$$

Für den Punkt g ist $z'' = z''''$ und $y'' = y''''$, und aus den Gleichungen V und VII folgt

$$Ov = z'' = z'''' = \frac{\mathfrak{p}_a \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) - \mathfrak{p} \cdot (a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a)}{p \cdot \mathfrak{p}_a - \mathfrak{p} \cdot p_a}$$

$$vg = y'' = y'''' = -\frac{p_a \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) - p \cdot (a + y_a \cdot p_a + z_a \cdot \mathfrak{p}_a)}{p \cdot \mathfrak{p}_a - \mathfrak{p} \cdot p_a}$$

Für den Punkt h ist $z''' = z''''$ und $y''' = y''''$, und aus den Gleichungen VI und VII folgt

$$Ow = z''' = z'''' = \frac{\mathfrak{p}_a \cdot (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha) - \mathfrak{p}_\alpha \cdot (a + p_a \cdot y_a + \mathfrak{p}_a \cdot z_a)}{p_\alpha \cdot \mathfrak{p}_a - \mathfrak{p}_\alpha \cdot p_a}$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{w}b = y''' = y'''' = -\frac{p_a \cdot (\alpha + y_\alpha \cdot p_\alpha + z_\alpha \cdot \mathfrak{p}_\alpha) - p_\alpha \cdot (a + p_a \cdot y_a + \mathfrak{p}_a \cdot z_a)}{p_\alpha \cdot \mathfrak{p}_a - \mathfrak{p}_\alpha \cdot p_a}$$

Hat man nun diese für uf, vg, wh, Ou, Ov, Ow hergestellten Ausdrücke in Gleichung IV eingesetzt, so geht alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 130.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man lege in ihren zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene. Von zwei zu den festen Abscissen a und α gehörigen Punkten der gesuchten Curve fällt man Perpendikel auf diese Krümmungsebene. Welche räumliche Curve hat aber in dem zu der grade genommenen Abscisse x gehörigen Punkte die Eigenschaft, dass das Product beider Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die Gleichung irgend einer Ebene sei

$$\text{I)}\quad A \cdot x' + B \cdot y' + C \cdot z' + E = 0$$

so ist die senkrechte Entfernung irgend eines Punktes (n, m, k) von dieser Ebene gegeben durch

$$\text{II)}\quad \frac{A \cdot n + B \cdot m + C \cdot k + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Gleichung der Krümmungsebene einer räumlichen Curve ist bekanntlich

$$\text{III)}\quad -(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot x' - \mathfrak{q} \cdot y' + q \cdot z' - [z\mathfrak{q} - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] = 0$$

Der Punkt der gesuchten Curve, dessen Abscisse = a, hat die Ordinaten y_a und z_a; dieses Punktes senkrechte Entfernung von der Krümmungsebene ist also

$$\text{IV)}\quad \frac{-(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot a - \mathfrak{q} \cdot y_a + q \cdot z_a - [zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})]}{\sqrt{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}$$

Der Punkt der gesuchten Curve, dessen Abscisse = α, hat die Ordinaten y_α und z_α; dieses Punktes senkrechte Entfernung von der Krümmungsebene ist also

$$\text{V)}\quad \frac{-(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) \cdot \alpha - \mathfrak{q} \cdot y_\alpha + q \cdot z_\alpha - [zq - y\mathfrak{q} - x(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})]}{\sqrt{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}}$$

Das hier in Rede stehende Product ist also:

$$\text{VI)}\quad U = \frac{\left\{\begin{array}{l}[(x-a)(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + (y - y_a) \cdot \mathfrak{q} - (z - z_a) \cdot q] \cdot \\ [(x-\alpha) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) + (y - y_\alpha) \cdot \mathfrak{q} - (z - z_\alpha) \cdot q]\end{array}\right\}}{q^2 + \mathfrak{q}^2 + (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})^2}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 131.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man legt in ihren zur Abscisse a gehörigen Punkt die Krümmungsebene, und ebenso legt man in ihren zur Abscisse α gehörigen Punkt die Krümmungsebene. Von ihrem zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkte fällt man Perpendikel auf diese beiden Krümmungsebenen. Welche räumliche Curve ist es aber, wenn das Product beider Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei allen andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Die zur Abscisse a gehörige Krümmungsebene hat die Gleichung

$$\text{I)}\quad -(\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a) \cdot x' - \mathfrak{q}_a \cdot y' + q_a \cdot z' - [z_a \cdot \mathfrak{q}_a - y_a \cdot \mathfrak{q}_a - a \cdot (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)] = 0$$



Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\frac{-(\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)\, x - \mathfrak{q}_a \cdot y + q_a \cdot z - [z_a \cdot q_a - y_a \cdot \mathfrak{q}_a - a \cdot (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)]}{\sqrt{q_a^2 + \mathfrak{q}_a^2 + (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)^2}}$$

oder

$$\text{II)}\quad \frac{(a - x) \cdot (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a) + (y_a - y) \cdot \mathfrak{q}_a - (z_a - z) \cdot q_a}{\sqrt{q_a^2 + \mathfrak{q}_a^2 + (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)^2}}$$

Die zur Abscisse α gehörige Krümmungsebene hat die Gleichung

$$\text{III)}\quad -(\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha) \cdot x'' - \mathfrak{q}_\alpha \cdot y'' + q_\alpha \cdot z''$$
$$- [z_\alpha \cdot q_\alpha - y_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha - \alpha \cdot (\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha)] = 0$$

Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\text{IV)}\quad \frac{(\alpha - x) \cdot (\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha) + (y_\alpha - y) \cdot \mathfrak{q}_\alpha - (z_\alpha - z) \cdot q_\alpha}{\sqrt{q_\alpha^2 + \mathfrak{q}_\alpha^2 + (\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha)^2}}$$

Und so fort.

Aufgabe 132.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene räumliche Curve. Man legt in ihren zu der festen Abscisse a gehörigen Punkt die Krümmungsebene; man legt ebenso in ihren zu der festen Abscisse α gehörigen Punkt die Krümmungsebene; ferner legt man auch in den zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt die Krümmungsebene. Die in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren dieser drei Krümmungsebenen schliessen ein Dreieck ein. Wenn nun der zu der grade genommenen Abscisse x gehörige Punkt der gesuchten Curve die Eigenschaft hat, dass des besagten Dreiecks Flächeninhalt grösser oder kleiner ist, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann; welche räumliche Curve wird gesucht?

Zu der festen Abscisse x = a gehöre (fig. 25) der Punkt M, mit den Projectionen m und m′; die im Punkte M liegende Krümmungsebene ist P′QP. Zu der festen Abscisse x = α gehöre der Punkt N, mit den Projectionen n und n′; die im Punkte N liegende Krümmungsebene ist S′RS. Zu der nach Belieben genommenen Abscisse x gehöre der Punkt K, mit den Projectionen k und k′; die im Punkte K liegende Krümmungsebene ist V′WV.

Die Gleichung der in K liegenden Krümmungsebene ist

$$\text{I)}\quad -(\mathfrak{p}q - p \cdot \mathfrak{q}) \cdot x' - \mathfrak{q} \cdot y' + q \cdot z' - [zq - y\mathfrak{q} - x \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] = 0$$

Die Gleichung der in N liegenden Krümmungsebene ist

$$\text{II)}\quad -(\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha) \cdot x'' - \mathfrak{q}_\alpha \cdot y'' + q_\alpha \cdot z''$$
$$- [z_\alpha \cdot q_\alpha - y_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha - \alpha \cdot (\mathfrak{p}_\alpha \cdot q_\alpha - p_\alpha \cdot \mathfrak{q}_\alpha)] = 0$$

Die Gleichung der in M liegenden Krümmungsebene ist

$$\text{III)}\quad -(\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a) \cdot x''' - \mathfrak{q}_a \cdot y''' + q_a \cdot z'''$$
$$- [z_a \cdot q_a - y_a \cdot \mathfrak{q}_a - a \cdot (\mathfrak{p}_a \cdot q_a - p_a \cdot \mathfrak{q}_a)] = 0$$

Legt man nun die Coordinatenebene YZ um, so kommt der Punkt V in die Lage $\mathfrak{V}$, der Punkt S kommt in die Lage $\mathfrak{S}$, und der Punkt P kommt in die Lage $\mathfrak{P}$; und man erkennt, dass das Dreieck fhg das in Rede stehende Dreieck ist. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez ufhw} - \text{Trapez ufgv} - \text{Trapez vghw}$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \cdot (uf + hw) \cdot (Ou - Ow) - \frac{1}{2} \cdot (uf + gv) \cdot (Ou - Ov)$$
$$- \frac{1}{2} \cdot (gv + hw) \cdot (Ov - Ow)$$

Digitized by Google

oder

$$\text{IV)}\quad U = \frac{1}{2}\cdot[uf\cdot(Ov - Ow) + hw\cdot(Ou - Ov) + vg\cdot(Ow - Ou)]$$

Es kommt also noch darauf an, die Linien uf, wh, vg, Ou, Ov, Ow zu bestimmen, und die sich ergebenden Ausdrücke in Gleichung IV zu substituiren.

Für die in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren der Krümmungsebene ist $x' = 0$, $x'' = 0$, $x''' = 0$; und die Gleichungen I, II, III gehen der Reihe nach über in

$$\text{V)}\quad -\mathfrak{q}\cdot y' + q\cdot z' - [zq - y\mathfrak{q} - x\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] = 0$$

$$\text{VI)}\quad -\mathfrak{q}_\alpha\cdot y'' + q_\alpha\cdot z'' - [z_\alpha\cdot q_\alpha - y_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \alpha\cdot(\mathfrak{p}_\alpha\cdot q_\alpha - p_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha)] = 0$$

$$\text{VII)}\quad -\mathfrak{q}_a\cdot y''' + q_a\cdot z''' - [z_a\cdot q_a - y_a\cdot\mathfrak{q}_a - a\cdot(\mathfrak{p}_a\cdot q_a - p_a\cdot\mathfrak{q}_a)] = 0$$

Die Gleichung V gehört der Linie V'V an, die Gleichung VI gehört der Linie S'S an, und die Gleichung VII gehört der Linie P'P an. Für den Punkt f ist $z' = z''$ und $y' = y''$, und aus den Gleichungen V und VI folgt

$$Ou = z' = z'' = \frac{\mathfrak{q}_\alpha\cdot[zq - y\mathfrak{q} - x\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] - \mathfrak{q}\cdot[z_\alpha\cdot q_\alpha - y_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \alpha\cdot(\mathfrak{p}_\alpha\cdot q_\alpha - p_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha)]}{q\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \mathfrak{q}\cdot q_\alpha}$$

und

$$uf = y' = y'' = \frac{q_\alpha\cdot[zq - y\mathfrak{q} - x\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] - q\cdot[z_\alpha\cdot q_\alpha - y_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \alpha\cdot(\mathfrak{p}_\alpha\cdot q_\alpha - p_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha)]}{q\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \mathfrak{q}\cdot q_\alpha}$$

Für den Punkt g ist $z' = z'''$ und $y' = y'''$, und aus den Gleichungen V und VII folgt

$$Ov = z' = z''' = \frac{\mathfrak{q}_a\cdot[zq - y\mathfrak{q} - x\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] - \mathfrak{q}\cdot[z_a\cdot q_a - y_a\cdot\mathfrak{p}_a - a\cdot(\mathfrak{p}_a\cdot q_a - p_a\cdot\mathfrak{q}_a)]}{q\cdot\mathfrak{q}_a - \mathfrak{q}\cdot q_a}$$

und

$$vg = y' = y''' = \frac{q_a\cdot[zq - y\mathfrak{q} - x\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})] - q\cdot[z_a\cdot q_a - y_a\cdot\mathfrak{q}_a - a\cdot(\mathfrak{p}_a\cdot q_a - p_a\cdot\mathfrak{q}_a)]}{q\cdot\mathfrak{q}_a - \mathfrak{q}\cdot q_a}$$

Für den Punkt h ist $z'' = z'''$ und $y'' = y'''$, und aus den Gleichungen VI und VII folgt

$$Ow = z'' = z''' = \frac{\mathfrak{q}_a\cdot[z_\alpha\cdot q_\alpha - y_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \alpha\cdot(\mathfrak{p}_\alpha\cdot q_\alpha - p_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha)] - \mathfrak{q}_\alpha\cdot[z_a\cdot q_a - y_a\cdot\mathfrak{q}_a - a\cdot(\mathfrak{p}_a\cdot q_a - p_a\cdot\mathfrak{q}_a)]}{q_\alpha\cdot\mathfrak{q}_a - \mathfrak{q}_a\cdot q_\alpha}$$

und

$$wh = y'' = y''' = \frac{q_a\cdot[z_\alpha\cdot q_\alpha - y_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha - \alpha\cdot(\mathfrak{p}_\alpha\cdot q_\alpha - p_\alpha\cdot\mathfrak{q}_\alpha)] - q_\alpha\cdot[z_a\cdot q_a - y_a\cdot\mathfrak{q}_a - a\cdot(\mathfrak{p}_a\cdot q_a - p_a\cdot\mathfrak{q}_a)]}{q_\alpha\cdot\mathfrak{q}_a - \mathfrak{q}_a\cdot q_\alpha}$$

Hat man nun diese für uf, vg, wh, Ou, Ov, Ow hergestellten Ausdrücke in Gleichung IV eingesetzt, so geht alles Weitere wie gewöhnlich.

C) Aufgaben, wo eine Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht wird.

Aufgabe 133.

Man soll für z eine solche Function der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und y suchen, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = z^2 - 2xz\cdot\frac{d_xz}{dx} - \frac{8x\cdot y^2}{m}\cdot\frac{d_yz}{dy} - x^2\cdot\left(\frac{d_xz}{dx}\right)^2 + 4xy\cdot\frac{d_xz}{dx}\cdot\frac{d_yz}{dy} + 2\cdot y^2\cdot\left(\frac{d_yz}{dy}\right)^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und q statt $\frac{d_y z}{dy}$, so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = 2\cdot(z - x\cdot p)\cdot \delta z + 2\cdot(2xyq - xz - x^2\cdot p)\cdot \frac{d_x\delta z}{dx} + 4\cdot\left(xyp - \frac{2x\cdot y^2}{m} + y^2\cdot q\right)\cdot \frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = 2\cdot(z - x\cdot p)\cdot \delta^2 z + 2\cdot(2xyq - xz - x^2\cdot p)\cdot \frac{d_x\delta^2 z}{dx} + 4\cdot\left(xyp - \frac{2x\cdot y^2}{m} + y^2\cdot q\right)\cdot \frac{d_y\delta^2 z}{dy} + 2\cdot\delta z^2 - 4x\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} - 2x^2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 8xy\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + 4y^2\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2$$

Erster Fall. Sucht man für z eine solche Function, welche bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x und bei irgend einem ebenfalls nach Belieben gewählten Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei diesen grade gewählten Werthen des x und des y alle möglichen, der gesuchten Function stetsfort nächstanliegenden, Nachbarfunctionen machen können; so sind δz, $\frac{d_x\delta z}{dx}$, $\frac{d_y\delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δz auch die Form des $\frac{d_x\delta z}{dx}$ und $\frac{d_y\delta z}{dy}$ mitgegeben ist, etc. (man sehe §. 95). Damit also $\delta U = 0$ werden kann, müssen die drei identischen Gleichungen

$$\text{IV)}\quad z - x\cdot p = 0$$

$$\text{V)}\quad 2xy\cdot q - x\cdot z - x^2\cdot p = 0$$

$$\text{VI)}\quad xy\cdot p - \frac{2x\cdot y^2}{m} + y^2\cdot q = 0$$

zugleich stattfinden. Die Function z von x und y, welche diese drei Gleichungen zugleich identisch macht, kann aber auf dreierlei Weise gefunden werden.

Erstens. Man nehme die Gleichungen IV und V vor, und eliminire zuerst p und dann q, so bekommt man folgende zwei neue Gleichungen

$$\text{VII)}\quad z = p\cdot x, \qquad \text{und} \qquad \text{VIII)}\quad z = y\cdot q\,.$$

Integrirt man Gleichung VII, so bekommt man $z = x\cdot\xi(y)$, wo $\xi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt $q = x\cdot\frac{d\xi(y)}{dy}$; und wenn man diese für z und q gefundenen Ausdrücke in Gleichung VIII einsetzt, so gibt sich $x\cdot\xi(y) = xy\cdot\frac{d\xi(y)}{dy}$, oder $\frac{d\xi(y)}{\xi(y)} = \frac{dy}{y}$; und daraus folgt $\xi(y) = A\cdot y$, wo A ein willkürlicher Constanter ist. Die Gleichung $z = x\cdot\xi(y)$ geht also über in

$$\text{IX)}\quad z = A\cdot xy$$

und durch diese für z gefundene Function werden die Gleichungen IV und V zugleich identisch. Man hat noch zu untersuchen, ob auch Gleichung VI identisch wird bei jedem Werthe des A, oder ob zu diesem Zwecke dem A irgend ein specieller Werth beigelegt werden muss, oder ob die Gleichung IX unter allen Umständen unfähig ist, der Gleichung VI zu genügen. Aus Gleichung IX ergibt sich $p = A\cdot y$ und $q = A\cdot x$, und dabei geht Gleichung VI gradezu über in

$$A\cdot x\cdot y^2 - \frac{2x\cdot y^2}{m} + A\cdot x\cdot y^2 = 0$$

woraus $A = \frac{1}{m}$ folgt, so dass

$$\text{X)}\quad z = \frac{x\cdot y}{m}$$

die gesuchte Function ist, wodurch den Gleichungen IV, V, VI zugleich genügt wird.

Digitized by Google

Zweitens. Man eliminire p und q aus IV, V, VI, so ergibt sich gradezu $z = \frac{x \cdot y}{m}$. Daraus folgt $p = \frac{y}{m}$ und $q = \frac{x}{m}$; und wenn man diese für z, p und q gefundenen Ausdrücke in IV, V, VI substituirt, so erkennt man, dass durch die gefundene Function in der That allen drei Gleichungen zugleich genügt wird.

Drittens. Man nehme eine der drei Gleichungen IV, V, VI vor, und suche von ihr das allgemeine Integral. Hier mag die Gleichung V genommen werden. Daraus folgt nach bekannter Methode $z = \frac{1}{x} \cdot \chi(\omega)$, während $\omega = x^2 \cdot y$ ist. Das allgemeine Integral zu Gleichung V ist also

$$\text{XI)} \quad z = \frac{1}{x} \cdot \chi(x^2 \cdot y)$$

wo $\chi(x^2 \cdot y)$ eine ganz willkürliche Function des Productes $(x^2 \cdot y)$ ist. Allein da das zu suchende Integral nicht nur der Gleichung V, sondern auch noch den Gleichungen IV und VI zu genügen hat; so ist noch zu bestimmen, was $\chi(x^2 \cdot y)$ für eine Function von $(x^2 \cdot y)$ sein muss. Setzt man zur Abkürzung wieder $\chi(\omega)$ statt $\chi(x^2 \cdot y)$, so bekommt man $p = -\frac{1}{x^2} \cdot \chi(\omega) + 2y \cdot \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}$ und $q = x \cdot \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}$. Setzt man diese für z, p und q hergestellten Ausdrücke in die Gleichungen IV und VI ein, so bekommt man bezüglich $\frac{d\chi(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{x^2 \cdot y} \cdot \chi(\omega)$ und $\frac{d\chi(\omega)}{d\omega} = \frac{2x^2 \cdot y + m \cdot \chi(\omega)}{3m \cdot x^2 \cdot y}$. Aus der Verbindung dieser zwei Gleichungen gibt sich $\chi(\omega) = \frac{x^2 \cdot y}{m}$, so dass Gleichung XI übergeht in $z = \frac{x \cdot y}{m}$, wie beim ersten und zweiten Verfahren.

Unter den hier obwaltenden Umständen reducirt sich Gleichung III auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta z^2 - 4x \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - 2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 8xy \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 4y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

und wenn man diesen Ausdruck (nach Anleitung des §. 12) untersucht; so erkennt man, dass er nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten kann. Somit findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x und bei irgend einem ebenfalls nach Belieben gewählten Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei den grade gewählten Werthen des x und des y alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen;

so findet bei den grade genommenen Werthen des x und des y zwischen der gesuchten Function und zwischen allen in Betracht zu ziehenden Functionen folgende Gleichung

$$z = z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdots\cdots\cdots$$

statt. Diese Gleichung ist aber, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, nur möglich, wenn (nach Analogie des §. 181, A) bei den grade für x und y genommenen Werthen einzeln stattfindet $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\delta^3 z = 0$, etc.; und Gleichung II reducirt sich jetzt auf

$$\delta U = 2 \cdot (2xy \cdot q - x \cdot z - x^2 \cdot p) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 4 \cdot \left(xy \cdot p - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q\right) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Damit also $\delta U = 0$ werden kann, müssen die beiden identischen Gleichungen

$$\text{XII)} \quad 2xy \cdot q - x \cdot z - x^2 \cdot p = 0, \text{ und XIII)} \quad xy \cdot p - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q = 0$$

stattfinden. Eliminirt man aus beiden Gleichungen zuerst p und dann q; so bekommt man folgende zwei neue Gleichungen:

Digitized by Google

$$\text{XIV)}\quad mz - 4xy + 3mx \cdot p = 0, \text{ und XV)}\quad z = 3y \cdot q - \frac{2 \cdot xy}{m}$$

Man betrachte nun in Gleichung XIV das y als constant, und forme sie um in

$$(mz - 4xy) \cdot dx + 3mx \cdot dz = 0$$

Der integrirende Factor dieser Gleichung ist $x^{-\frac{2}{3}}$, und dabei bekommt man

$$m \cdot z \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot dx + 3m \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot dz - 4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y \cdot dx = 0$$

Daraus gibt sich durch Integration

$$3m \cdot z \cdot x^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot y \cdot x^{\frac{4}{3}} = 3 \cdot \pi(y)$$

oder

$$\text{XVI)}\quad z = \frac{1}{m} \cdot x \cdot y + \frac{1}{m} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \pi(y)$$

wo $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$q = \frac{1}{m} \cdot x + \frac{1}{m} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{d\pi(y)}{dy}$$

und wenn man diese für z und q gefundenen Ausdrücke in XV einsetzt, so bekommt man nach gehöriger Reduction $\frac{d\pi(y)}{\pi(y)} = \frac{dy}{3y}$, woraus durch Integration $\pi(y) = B \cdot y^{\frac{1}{3}}$ folgt. Gleichung XVI geht also über in

$$\text{XVII)}\quad z = \frac{1}{m} \cdot x \cdot y + \frac{B}{m} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Durch diese für z gefundene Function, wo B ein noch willkürlicher Constanter ist, werden die beiden Gleichungen XII und XIII in der That zugleich identisch. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung III auf

$$\delta^2 U = -2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 8x \cdot y \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 4y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

Untersucht man diesen Ausdruck (nach §. 11), so erkennt man, dass er nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten kann; es findet also weder ein Maximumstand noch Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x und bei irgend einem ebenfalls nach Belieben gewählten Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

- α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch
- β) bei den grade gewählten Werthen des x und des y alle ihrem nach x hergestellten ersten partiellen Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der entsprechende Differentialquotient der gesuchten Function annimmt;

so findet bei den grade genommenen Werthen des x und des y zwischen der gesuchten Function und zwischen allen in Betracht zu ziehenden Functionen folgende Gleichung

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_x z}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x \delta^3 z}{dx} + \cdots\cdots$$

statt. Diese Gleichung ist aber, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, nur möglich, wenn bei den grade genommenen Werthen des x und des y einzeln stattfindet $\frac{d_x \delta z}{dx} = 0$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0$, $\frac{d_x \delta^3 z}{dx} = 0$ etc.; und Gleichung II reducirt sich auf

$$\delta U = 2 \cdot (z - xp) \cdot \delta z + 4 \cdot \left(xy \cdot p - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q\right) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Damit also $\delta U = 0$ werden kann, müssen die beiden identischen Gleichungen

Digitized by Google

$$\text{XVIII)}\quad z - x \cdot p = 0, \quad \text{und XIX)}\quad xy \cdot p - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q = 0$$

stattfinden. Eliminirt man aus beiden Gleichungen zuerst p und dann q, so bekommt man folgende zwei neue Gleichungen

$$\text{XX)}\quad z = x \cdot p, \quad \text{und XXI)}\quad mz + myq = 2xy$$

Aus Gleichung XX folgt gradezu $z = x \cdot f(y)$, wo $f(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Daraus gibt sich weiter $q = x \cdot \frac{df(y)}{dy}$; und wenn man für z und q die Ausdrücke in XXI einsetzt, so gibt sich nach gehöriger Reduction $m \cdot [dy \cdot f(y) + y \cdot df(y)] = 2y \cdot dy$; und daraus folgt durch Integration $m \cdot y \cdot f(y) = y^2 + C$, so dass man $f(y) = \frac{1}{my} \cdot (y^2 + C)$ bekommt. Die hier gesuchte Function ist also

$$\text{XXII)}\quad z = \frac{x}{m \cdot y} \cdot (y^2 + C)$$

Durch diese Function, wo C ein noch willkürlicher Constanter ist, werden die beiden Gleichungen XVIII und XIX in der That identisch. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung III auf

$$\delta^2 U = 2 \cdot \delta z^2 + 4 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv, somit findet hier ein Minimumstand statt.

Vierter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x und bei irgend einem gleichfalls nach Belieben gewählten Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei den grade gewählten Werthen des x und des y alle ihrem nach x hergestellten ersten partiellen Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der entsprechende Differentialquotient der gesuchten Function annimmt, und gleichzeitig noch

γ) bei den grade gewählten Werthen des x und des y alle ihrem nach y hergestellten ersten partiellen Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der entsprechende Differentialquotient der gesuchten Function annimmt;

so finden bei den grade für x und y genommenen Werthen folgende einzelne Gleichungen statt: $\frac{d_x \delta z}{dx} = 0$, $\frac{d_y \delta z}{dy} = 0$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0$, etc. Gleichung II reducirt sich also auf

$$\delta U = 2 \cdot (z - x \cdot p) \cdot \delta z$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss folgende identische Gleichung stattfinden

$$\text{XXIII)}\quad z - x \cdot p = 0$$

Daraus folgt gradezu

$$\text{XXIV)}\quad z = x \cdot f(y)$$

wo $f(y)$ eine noch ganz willkürliche Function von y ist. Wie dergleichen willkürliche Functionen bestimmt werden, wird in den folgenden Aufgaben gezeigt. Zugleich ist jetzt $\delta^2 U = 2 \cdot \delta z^2$, woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Fünfter Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x und bei irgend einem gleichfalls nach Belieben gewählten Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei den grade genommenen Werthen des x und des y alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen, und gleichzeitig noch


Digitized by Google

γ) bei den grade genommenen Werthen des x und des y alle ihrem nach x hergestellten ersten partiellen Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der entsprechende Differentialquotient der gesuchten Function annimmt;

so finden bei den grade für x und y genommenen Werthen folgende einzelne Gleichungen statt: $\delta z = 0$, $\frac{d_x \delta z}{dx} = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0$ etc.; und Gleichung II reducirt sich auf

$$\delta U = 4 \cdot \left(xyp - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q\right) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss folgende identische Gleichung

$$\text{XXV)} \quad xyp - \frac{2x \cdot y^2}{m} + y^2 \cdot q = 0$$

stattfinden. Diese Gleichung formt sich aber gradezu um in $2xy = mx \cdot p + myq$. Zum Zwecke des Integrirens bilde man sich daraus folgende drei einzelne Gleichungen

$$\frac{dz}{2xy} = \frac{dx}{mx}, \quad \frac{dz}{2xy} = \frac{dy}{my}, \text{ und } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Aus der letzteren dieser Gleichungen folgt $x = E \cdot y$, und somit geht $\frac{dz}{2xy} = \frac{dy}{my}$ über in $dz = \frac{E}{m} \cdot 2y \cdot dy$, woraus $z = \frac{E}{m} \cdot y^2 + G$ folgt. Aus $x = E \cdot y$ folgt $E = \frac{x}{y}$ und somit bekommt man

$$\text{XXVI)} \quad z = \frac{x \cdot y}{m} + \mathfrak{F} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)$$

Diese Gleichung, wo $\mathfrak{F}\left(\frac{x}{y}\right)$ eine ganz willkürliche Function des Quotienten $\frac{x}{y}$ vorstellt, ist das allgemeine Integral der Partialdifferentialgleichung XXV. Wie aber dergleichen willkürliche Functionen bestimmt werden, wird in den folgenden Aufgaben gezeigt. Zugleich ist jetzt $\delta^2 U = 2 \cdot y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$, woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Sechster Fall. Sucht man nur diejenige Function, die bei irgend einem nach Belieben genommenen Werthe des x und bei irgend einem gleichfalls nach Belieben genommenen Werthe des y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Functionen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Function stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei den grade genommenen Werthen des x und des y alle mit der gesuchten Function einerlei Werth bekommen, und gleichzeitig noch

γ) bei den grade genommenen Werthen des x und des y alle ihrem nach y hergestellten ersten partiellen Differentialquotient denselben Werth liefern, welchen der entsprechende Differentialquotient der gesuchten Function annimmt;

so finden bei den grade für x und y genommenen Werthen folgende einzelne Gleichungen statt: $\delta z = 0$, $\frac{d_y \delta z}{dy} = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0$, etc.; und Gleichung II reducirt sich auf

$$\delta U = 2 \cdot (2xyq - xz - x^2 \cdot p) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss folgende identische Gleichung

$$\text{XXVII)} \quad 2xy \cdot q - x \cdot z - x^2 \cdot p = 0$$

stattfinden. Für das allgemeine Integral dieser Partialdifferentialgleichung hat man aber bereits im ersten Falle

$$\text{XXVIII)} \quad z = \frac{1}{x} \cdot F\,(x^2 \cdot y)$$

gefunden. Hier ist $F(x^2 \cdot y)$ eine ganz willkürliche Function des Productes $(x^2 \cdot y)$.

Digitized by Google

Wie dergleichen willkürliche Functionen bestimmt werden, wird in den folgenden Aufgaben gezeigt. Zugleich ist jetzt $\delta^2 U = -2 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2$, woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Aufgabe 134.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene legt, und wenn man diese mit zwei in festen Punkten der Axe Y senkrechten Ebenen und ebenso mit zwei in festen Punkten der Axe X senkrechten Ebenen begränzt, das hierdurch auf der Berührungsebene begränzte **Parallelogramm** ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern in einem zu den nemlichen Abscissen x und y gehörigen Punkte berührten und der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann.

Die Berührungsebene sei (fig. 26) durch ihre Spuren P'Q und PQ gegeben. Die auf der Axe Y in den festen Punkten b und β senkrechten Ebenen haben die Spuren βt' und bw'; die auf der Axe X in den festen Punkten a und α senkrechten Ebenen haben die Spuren ak und αu. Das auf der Berührungsebene P'QP begränzte Parallelogramm DEFG habe die Projectionen d'e'f'g' und defg. Die Gleichung einer Berührungsebene im Allgemeinen ist

$$\text{I)}\quad z' - z = (y' - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (x' - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

oder

$$\text{II)}\quad z' = z + (y' - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (x' - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

Hier sind x', y', z' die veränderlichen Coordinaten der Berührungsebene, dagegen x, y, z sind die (übrigens ebenfalls veränderlichen) Coordinaten des zur Fläche gehörigen Punktes, in welchem man gerade die Berührung wählt. Es kommt also jetzt darauf an, den Inhalt des Parallelogramms DEFG zu bestimmen, was am bequemsten mittelst folgenden Lehrsatzes geschieht:

„Das Quadrat irgend einer ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate „ihrer auf die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren."

Man setze zur Abkürzung Oa = a, Oα = α, Ob = b, Oβ = β; so hat man jetzt

$$O\delta = z + (b - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (a - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

$$O\eta = z + (\beta - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (a - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

$$O\lambda = z + (b - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (\alpha - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

$$O\zeta = z + (\beta - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (\alpha - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

Das Parallelogramm defg hat den Inhalt $(\lambda g - \eta e) \cdot de$, oder $(\lambda g - \eta e) \cdot (O\eta - O\delta)$, oder

$$\text{III)}\quad (\alpha - a)(\beta - b) \cdot \frac{d_y z}{dy}$$

Das Parallelogramm d'e'f'g' hat den Inhalt $(\eta e' - \lambda g') \cdot d'g'$, oder $(\eta e' - \lambda g') \cdot (O\lambda - O\delta)$, oder

$$\text{IV)}\quad (\beta - b)(\alpha - a) \cdot \frac{d_x z}{dx}.$$

Digitized by Google

Die auf die Coordinatenebene XY bezogene Projection des Parallelogramms DEFG ist ein Rechteck, und hat den Inhalt $(O\beta - Ob) \cdot (O\alpha - Oa)$, oder

$$\text{V)} \quad (\beta - b) \cdot (\alpha - a)$$

Setzt man U statt DEFG, so bekommt man nach obigem Lehrsatze

$$\text{VI)} \quad U = (\alpha - a) \cdot (\beta - b) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}$$

Weil die beiden Abscissendifferenzen $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ positiv sind, so ist auch das ganze (bei den Abscissen a und b anfangende und bis zu den Abscissen α und β erstreckte) Stück DEFG der Berührungsebene positiv. Dazu ist aber nöthig, dass man dem Radical seine positive Bedeutung beilege, welche ihm durch die ganze Untersuchung bleiben muss. Man mutire und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und q statt $\frac{d_y z}{dy}$; so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left[\frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right]$$

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = \frac{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left[\frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right]$$
$$+ \frac{(\alpha - a)(\beta - b)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]$$

Es leuchtet von selbst ein, dass die Grösse des so begränzten Parallelogramms nicht abhängig ist von seiner Entfernung von der Coordinatenebene XY, sondern nur von den Winkeln, welche die Berührungsebene mit den Coordinatenebenen bildet; denn auf allen parallelen Ebenen werden von den vier Gränzebenen gleich grosse Parallelogramme abgeschnitten. Was aber hier aus einfacher Betrachtung folgt, stimmt ganz mit Gleichung VII überein; denn da sie keinen mit δz behafteten Theilsatz enthält, so hat die Mutation von z keinen Einfluss auf U (d. h. auf die Grösse dieses auf der Berührungsebene abgeschnittenen Parallelogramms), und nur die Mutation von $\frac{d_x z}{dx}$ und $\frac{d_y z}{dy}$ hat Einfluss darauf (man vergleiche Aufgabe 68).

Erster Fall. Sucht man eine solche Fläche, welche bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei den nemlichen Abscissen x und y alle möglichen, der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden, Nachbarflächen machen können; so sind $\frac{d_x \delta z}{dx}$ und $\frac{d_y \delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δz auch die Formen des $\frac{d_x \delta z}{dx}$ und des $\frac{d_y \delta z}{dy}$ mitgegeben sind, etc. (man sehe §. 95). Es kann also nur $\delta U = 0$ werden, wenn gleichzeitig stattfindet:

$$\text{IX)} \quad \frac{d_x z}{dx} = 0, \text{ und X)} \quad \frac{d_y z}{dy} = 0$$

Integrirt man Gleichung IX, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{XI)} \quad z = \pi(y)$$

wo $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Daraus folgt $\frac{d_y z}{dy} = \frac{d\pi(y)}{dy}$; und weil dadurch auch Gleichung X erfüllt werden soll, so muss $\frac{d\pi(y)}{dy} = 0$ sein. Es ist also $\pi(y) = A$, d. h. constant. Gleichung XI geht daher über in

$$\text{XII)} \quad z = A$$

Digitized by Google

d. h. z ist constant, wodurch die in irgend einem Punkte der Axe Z senkrechte Ebene vorgestellt ist, welche insofern die Aufgabe löst, als sie zugleich ihre eigene Berührende ist. Es ist jetzt $U' = (\alpha - a) \cdot (\beta - b)$, und $\delta^2 U = (\alpha - a) \cdot (\beta - b) \cdot \left[\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]$; und weil $\delta^2 U$ unter allen Umständen positiv bleibt, so ist U' ein Minimumstand, während, eben weil U' von den Werthen des x und des y ganz unabhängig ist, von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann.

Zweiter Fall. Die Gleichung II der Berührungsebene lässt sich auch auf folgende Weise schreiben:

$$\text{XIII)} \quad z' = \frac{d_y z}{dy} \cdot y' + \frac{d_x z}{dx} \cdot x' + \left(z - \frac{d_y z}{dy} \cdot y - \frac{d_x z}{dx} \cdot x\right)$$

Daraus ergibt sich bekanntlich die Gleichung der in der Coordinatenebene XZ liegenden Spur, wenn man $y' = 0$ setzt; und man hat

$$\text{XIV)} \quad z' = \frac{d_x z}{dx} \cdot x' + \left(z - \frac{d_y z}{dy} \cdot y - \frac{d_x z}{dx} \cdot x\right)$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass $\frac{d_x z}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels ist, welcher von der in der Coordinatenebene XZ liegenden Spur der Berührungsebene mit der Axe X eingeschlossen wird.

Es ergibt sich aber auch aus Gleichung XIII die Gleichung der in der Coordinatenebene YZ liegenden Spur, wenn man $x' = 0$ setzt; und man hat

$$\text{XV)} \quad z' = \frac{d_y z}{dy} \cdot y' + \left(z - \frac{d_y z}{dy} \cdot y - \frac{d_x z}{dx} \cdot x\right)$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass $\frac{d_y z}{dy}$ die goniometrische Tangente des Winkels ist, welcher von der in der Coordinatenebene YZ liegenden Spur der Berührungsebene mit der Axe Y eingeschlossen wird.

Sucht man also nur diejenige Fläche, die bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle Flächen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegen, sondern bei denen allen

β) die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen sind, dass ihre in der Coordinatenebene XZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene;

so schliessen alle diese Spuren mit der Axe X einen gleichgrossen Winkel ein. Es muss also bei den grade genommenen Abscissen x und y zwischen der gesuchten und allen hier in Betracht zu ziehenden Flächen folgende Gleichung

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_x z}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x \delta^3 z}{dx} + \cdots\cdots$$

stattfinden (man vergleiche Aufgabe 61, Einleitung, B). Weil aber $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, so ist (nach § 88, dritte Abtheilung, Seite 140—142 oder nach Analogie des § 181, B) letztere Gleichung nur möglich, wenn bei den grade genommenen Abscissen x und y einzeln stattfindet $\frac{d_x \delta z}{dx} = 0$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0$, etc.; und hierbei zieht sich Gleichung VII zurück auf

$$\text{XVI)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a)\,(\beta - b)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Daraus folgt aber nur die einzige Gleichung

$$\text{XVII)} \quad \frac{d_y z}{dy} = 0$$

welche die Partialdifferentialgleichung der jetzt gesuchten Fläche ist. Durch Integration bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XVIII)} \quad z = F(x)$$

wo $F(x)$ kein y enthält, dagegen jede beliebige Function von x oder auch einen constanten Ausdruck vorstellt. Die gesuchte Fläche ist also jetzt jede beliebige auf der Coordinatenebene XZ senkrechte Cylinderfläche oder auch eine auf der Coordinatenebene XZ senkrechte Ebene, welche letztere die Aufgabe insoferne löst, als sie zugleich ihre eigene Berührende ist. Aus Gleichung XVIII folgt noch weiter, dass $\frac{d_x z}{dx} = \frac{dF(x)}{dx}$; und die Gleichungen VI und VIII gehen nun über in

$$U' = (\alpha - a)\,(\beta - b) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2}, \text{ und } \delta^2 U = \frac{(\alpha - a)\,(\beta - b)}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

Unter allen Flächen also, deren Berührungsebenen ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel haben, wird das auf vorgeschriebene Weise begränzte Parallelogramm ein Minimum-stand, wenn die in den Coordinatenebenen YZ und YX liegenden Spuren der Berührungsebene bezüglich auf den Axen Z und X senkrecht stehen, d. h. mit der Axe Y parallel laufen.

Zusatz. Man kann die willkürliche Function $F(x)$ durch folgende Bedingung bestimmen: „es soll eine durch die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \text{ und } f'(x, y, z) = 0$$

gegebene räumliche Curve ganz und mit allen ihren Punkten in der gesuchten Fläche liegen." Wenn man nun aus letzteren Gleichungen y und z durch x ausdrückt, und dann den für z gefundenen Ausdruck statt $F(x)$ in Gleichung XVIII einsetzt; so hat man die Cylinderfläche bestimmt, welche der hier gemachten Bedingung genügt.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Fläche, die bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn alle die Flächen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche setsfort nächstanliegen, sondern bei denen allen

β) die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen sind, dass ihre in der Coordinatenebene YZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene;

so schliessen jetzt alle diese Spuren mit der Axe Y einen gleichgrossen Winkel ein. Es muss also bei den grade genommenen Werthen des x und des y einzeln stattfinden $\frac{d_y \delta z}{dy} = 0$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0$, etc.; und Gleichung VII zieht sich zurück auf

$$\text{XIX)} \quad \delta U = \frac{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

Daraus folgt die einzige Gleichung

$$\text{XX)} \quad \frac{d_x z}{dx} = 0$$

welche die Partialdifferentialgleichung der jetzt gesuchten Fläche ist. Durch Integration bekommt man

$$\text{XXI)} \quad z = \mathfrak{F}(y)$$

wo $\mathfrak{F}(y)$ kein x enthält, dagegen jede beliebige Function von y oder auch einen constanten Ausdruck vorstellt.

Alles Weitere nach dem Vorgange des vorigen Falles.

Aufgabe 135.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man in den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene legt, das Dreieck, welches von den Coordinaten-

Digitized by Google

axen X und Y und von der in der Coordinatenebene XY liegenden Spur der besagten Berührungsebene begränzt wird, ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern in einem zu den nemlichen Abscissen x und y gehörigen Punkte berührten und der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann.

Die Gleichung der Berührungsebene ist bekanntlich

$$\text{I)}\quad z' - z = (y' - y)\cdot\frac{d_y z}{dy} + (x' - x)\cdot\frac{d_x z}{dx}$$

Hier sind z', y', x' die veränderlichen Coordinaten der Berührungsebene, dagegen z, y, x sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes der Fläche, in welchem man grade die Berührung wählt. Wenn nun (fig. 27) die Berührungsebene gegeben ist durch die Spuren PQ und P'Q, und O der Anfangspunkt der Coordinaten ist; so sind die drei Punkte v, O, w die drei Spitzen des in Rede stehenden rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\text{II)}\quad \frac{1}{2}\cdot Ov\cdot Ow$$

Für den Punkt v verschwinden x' und z', dagegen für den Punkt w verschwinden y' und z'. Setzt man nun zur Abkürzung in Gleichung I noch p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und q statt $\frac{d_y z}{dy}$, so bekommt man $Ov = y' = \frac{px + qy - z}{q}$, und $Ow = x' = \frac{px + qy - z}{p}$. Es ergibt sich also aus II für den Flächeninhalt des in Rede stehenden Dreiecks

$$\text{III)}\quad U = \frac{1}{2\cdot p\cdot q}\cdot(px + qy - z)^2$$

Daraus bekommt man durch Mutiren

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{2\cdot p\cdot q}\cdot(px + qy - z)\cdot\left[-2\cdot\delta z + \frac{px - qy + z}{p}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + \frac{qy - px + z}{q}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\right]$$

Erster Fall. Sucht man eine solche Fläche, welche bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y den vorgelegten Ausdruck grösser oder kleiner macht, als ihn bei den nemlichen Abscissen x und y alle möglichen, der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden, Nachbarflächen machen können; so sind δz, $\frac{d_x\delta z}{dx}$, $\frac{d_y\delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δz auch die Formen von $\frac{d_x\delta z}{dx}$ und von $\frac{d_y\delta z}{dy}$ mitgegeben sind etc. (man sehe §. 95). Es kann also hier nur dann $\delta U = 0$ werden, wenn die Gleichung

$$\text{V)}\quad px + qy - z = 0$$

stattfindet. Daraus folgt nach bekannter Methode

$$\text{VI)}\quad z = x\cdot\chi(\omega),\ \text{während VII)}\quad \omega = \frac{y}{x}\ \text{ist.}$$

Das allgemeine Integral ist also

$$\text{VIII)}\quad z = x\cdot\chi\left(\frac{y}{x}\right)$$

wo $\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine ganz willkürliche Function von $\frac{y}{x}$ vorstellt, so dass es eine unendliche Menge von Flächen gibt, welche der Aufgabe genügen können. Alle diese Flächen haben aber, wie auch immer $\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ genommen werden mag, das Gemeinschaftliche, dass sie durch Bewegung einer durch O hindurchgehenden graden Linie erzeugt sind, was daraus hervorgeht, dass für alle Punkte der Fläche, für welche $\frac{y}{x}$ den constanten Werth

Digitized by Google

α behält, auch allemal $\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ den constanten Werth $\chi(\alpha)$ behält, so dass dabei die Gleichungen VI und VII übergehen in

$$z = x \cdot \chi(\alpha), \text{ und } y = \alpha \cdot x$$

Dieses sind aber die Gleichungen einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden und sich nach dem durch $\chi(\alpha)$ ausgedrückten Gesetze bewegenden Graden. Die verschiedenen Werthe, welche man nach und nach dem α beilegt, werden dann auch die verschiedene Lage der aber immer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Graden bedingen. Eliminirt man α aus den beiden letzten Gleichungen, so bekommt man wieder Gleichung VIII. Mutirt man Gleichung IV noch einmal, und berücksichtigt man dann Gleichung V, woraus namentlich $px = z - qy$ und $qy = z - px$ folgt; so bekommt man nach gehörigen Substitutionen und Reductionen

$$\delta^2 U = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \left(- \delta z + x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + y \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

Der eingeklammerte Factor ist jederzeit positiv; somit hangt es von dem Producte $p \cdot q$ ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, während von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann, da $U' = 0$ ist, unabhängig von dem Werthe des x und des y.

Wenn man für $\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ bestimmte Functionen nimmt, so behommt man auch bestimmte Flächen. Dergleichen mögen sein

$$1) \quad z = x \cdot \left(a + b \cdot \frac{y}{x}\right) \text{ oder } z = ax + by$$

Dieses ist aber die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Ebene auch zugleich ihre eigene Berührende ist.

$$2) \quad z = x \cdot \sqrt{a + b \cdot \frac{y^2}{x^2}}, \text{ oder } z = \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot y^2}$$

$$3) \quad z = x \cdot \frac{a + b \cdot \frac{y}{x} + c \cdot \frac{y^2}{x^2}}{g + h \cdot \frac{y}{x}}, \text{ oder } z = \frac{a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2}{gx + h \cdot y}$$

$$4) \quad z = x \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{y}{x}, \text{ oder } y = x \cdot e^{\frac{z}{x}}$$

$$5) \quad z = x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Und so ohne Ende fort

Zusatz. Die noch willkürliche Function $\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ kann aber bestimmt werden, wenn man die dazu geeigneten Nebenbedingungen aufstellt. Macht man z. B. die Bedingung, dass die gesuchte Fläche nicht nur die in Gleichung V ausgesprochene Eigenschaft habe, sondern dass sie auch noch durch die mittelst der Gleichungen

$$z = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad \text{und} \quad y = n \cdot x^2 + g \cdot x$$

gegebene räumliche Curve hindurchgehe, so dass diese Curve ganz und mit allen ihren Punkten in der gesuchten Fläche liegt; so muss Gleichung VIII identisch werden, sobald man $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ statt z, und $n \cdot x^2 + g \cdot x$ statt y substituirt. Die Gleichungen VI und VII gehen aber durch diese Substitutionen bezüglich über in

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = x \cdot \chi(\omega), \quad \text{und} \quad \omega = n \cdot x + g$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt $x = \frac{\omega - g}{n}$; und wenn man diesen Ausdruck statt x in die erste einsetzt, so bekommt man

Digitized by Google

$$a \cdot \left(\frac{\omega - g}{n}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{\omega - g}{n}\right) + c = \left(\frac{\omega - g}{n}\right) \cdot \chi(\omega)$$

Daraus folgt

$$\chi(\omega) = a \cdot \left(\frac{\omega - g}{n}\right) + b + \frac{n \cdot c}{\omega - g}$$

oder

$$\chi\left(\frac{y}{x}\right) = a \cdot \left(\frac{y - g \cdot x}{nx}\right) + b + \frac{n \cdot c \cdot x}{y - g \cdot x}$$

oder

$$\chi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a}{nx} \cdot (y - gx) + b + \frac{n \cdot cx}{y - gx}$$

Die Gleichung VIII geht also jetzt über in

$$z = \frac{a}{n} \cdot (y - gx) + bx + \frac{n \cdot c \cdot x^2}{y - gx}$$

Dieses ist aber die Gleichung einer völlig bestimmten Fläche der zweiten Ordnung; und in dieser Fläche liegt die vorgeschriebene räumliche Curve mit allen ihren Punkten.

Zweiter Fall. Sucht man nur diejenige Fläche, von welcher bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als er von allen den Flächen, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben,

gemacht werden kann; so ist jetzt $\delta z = 0$, $\delta^2 z = 0$ etc., und Gleichung IV zieht sich zurück auf

$$\text{IX)} \quad \delta U = \frac{px + qy - z}{2 \cdot p \cdot q} \cdot \left(\frac{px - qy + z}{p} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{qy - px + z}{q} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)$$

Da aber auch jetzt die beiden Ausdrücke $\frac{d_x \delta z}{dx}$ und $\frac{d_y \delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander sind; so kann nur $\delta U = 0$ werden, wenn entweder die einzige Gleichung $px + qy - z = 0$ stattfindet, oder wenn die beiden Gleichungen $px - qy + z = 0$ und $qy - px + z = 0$ gleichzeitig stattfinden.

A) Findet nur die einzige Gleichung $px + qy - z = 0$ statt, so hat man wieder $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, und $U' = 0$ für jeden Werth des x und für jeden Werth des y. Ferner ist dabei

$$\text{X)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \left(x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + y \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

so dass es auch jetzt wieder vom Producte pq abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, während von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann

B) Finden aber die beiden Gleichungen $px - qy + z = 0$ und $qy - px + z = 0$ zugleich statt; so muss es auch eine Function z von x und y geben, welche diese beiden Gleichungen zugleich identisch macht. Eliminirt man q, so bekommt man $z = 0$; und eliminirt man p, so bekommt man wieder $z = 0$. Man hat also die in die Coordinatenebene XY fallende Ebene als gesuchte Fläche. Dabei ist $p = 0$ und $q = 0$, so dass $U' = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt ist, was sich durch folgende geometrische Betrachtung noch näher erläutern lässt. Die gesuchte Fläche ist die in die Coordinatenebene XY fallende Ebene; die Berührungsebene der gesuchten Fläche fällt also auch in die Coordinatenebene XY. Somit wird die Coordinatenebene XY von der Berührungsebene nicht geschnitten, und das in der Aufgabe besagte Dreieck ist jetzt die von den Abscissenaxen X und Y eingeschlossene unbestimmte Winkelebene. Es kann also auch von einem Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein.

Dritter Fall. Sucht man nur diejenige Fläche, von welcher bei irgend zwei

Digitized by Google

nach Belieben gewählten Abscissen x und y der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als ihn alle die Flächen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt gemeinschaftlich haben, und bei denen allen

γ) die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen sind, dass ihre in der Coordinatenebene YZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene;

so schliessen jetzt alle diese Spuren mit der Axe Y einen gleichgrossen Winkel ein (man sehe den zweiten Fall der 134[ten] Aufgabe). Es muss also jetzt bei den grade genommenen Werthen des x und des y einzeln stattfinden $\delta z = 0$, $\frac{d_y \delta z}{dy} = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0$, etc.; und Gleichung IV zieht sich zurück auf

$$\text{XI)}\quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot p^2 \cdot q} \cdot (px + qy - z) \cdot (px - qy + z) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

Es ist also entweder $px + qy - z = 0$ oder $px - qy + z = 0$.

Erstens. Ist $px + qy - z = 0$, so ist $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\delta^2 U = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \left(x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2$, und $U' = 0$ unabhängig vom Werthe des x und des y, so dass von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann; und da es auch jetzt vom Producte $p \cdot q$ abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, so erkennt man, dass man auch jetzt wieder das Resultat des ersten Falles hat.

Zweitens. Ist $px - qy + z = 0$, so folgt daraus nach bekannter Methode:

$$\text{XII)}\quad z = \frac{1}{x} \cdot \pi(\eta), \quad \text{und} \quad \text{XIII)}\quad \eta = x \cdot y$$

Das allgemeine Integral ist also

$$\text{XIV)}\quad z = \frac{1}{x} \cdot \pi(x \cdot y)$$

wo $\pi(x \cdot y)$ eine ganz willkürliche Function des Productes $x \cdot y$ ist, so dass es auch jetzt eine unendliche Menge von Flächen gibt, welche der Aufgabe genügen können. Alle diese Flächen haben aber, wie auch $\pi(x \cdot y)$ genommen werden mag, das Gemeinsame, dass sie durch Bewegung einer von zwei gleichseitigen hyperbolischen Cylindern gebildeten Durchschnittscurve erzeugt sind. Davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen: So oft das Product $x \cdot y$ den constanten Werth α hat, hat auch die Function $\pi(x \cdot y)$ den constanten Werth $\pi(\alpha)$, so dass dabei die Gleichungen XII und XIII übergehen in

$$x \cdot z = \pi(\alpha) \quad \text{und} \quad x \cdot y = \alpha$$

Diese Cylinder stehen auf den Coordinatenebenen XZ und XY senkrecht, und ändern sich, wenn der Werth des α sich ändert. Die Durchschnittscurve ändert also auch sowohl ihre Lage als ihre Gestalt, wenn der Werth des α sich ändert; das Gesetz dieser Aenderung selbst ist willkürlich, so lange noch $\pi(\alpha)$ willkürlich ist. Mutirt man nun Gleichung XI noch einmal, und berücksichtigt man, dass $qy - z = px$ und $px - qy + z = 0$ ist; so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{1}{p \cdot q} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2$$

so dass es auch jetzt von dem Producte $p \cdot q$ abhangt, ob $U' = \frac{2 \cdot p}{q} \cdot x^2$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist. Wenn man für $\pi(x \cdot y)$ bestimmte Functionen annimmt, so bekommt man auch bestimmte Flächen. Dergleichen mögen sein

$$\text{1)}\quad z = \frac{1}{x} \cdot \frac{a \cdot x \cdot y + b \cdot x^2 \cdot y^2}{c + g \cdot x \cdot y}, \text{ oder } z = \frac{a \cdot y + b \cdot x \cdot y^2}{c + g \cdot x \cdot y}$$

Digitized by Google

$$2) \quad z = \frac{a \cdot b}{x} \lg \text{nat} \frac{x \cdot y}{c \cdot g}, \text{ oder } x \cdot y = c \cdot g \cdot e^{\frac{x.z}{a.b}}$$

Und so ohne Ende fort.

Zusatz. Die noch willkürliche Function $\pi(x \cdot y)$ kann bestimmt werden, wenn man die gesuchte Fläche z. B. zwingt, durch eine mittelst der Gleichungen

$$z = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^2}{x}, \text{ und } y = \frac{c^2}{x} + g$$

gegebene räumliche Curve hindurch zu gehen, so dass diese Curve ganz und mit allen ihren Punkten in der gesuchten Fläche liegt. Dabei muss Gleichung XIV identisch werden, so oft man $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^2}{x}$ statt z, und $\frac{c^2}{x} + g$ statt y substituirt. Die Gleichungen XII und XIII gehen aber durch diese Substitution über in

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^2}{x} = \frac{1}{x} \cdot \pi(\eta), \text{ und } \eta = x \cdot \left(\frac{c^2}{x} + g\right)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt $x = \frac{\eta - c^2}{g}$ und wenn man diesen Ausdruck für x in die erste einsetzt, so bekommt man

$$\pi(\eta) = \frac{a^3 \cdot g}{\eta - c^2} + b^2$$

oder

$$\pi(x \cdot y) = \frac{a^3 \cdot g}{x \cdot y - c^2} + b^2$$

Die Gleichung XIV geht also jetzt über in

$$z = \frac{a^3 \cdot g}{x \cdot (x \cdot y - c^2)} + \frac{b^2}{x}$$

oder

$$(xz - b^2) \cdot (x \cdot y - c^2) = a^3 \cdot g$$

Dieses ist aber die Gleichung einer völlig bestimmten Fläche der vierten Ordnung; und in dieser Fläche liegt die vorgeschriebene räumliche Curve mit allen ihren Punkten.

Vierter Fall. Sucht man nur diejenige Fläche, von welcher bei irgend zwei nach Belieben genommenen Abscissen x und y der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als ihn alle die Flächen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) bei den grade gewählten Abscissen x und y alle ihre Berührungsebenen mit der Berührungsebene der gesuchten Fläche parallel haben;

so ist für diesen Fall zu beachten, dass, wenn Ebenen miteinander parallel laufen, auch alle ihre mit irgend einer andern Ebene gemachten Schnitte unter sich parallel sind. Daraus folgt:

1) Bei allen hier in Betracht zu ziehenden Flächen sind die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen, dass ihre in der Coordinatenebene XZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene. Es schliessen also alle diese Spuren mit der Axe X einen gleichgrossen Winkel ein.

2) Ferner sind auch bei allen in Betracht zu ziehenden Flächen die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen, dass ihre in der Coordinatenebene YZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene. Es schliessen also alle diese Spuren mit der Axe Y einen gleichgrossen Winkel ein.

Nun ist (siehe den zweiten Fall der 134[sten] Aufgabe) durch $\frac{d_x z}{dx}$ die goniometrische Tangente des Winkels dargestellt, welcher von der in der Coordinatenebene XZ liegenden Spur der Berührungsebene mit der Axe X eingeschlossen wird. Ebenso ist durch $\frac{d_y z}{dy}$ die goniometrische Tangente des Winkels dargestellt, welcher von der in

Digitized by Google

der Coordinatenebene YZ liegenden Spur der Berührungsebene mit der Axe Y eingeschlossen wird. Bei den grade genommenen Abscissen x und y müssen also zwischen der gesuchten und allen hier in Betracht zu ziehenden Flächen gleichzeitig folgende zwei Gleichungen

$$\frac{d_x z}{dx} = \frac{d_x z}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x \delta^3 z}{dx} + \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d_y z}{dy} = \frac{d_y z}{dy} + \varkappa \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_y \delta^3 z}{dy} + \dots\dots\dots\dots$$

stattfinden (man vergleiche Aufgabe 61, Einleitung, B). Weil aber $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, so sind letztere Gleichungen (nach §. 88, dritte Abtheilung, Seite 140—142, oder nach Analogie des §. 181, B) nur möglich, wenn bei den grade genommenen Abscissen x und y einzeln stattfindet

$$\frac{d_x \delta z}{dx} = 0, \; \frac{d_y \delta z}{dy} = 0, \; \frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0, \; \frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0 \text{ etc.}$$

und Gleichung IV zieht sich zurück auf

$$\text{XV)} \quad \delta U = -\frac{1}{p \cdot q} \cdot (px + qy - z) \cdot \delta z$$

Daraus folgt die Gleichung $px + qy - z = 0$, welche das schon im ersten Falle befindliche Integral $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$ liefert. Ferner ist jetzt

$$\delta^2 U = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \delta z^2$$

so dass es abermals vom Producte $p \cdot q$ abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 136.

Bei welcher Fläche ist die von der Berührungsebene und den drei Coordinatenebenen begränzte dreiseitige Pyramide ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Die Gleichung der Berührungsebene ist bekanntlich

$$\text{I)} \quad z' - z = (y' - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + (x' - x) \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

Wenn nun (fig. 27) die Berührungsebene gegeben ist durch ihre Spuren P′Q und PQ, und O der Anfangspunkt der Coordinaten ist; so sind die vier Punkte v, w, O, Q die vier Ecken der in Rede stehenden Pyramide, deren Körperinhalt gegeben ist durch

$$\text{II)} \quad \frac{1}{6} \cdot Ow \cdot Ov \cdot OQ$$

Für den Punkt v verschwinden x′ und z′, für den Punkt w verschwinden y′ und z′ für den Punkt Q verschwinden x′ und y′. Man bekommt also

$$Ov = y' = -\frac{1}{q} \cdot (z - px - qy)$$

$$Ow = x' = -\frac{1}{p} \cdot (z - px - qy)$$

$$OQ = z' = (z - px - qy)$$

Es ergibt sich also aus II für den Körperinhalt der in Rede stehenden Pyamide

$$\text{III)} \quad U = \frac{1}{6 \cdot p \cdot q} \cdot (z - px - qy)^3$$

Daraus bekommt man durch Mutiren

Digitized by Google

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{1}{6 \cdot pq} \cdot (z - qy - px)^2 \cdot \left[3 \cdot \delta z - \frac{2px - qy + z}{p} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{2qy - px + z}{q} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right]$$

Erster Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der vorigen Aufgabe; so sind δz, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und es wird $\delta U = 0$, wenn die identische Gleichung

$$\text{V)} \quad z - px - qy = 0$$

stattfindet. Daraus folgt $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, und $U' = 0$ für jeden Werth des x und für jeden Werth des y. Ferner ist auch $\delta^2 U = 0$, während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird; es findet also weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe; so reducirt sich Gleichung IV auf

$$\text{VI)} \quad \delta U = \frac{1}{6pq} \cdot (z - px - qy)^2 \cdot \left(\frac{2px - qy + z}{p} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{2qy - px + z}{q} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)$$

Da auch jetzt die beiden Ausdrücke $\frac{d_x \delta z}{dx}$ und $\frac{d_y \delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander sind, so kann nur $\delta U = 0$ werden, entweder wenn die einzige Gleichung $z - px - qy = 0$ stattfindet, oder wenn die beiden Gleichungen $2px - qy + z = 0$ und $2qy - px + z = 0$ gleichzeitig stattfinden.

A) Findet nur die einzige Gleichung $z - px - qy = 0$ statt, so ist wieder $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, $U' = 0$ und $\delta^2 U = 0$, während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird. Es besteht also jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand.

B) Finden aber die beiden Gleichungen $2px - qy + z = 0$ und $2qy - px + z = 0$ zugleich statt; so eliminire man zuerst q und dann p, und man bekommt die zwei neuen Gleichungen:

$$\text{VII)} \quad z + px = 0, \text{ und VIII)} \quad z + qy = 0$$

Aus VII folgt gradezu

$$\text{IX)} \quad z \cdot x = \pi(y)$$

Daraus bekommt man $z = \frac{1}{x} \cdot \pi(y)$, und $q = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\pi(y)}{dy}$, und wenn man diese beiden Ausdrücke in VIII einsetzt, so gibt sich $\left(\pi(y) + y \cdot \frac{d\pi(y)}{dy}\right) \cdot \frac{1}{x} = 0$, oder vielmehr $\pi(y) + y \cdot \frac{d\pi(y)}{dy} = 0$. Daraus folgt weiter $y \cdot \pi(y) = B$, oder $\pi(y) = \frac{B}{y}$, wobei Gleichung IX übergeht in

$$\text{X)} \quad xyz = B$$

wo B ein willkürlicher Constanter ist, so dass die Gleichung der jetzt gefundenen Fläche keine willkürliche Function enthält. Aus Gleichung X folgt nun $px = -z$ und $qy = -z$, wodurch den hiesigen Gleichungen $2px - qy + z = 0$ und $2qy - px + z = 0$ zugleich genügt wird. Hierbei ist

$$\delta^2 U = -\frac{3xy}{2z} \cdot \left[\left(x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + y \cdot \frac{d_y \delta y}{dy}\right)^2 + \left(x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(y \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]$$

so dass es von dem Ausdrucke $\frac{xy}{z}$ abhängt, ob $U' = \frac{9}{2} \cdot xyz$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Dritter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der vorigen Aufgabe, so reducirt sich Gleichung IV auf

$$\text{XI)} \quad \delta U = -\frac{1}{6 \cdot p^2 \cdot q} \cdot (z - px - qy)^2 \cdot (2px - qy + z) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

Digitized by Google

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss entweder $z - px - qy = 0$ oder $2px - qy + z = 0$ sein.

A) Setzt man $z - px - qy = 0$, so gibt sich $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, $U' = 0$ und $\delta^2 U = 0$, während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird. Es findet also weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

B) Setzt man $2px - qy + z = 0$, so folgt daraus nach bekannter Methode

$$\text{XII)} \quad z = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot F(\omega), \text{ und XIII)} \quad \omega = y \cdot \sqrt{x}$$

Das allgemeine Integral ist also

$$\text{XIV)} \quad z = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot F(y \cdot \sqrt{x})$$

wo $F(y \cdot \sqrt{x})$ eine ganz willkürliche Function des Productes $(y \cdot \sqrt{x})$ ist. Hierbei ist $\delta^2 U = -\frac{3 \cdot x^3}{q} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2$, so dass es von $\frac{x^3}{q}$ abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 137.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \frac{1}{2 \cdot p \cdot q} \cdot (z - px - qy)^2 \cdot (1 - p - q)$$

bei irgend nach Belieben gewählten Abscissen x und y grösser oder kleiner macht, als ihn bei den nemlichen Abscissen alle andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen machen können?

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{z - p \cdot x - q \cdot y}{2p \cdot q} \cdot \left[-\frac{1}{p} \cdot (2 \cdot (1 - p - q) \cdot px + (z - px - qy) \cdot (1 - q)) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{q} \cdot (2 \cdot (1 - p - q) \cdot qy + (z - px - qy) \cdot (1 - p)) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2 \cdot (1 - p - q) \cdot \delta z \right]$$

Specieller Fall. Soll dieselbe Allgemeinheit gelten, wie beim ersten Falle der 135sten Aufgabe; so sind δz, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und es wird $\delta U = 0$, entweder wenn die einzige Gleichung $z - px - qy = 0$, oder wenn gleichzeitig die beiden Gleichungen $1 - p - q = 0$ und $z - px - qy = 0$ stattfinden.

A) Findet nur die einzige Gleichung $z - px - qy = 0$ statt, so ist $z = x \cdot \chi\left(\frac{y}{x}\right)$, und $U' = 0$ für jeden Werth des x und für jeden Werth des y.

B) Finden aber die beiden Gleichungen $1 - p - q = 0$ und $z - px - qy = 0$ gleichzeitig statt, so eliminire man zuerst q und dann p, und man bekommt die zwei neuen Gleichungen:

$$\text{III)} \quad z - y - p \cdot (x - y) = 0, \quad \text{und IV)} \quad z - x - q \cdot (y - x) = 0$$

Aus III folgt gradezu

$$\text{V)} \quad z = y + (x - y) \cdot \pi(y)$$

Daraus folgt $q = 1 - \pi \cdot (y) + (x - y) \cdot \frac{d\pi(y)}{dy}$; und wenn man diese für z und q gefundenen Ausdrücke in IV einsetzt, so gibt sich $\frac{d\pi(y)}{dy} = 0$; es ist also $\pi(y) = A$, d. h. constant. Gleichung V geht nun über in

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad z = A \cdot x + (1 - A) \cdot y$$

Dabei ist aber auch $\delta^2 U = 0$, während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird; und somit findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Die Gleichung VI, welche den beiden Partialdifferentialgleichungen $1 - p - q = 0$ und $z - px - qy = 0$ zugleich genügt, ist kein allgemeines Integral, weil sie keine willkürliche Function enthält. Man sehe aber zu, ob man an die Stelle des willkürlichen Constanten A eine willkürliche Function aufsuchen kann, die so geeignet ist, dass dabei noch immer den beiden Partialdifferentialgleichungen zugleich genügt wird. Ist aber dieses der Fall, so ist Gleichung VI ein ausreichendes besonderes Integral; sie ist ein besonderes Integral, weil sie aus dem allgemeinen hervorgeht, sobald man den Constanten A an die Stelle der willkürlichen Function setzt; sie ist ein ausreichendes Integral, weil man auch aus dem Constanten A die willkürliche Function wieder herstellen kann.

Setzt man nun $\xi(\varphi)$ statt A in Gleichung VI, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad z = y + (x - y) \cdot \xi(\omega)$$

wo $\xi(\omega)$ eine ganz willkürliche Function von ω, aber ω eine bestimmte (bis jetzt noch unbekannte) Function von x, y, z ist. Aus VII folgt nun

$$\frac{d_x z}{dx} = \xi(\omega) + (x - y) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_x \omega}{dx} + (x - y) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_z \omega}{dz} \cdot \frac{d_x z}{dx}$$

$$\frac{d_y z}{dy} = 1 - \xi(\omega) + (x - y) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_y \omega}{dy} + (x - y) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_z \omega}{dz} \cdot \frac{d_y z}{dy}$$

Man setze wieder p und q statt $\frac{d_x z}{dx}$ und $\frac{d_y z}{dy}$, und eliminire $\xi(\omega)$, was mittelst Gleichung VII geschieht; so bekommt man aus den zwei letzteren Gleichungen

$$\text{VIII)}\quad p = \frac{(z - y) + (x - y)^2 \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_x \omega}{dx}}{(x - y) - (x - y)^2 \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_z \omega}{dz}}$$

$$\text{IX)}\quad q = \frac{(x - z) + (x - y)^2 \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_y \omega}{dy}}{(x - y) - (x - y)^2 \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{d_z \omega}{dz}}$$

Die Gleichung $1 - p - q = 0$ geht also jetzt über in

$$(x - y)^2 \cdot \left(\frac{d_x \omega}{dx} + \frac{d_y \omega}{dy} + \frac{d_z \omega}{dz}\right) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} = 0$$

woraus aber, wenn man nicht wieder $\xi(\omega) = A$ haben will, nur

$$\text{X)}\quad \frac{d_x \omega}{dx} + \frac{d_y \omega}{dy} + \frac{d_z \omega}{dz} = 0$$

folgt. Die Gleichung $z - px - qy = 0$ geht über in

$$(x - y)^2 \cdot \left(x \cdot \frac{d_x \omega}{dx} + y \cdot \frac{d_y \omega}{dy} + z \cdot \frac{d_z \omega}{dz}\right) \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega} = 0$$

woraus, wenn man nicht wieder $\xi(\omega) = A$ haben will, gleichfalls nur

$$\text{XI)}\quad x \cdot \frac{d_x \omega}{dx} + y \cdot \frac{d_y \omega}{dy} + z \cdot \frac{d_z \omega}{dz} = 0$$

folgt. Man hat also diejenige bestimmte Function ω von x, y, z zu suchen, wodurch die beiden Gleichungen X und XI zugleich identisch werden. Man findet aber ohneweiters, dass

$$\text{XII)}\quad \omega = \frac{x - z}{y - z}$$

eine Function ist, welche diese Eigenschaft hat. Gleichung VII geht nun über in

$$\text{XIII)}\quad z = y + (x - y) \cdot \xi\left(\frac{x - z}{y - z}\right)$$

Digitized by Google

Es gibt also in der That ein **allgemeines** Integral, welches den beiden Partialdifferentialgleichungen $1 - p - q = 0$ und $z - px - qy = 0$ zugleich genügt.

Andere specielle Fälle können nun nach dem Vorgange der früheren Aufgaben gebildet werden.

Die einfachste Form, welche man der Gleichung XIII geben kann, ergibt sich, wenn man gradezu $\xi\left(\frac{x - z}{y - z}\right) = \frac{x - z}{y - z}$ setzt. Dabei geht Gleichung XIII über in

$$\text{XIV)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$$

Daraus folgt

$$p = -\frac{2x - y - z}{2z - x - y} \text{ und } q = -\frac{2y - x - z}{2z - x - y}$$

Man führe diese beiden Ausdrücke in Gleichung $1 - p - q = 0$ ein, so wird ihr gradezu identisch genügt. Man führe diese Ausdrücke auch in Gleichung $z - p \cdot x - q \cdot y = 0$ ein, so geht sie zunächst über in

$$2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 2 \cdot (xy + xz + yz) = 0$$

und daraus folgt

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$$

was wieder Gleichung XIV ist.

Ebenso kann man, wenn man statt $\xi\left(\frac{x - z}{y - z}\right)$ noch andere Functionen des Ausdruckes $\frac{x - z}{y - z}$ setzt, jedesmal die Probe machen, dass den beiden hiesigen Partialdifferentialgleichungen zugleich genügt wird.

Aufgabe 138.

Man hat bei einer Fläche in den zu den nach Willkür genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene gelegt. Hierauf hat man von zwei im Raume irgendwo festliegenden Punkten (a, b, c) und (α, β, γ) Perpendikel auf diese Berührungsebene gefällt. Welche Fläche ist es nun, wenn die Summe beider Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Die Gleichung der Berührungsebene ist bekanntlich

$$\text{I)} \quad z' - z = (x' - x) \cdot p + (y' - y) \cdot q$$

oder

$$\text{II)} \quad z' - q \cdot y' - p \cdot x' - (z - px - qy) = 0$$

Wenn nun eine Ebene durch folgende Gleichung

$$\text{III)} \quad C \cdot z' + B \cdot y' + A \cdot x' + E = 0$$

gegeben ist, so sind die Entfernungen der Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) bis zu dieser Ebene bezüglich

$$\frac{C \cdot c + B \cdot b + A \cdot a}{\sqrt{C^2 + B^2 + A^2}} \text{ und } \frac{C \cdot \gamma + B \cdot \beta + A \cdot \alpha}{\sqrt{C^2 + B^2 + A^2}}$$

Also sind die Entfernungen der Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) bis zur Berührungsebene bezüglich

$$\text{IV)} \quad \frac{c - b \cdot q - a \cdot p - (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

und

$$\text{V)} \quad \frac{\gamma - \beta \cdot q - \alpha \cdot p - (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Die hier in Rede stehende Summe ist also

$$\text{VI)} \quad U = \frac{c + \gamma - 2z - (b + \beta) \cdot q - (a + \alpha) \cdot p + 2px + 2qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man die Ordinatenaxe Z in die Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) legt; denn dabei wird $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, und Gleichung VI reducirt sich auf

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad U = \frac{c + \gamma - 2z + 2px + 2qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Bigg[(2x \cdot (1 + q^2) - p \cdot (c + \gamma - 2z + 2q \cdot y)) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (2 \cdot y \cdot (1 + p^2) - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2p \cdot x)) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} - 2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot \delta z \Bigg]$$

Specieller Fall. Sucht man nur diejenige Fläche, von welcher bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y der vorgelegte Ausdruck grösser oder kleiner gemacht wird, als ihn alle die Flächen machen können, welche nicht nur

α) der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegen, sondern auch

β) mit ihr den zu den grade gewählten Abscissen gehörigen Berührungspunkt gemeinschaftlich haben, und bei denen allen

γ) die zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Berührungsebenen so gelegen sind, dass ihre in der Coordinatenebene XZ befindlichen Spuren parallel laufen mit der betreffenden Spur der zur gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene;

so schliessen jetzt alle diese Spuren mit der Axe X einen gleichgrossen Winkel ein. (Man sehe den zweiten Fall der 134sten Aufgabe.) Es muss also jetzt bei den grade genommenen Werthen des x und des y einzeln stattfinden $\delta z = 0$, $\frac{d_x \delta z}{dx} = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx} = 0$, etc.; und Gleichung VIII reducirt sich auf

$$\text{IX)}\quad \delta U = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot [2y \cdot (1 + p^2) - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2px)] \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss die identische Gleichung

$$\text{X)}\quad 2y \cdot (1 + p^2) - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2px) = 0$$

stattfinden. Diese Gleichung wird aber einfacher, wenn man v anstatt $\left(z - \frac{c + \gamma}{2}\right)$ setzt; sie geht nemlich über in

$$\text{XI)}\quad y \cdot (1 + p^2) - q\,(- v + px) = 0$$

Um diese nichtlineäre Partialdifferentialgleichung des zweiten Grades der ersten Ordnung zu integriren, entwickle man q, und es ergibt sich

$$\text{XII)}\quad q = \frac{y \cdot (1 + p^2)}{px - v}$$

Es ist also q eine Function von x, y, v, p, während p nur eine Function von x, y, v sein kann, und v nur eine Function von x und y ist. Die Bedingungsgleichung der Integrabilität ist bekanntlich $\frac{d_x q}{dx} = \frac{d_y p}{dy}$, welche sich aber bei den hier obwaltenden Umständen zerlegt in

$$\frac{d_x q}{dx} + \frac{d_v q}{dv} \cdot \frac{d_x v}{dx} + \frac{d_p q}{dp} \cdot \frac{d_x p}{dx} + \frac{d_p q}{dp} \cdot \frac{d_v p}{dv} \cdot \frac{d_x v}{dx} = \frac{d_y p}{dy} + \frac{d_v p}{dv} \cdot \frac{d_y v}{dy}$$

Setzt man noch p und q bezüglich anstatt $\frac{d_x v}{dx}$ und $\frac{d_y v}{dy}$, so folgt aus letzterer Gleichung

$$\frac{d_x q}{dx} + p \cdot \frac{d_v q}{dv} = - \frac{d_p q}{dp} \cdot \frac{d_x p}{dx} + \frac{d_y p}{dy} + \left(q - p \cdot \frac{d_p q}{dp}\right) \cdot \frac{d_v p}{dv}$$

welche Gleichung zum Zwecke des Integrirens in folgende drei zerlegt werden mag

$$\text{XIII)}\quad \left(q - p \cdot \frac{d_p q}{dp}\right) \cdot dy - dv = 0$$

$$\text{XIV)}\quad \left(q - p \cdot \frac{d_p q}{dp}\right) \cdot dx + \frac{d_p q}{dp} \cdot dv = 0$$

Digitized by Google

$$\text{XV)} \quad \left(q - p \cdot \frac{d_p q}{dp}\right) \cdot dp - \left(\frac{d_x q}{dx} + p \cdot \frac{d_v q}{dv}\right) \cdot dv = 0$$

Aus Gleichung XII folgt $\frac{d_x q}{dx} = -\frac{y \cdot p \cdot (1 + p^2)}{(p \cdot x - v)^2}$, und $\frac{d_v q}{dv} = +\frac{y \cdot (1 + p^2)}{(px - v)^2}$. Führt man diese beiden Ausdrücke in Gleichung XV ein, so erkennt man, dass $\frac{d_x q}{dx} + p \cdot \frac{d_v q}{dv} = 0$ ist, so dass Gleichung XV sich auf $\left(q - p \cdot \frac{d_p q}{dp}\right) \cdot dp = 0$ reducirt, woraus aber nur $dp = 0$ gefolgert werden kann. Es ist also $p = g$, d. h. constant. Dabei geht Gleichung XII über in $q = \frac{y \cdot (1 + g^2)}{g \cdot x - v}$, so dass die nunmehr noch zu integrirende Gleichung $dv = p \cdot dx + q \cdot dy$ übergeht in

$$dv = g \cdot dx + \frac{y \cdot (1 + g^2)}{gx - v} \cdot dy$$

oder in

$$(g \cdot dx - dv) \cdot (gx - v) + y \cdot (1 + g^2) \cdot dy = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$(gx - v)^2 + (1 + g^2) \cdot y^2 = h$$

oder

$$\text{XVI)} \quad \left(gx - z + \frac{c + \gamma}{2}\right)^2 + (1 + g^2) \cdot y^2 = h$$

Diese Gleichung ist ein besonderes vollständiges Integral der Gleichung X; sie ist ein besonderes Integral, weil sie keine willkürliche Function enthält; sie ist ein vollständiges Integral, weil sie zwei willkürliche Constanten enthält. Denkt man sich nun unter ω eine bestimmte (vorerst aber noch unbekannte) Function von x, y, z, und unter $\chi(\omega)$ eine ganz willkürliche Function von ω; so repräsentirt das folgende System zweier Gleichungen

$$\text{XVII)} \quad \left(\omega x - z + \frac{c + \gamma}{2}\right)^2 + (1 + \omega^2) \cdot y^2 = \chi(\omega)$$

und

$$\text{XVIII)} \quad 2 \cdot \left(\omega x - z + \frac{c + \gamma}{2}\right) \cdot x + 2\omega \cdot y^2 = \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}$$

das allgemeine Integral der Gleichung IX, d. h. je nachdem man für $\chi(\omega)$ eine immer andere und andere Function von ω setzt, und hierauf aus XVII und XVIII das ω eliminirt, bekommt man eine immer andere und andere Gleichung zwischen x, y, z, welche jedesmal der Gleichung X genügt.

Die hier gesuchte Fläche ist also so lange unbestimmt, bis man für $\chi(\omega)$ eine bestimmte Function angenommen, und ω aus den beiden Gleichungen XVII und XVIII eliminirt hat. Die Fläche wird aber eine bestimmte, wenn man sie zwingt, durch irgend eine räumliche Curve zu gehen. Macht man z. B. die Bedingung, dass die gesuchte Fläche nicht nur der Gleichung X genüge, sondern dass sie auch noch durch die mittelst der Gleichungen

$$z = \frac{c + \gamma}{2} + nx, \text{ und } y = mx$$

gegebene Grade hindurchgehe, so dass diese Grade ganz und mit allen ihren Punkten in der gesuchten Fläche liegt; so müssen die beiden Gleichungen XVII und XVIII identisch werden, sobald man $\left(\frac{c + \gamma}{2} + nx\right)$ statt z, und mx statt y setzt. Durch diese Substitutionen bekommt man aber

$$\text{XIX)} \quad (\omega - n)^2 \cdot x^2 + (1 + \omega^2) \cdot m^2 \cdot x^2 = \chi(\omega)$$

und

$$\text{XX)} \quad 2 \cdot (\omega - n) \cdot x^2 + 2\omega \cdot m^2 \cdot x^2 = \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}$$

Digitized by Google

Man eliminire x aus beiden Gleichungen, was am bequemsten geschieht, wenn man XIX in XX dividirt. Dadurch bekommt man

$$\frac{2 \cdot (\omega - n) + 2\omega \cdot m^2}{(\omega - n)^2 + (1 + \omega^2) \cdot m^2} \cdot d\omega = \frac{d\chi(\omega)}{\chi(\omega)}$$

und wenn man integrirt, so gibt sich

$$\text{XXI)} \quad \chi(\omega) = E \cdot [(\omega - n)^2 + (1 + \omega^2) \cdot m^2]$$

Führt man diesen für $\chi(\omega)$ gefundenen Ausdruck in die Gleichungen XVII und XVIII ein, so bekommt man

$$\text{XXII)} \quad \left(\omega x - z + \frac{c + \gamma}{2}\right)^2 + (1 + \omega^2) \cdot y^2 = E \cdot [(\omega - n)^2 + (1 + \omega^2) \cdot m^2]$$

und

$$\text{XXIII)} \quad \left(\omega x - z + \frac{c + \gamma}{2}\right) \cdot x + \omega \cdot y^2 = E \cdot [\omega - n + \omega \cdot m^2]$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\omega = \frac{\left(z - \frac{c + \gamma}{2}\right) \cdot x - E \cdot n}{x^2 + y^2 - E \cdot (1 + m^2)}$$

Indem man nun diesen für ω gefundenen Ausdruck in XXII einsetzt, bekommt man eine ganz bestimmte Gleichung zwischen x, y, z und dem willkürlichen Constanten E. Diese Gleichung, welche der Gleichung X genügt, gehört einer Fläche an, in welcher die vorgeschriebene Grade mit allen ihren Punkten liegt.

Aufgabe 139.

Man legt in irgend einen Punkt einer Fläche die Berührungsebene. Dann stellt man in zwei festen Punkten der Ordinatenaxe Z senkrechte Ebenen auf, von denen die Berührungsebene geschnitten wird. Diese zwei Durchschnittslinien und die zwei in den Coordinatenebenen XZ und YZ liegenden Spuren der Berührungsebene schliessen ein Trapez ein. Welche Fläche ist es nun, wenn dieses Trapez ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Es sei (fig. 28) die Berührungsebene gegeben durch ihre Spuren PQ und P′Q, und O sei Anfangspunkt der Coordinaten. Die in die festen Punkte r und t senkrecht gestellten Ebenen seien gegeben durch ihre Spuren Vr, rR, und Wt, tT. Das hier in Rede stehende Trapez ist gegeben durch seine Projectionen VrtW und RrtT. Die Gleichung der Berührungsebene ist bekanntlich

$$\text{I)} \quad z' - z = (y' - y) \cdot q + (x' - x) \cdot p$$

Daraus folgt

$$\text{II)} \quad x' = \frac{1}{p} \cdot (z' - z + px + y \cdot q - y' \cdot q)$$

$$\text{III)} \quad y' = \frac{1}{q} \cdot (z' - z + yq + x \cdot p - x' \cdot p)$$

Bei rV und tW ist $x' = 0$; bei rR und tT ist $y' = 0$. Es sei $Or = z' = c$, und $Ot = z' = \gamma$; so ist

$$\text{IV)} \quad rV = y' = \frac{1}{q} \cdot (c - z + qy + px)$$

$$\text{V)} \quad rR = x' = \frac{1}{p} \cdot (c - z + px + qy)$$

$$\text{VI)} \quad tW = y' = \frac{1}{q} \cdot (\gamma - z + px + qy)$$

$$\text{VII)} \quad tT = x' = \frac{1}{p} \cdot (\gamma - z + px + qy)$$

Digitized by Google

Die Projection VrtW hat den Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \cdot (rV + tW) \cdot rt$, oder

$$\text{VIII)} \quad \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{1}{q} (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy)$$

Die Projection RrtT hat den Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \cdot (rR + tT) \cdot rt$, oder

$$\text{IX)} \quad \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{1}{p} \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy)$$

Die dritte Projection, umgelegt, ist v″r″t″w″, und hat den Flächeninhalt = Dreieck Ot″w″ — Dreieck Or″v″, oder $\frac{1}{2} \cdot (Ow'' \cdot Ot'' - Ov'' \cdot Or'')$, oder $\frac{1}{2} \cdot (tW \cdot tT - rV \cdot rR)$, oder $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(\gamma - z + px + qy)^2}{p \cdot q} - \frac{(c - z + px + qy)^2}{pq}\right)$, oder

$$\text{X)} \quad \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{1}{p \cdot q} \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy)$$

Nach dem bekannten Lehrsatze

„Das Quadrat jeder ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer auf „die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren"

bekommt man jetzt für des in Rede stehenden Trapezes Flächeninhalt folgenden Ausdruck.

$$\text{XI)} \quad U = \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{1}{p \cdot q} \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy) \cdot \sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}$$

Erst wenn die gesuchte Fläche gefunden ist, lässt sich ausmitteln, ob das Radical $\sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}$ seine positive oder negative Bedeutung repräsentirt. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{XII)} \quad \delta U = \frac{\gamma - c}{2} \cdot \left(-\frac{2}{p \cdot q} \cdot \sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}\right) \cdot \delta z$$
$$+ \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{2p^3 \cdot x - (c + \gamma - 2z + 2qy) \cdot (1 + q^2)}{p^2 \cdot q \cdot \sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$
$$+ \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{2 \cdot q^3 \cdot y - (c + \gamma - 2z + 2px) \cdot (1 + p^2)}{p \cdot q^2 \cdot \sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Specieller Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim dritten Falle der 135sten Aufgabe; so muss bei den grade gewählten Werthen des x und des y einzeln stattfinden $\delta z = 0$, $\frac{d_y \delta z}{dy} = 0$, $\delta^2 z = 0$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy} = 0$, etc. Gleichung XII reducirt sich also auf

$$\text{XIII)} \quad \delta U = \frac{\gamma - c}{2} \cdot \frac{2 \cdot p^3 \cdot x - (c + \gamma - 2z + 2qy) \cdot (1 + q^2)}{p^2 \cdot q \cdot \sqrt[W]{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss die identische Gleichung

$$\text{XIV)} \quad 2 \cdot p^3 \cdot x - (c + \gamma - 2z + 2qy) \cdot (1 + q^2) = 0$$

stattfinden. Diese Gleichung wird einfacher, wenn man v anstatt $\left(z - \frac{\gamma + c}{2}\right)$ setzt; sie geht nemlich über in

$$\text{XV)} \quad p^3 \cdot x - (qy - v) \cdot (1 + q^2) = 0$$

Um diese nichtlineäre Partialdifferentialgleichung des dritten Grades der ersten Ordnung zu integriren, entwickle man p, und es ergibt sich

$$\text{XVI)} \quad p = (\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot (qy - v) \cdot (1 + q^2)}$$

Es ist also p eine Function von x, y, v, q, während q nur eine Function von x, y, v

Digitized by Google

sein kann, und v nur eine Function von x und y ist. Die Bedingungsgleichung der Integrabilität ist bekanntlich $\frac{d_y p}{dy} = \frac{d_x q}{dx}$, welche sich aber bei den hier obwaltenden Umständen zerlegt in

$$\frac{d_y p}{dy} + \frac{d_v p}{dv} \cdot \frac{d_y v}{dy} + \frac{d_q p}{dq} \cdot \frac{d_y q}{dy} + \frac{d_q p}{dq} \cdot \frac{d_v q}{dv} \cdot \frac{d_y v}{dy} = \frac{d_x q}{dx} + \frac{d_v q}{dv} \cdot \frac{d_x v}{dx}$$

Setzt man noch p und q bezüglich statt $\frac{d_x v}{dx}$ und $\frac{d_y v}{dy}$, so folgt aus letzterer Gleichung

$$\frac{d_y p}{dy} + q \cdot \frac{d_v p}{dv} = \frac{d_x q}{dx} - \frac{d_q p}{dq} \cdot \frac{d_y q}{dy} + \left(p - q \cdot \frac{d_q p}{dq}\right) \cdot \frac{d_v q}{dv}$$

welche Gleichung zum Zwecke des Integrirens in folgende drei zerlegt werden mag:

$$\text{XVII)} \quad \left(p - q \cdot \frac{d_q p}{dq}\right) \cdot dx - dv = 0$$

$$\text{XVIII)} \quad \left(p - q \cdot \frac{d_q p}{dq}\right) \cdot dy + \frac{d_q p}{dq} \cdot dv = 0$$

$$\text{XIX)} \quad \left(p - q \cdot \frac{d_q p}{dq}\right) \cdot dq - \left(\frac{d_y p}{dy} + q \cdot \frac{d_v p}{dv}\right) \cdot dv = 0$$

Aus Gleichung XVI folgt aber

$$\frac{d_y p}{dy} = (\sqrt[3]{1}) \cdot \frac{(1 + q^2) \cdot q}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (qy - v)^2 \cdot (1 + q^2)^2}}$$

$$\frac{d_v p}{dv} = -(\sqrt[3]{1}) \cdot \frac{1 + q^2}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (qy - v)^2 \cdot (1 + q^2)^2}}$$

Führt man die letzten zwei Ausdrücke in Gleichung XIX ein, so erkennt man, dass $\frac{d_y p}{dy} + q \cdot \frac{d_v p}{dv} = 0$ ist, so dass Gleichung XIX sich auf $\left(p - q \cdot \frac{d_q p}{dq}\right) \cdot dq = 0$ reducirt, woraus aber nur $dq = 0$ gefolgert werden kann; es ist also $q = g$, d. h. constant. Dabei geht Gleichung XVI über in $p = (\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1 + g^2}{x} \cdot (gy - v)}$, so dass die nunmehr noch zu integrirende Gleichung $dv = p \cdot dx + q \cdot dy$ übergeht in

$$dv = dx \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{\frac{1 + g^2}{x}} \cdot \sqrt[3]{gy - v} + g \cdot dy$$

oder in

$$dx \cdot \sqrt[3]{\frac{1 + g^2}{x}} + \frac{g \cdot dy - dv}{(\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{gy - v}} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot (1 + g^2)} + \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \cdot \sqrt[3]{(gy - v)^2} = h$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} \cdot \sqrt[3]{(gy - v)^2} = h - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 + g^2)}$$

Erhebt man beiderseits auf die dritte Potenz, so ist

$$(gy - v)^2 = \left(h - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 + g^2)}\right)^3$$

Daraus folgt $v = gy - \left(h - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 + g^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$ oder

$$\text{XX)} \quad z = \frac{\gamma + c}{2} + gy - \left(h - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 + g^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Digitized by Google

Diese Gleichung ist ein besonderes vollständiges Integral der Gleichung XIV; sie ist ein besonderes Integral, weil sie keine willkürliche Function enthält; sie ist ein vollständiges Integral, weil sie zwei willkürliche Constanten enthält. Denkt man sich nun unter ω eine bestimmte (vorerst aber noch unbekannte) Function von x, y, z, und unter $\pi(\omega)$ eine ganz willkürliche Function von ω; so repräsentirt das System der folgenden zwei Gleichungen

$$\text{XXI)}\quad z = \frac{\gamma + c}{2} + \omega \cdot y - \left(\pi(\omega) - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1+\omega^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und

$$\text{XXII)}\quad y - \frac{3}{2} \cdot \left(\pi(\omega) - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1+\omega^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{d\pi(\omega)}{d\omega} - \frac{2\omega}{3} \cdot \left(\frac{x}{1+\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$$

das allgemeine Integral der Gleichung XIV, d. h. je nachdem man für $\pi(\omega)$ eine immer andere und andere Function von ω setzt, und hierauf aus XXI und XXII das ω eliminirt, bekommt man eine immer andere und andere Gleichung zwischen x, y, z, welche jedesmal der Gleichung XIV genügt.

Die hier gefundene Fläche ist also so lange unbestimmt, bis man für $\pi(\omega)$ eine bestimmte Function von ω angenommen, und ω aus den beiden Gleichungen XXI und XXII eliminirt hat. Die Fläche wird aber eine bestimmte, wenn man sie zwingt, durch irgend eine räumliche Curve zu gehen. Macht man z. B. die Bedingung, dass die gesuchte Fläche nicht nur der Gleichung XIV genüge, sondern dass sie auch noch durch die mittelst der Gleichungen

$$z = \frac{x^2}{m} \quad \text{und} \quad y = \frac{n^2}{x}$$

gegebene räumliche Curve hindurchgehe, so dass diese Curve ganz und mit allen ihren Punkten in der gesuchten Fläche liegt; so müssen die beiden Gleichungen XXI und XXII identisch werden, sobald man $\frac{x^2}{m}$ statt z, und $\frac{n^2}{x}$ statt y setzt. Durch diese Substitutionen bekommt man aber

$$\frac{x^2}{m} = \frac{\gamma + c}{2} + \omega \cdot \frac{n^2}{x} - \left(\pi(\omega) - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1+\omega^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und

$$\frac{n^2}{x} - \frac{3}{2} \cdot \left(\pi(\omega) - \sqrt[3]{x^2 \cdot (1+\omega^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{d\pi(\omega)}{d\omega} - \frac{2\omega}{3} \cdot \left(\frac{x}{1+\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

Aus diesen Gleichungen eliminire man x, so bekömmt man eine neue Gleichung zwischen ω, $\pi(\omega)$, $\frac{d\pi(\omega)}{d\omega}$. Durch Integration ergibt sich für $\pi(\omega)$ eine bestimmte Function von ω mit einem willkürlichen Constanten. Diese für $\pi(\omega)$ gefundene Function führe man in die Gleichungen XXI und XXII ein, und eliminire ω, so bekommt man eine ganz bestimmte Gleichung zwischen x, y, z und einem willkürlichen Constanten. Die durch diese bestimmte Gleichung dargestellte Fläche hat dann die Eigenschaft, dass sie der Gleichung XIV genügt, und dass in ihr die vorgeschriebene Curve mit allen ihren Punkten liegt (man sehe den Schluss der vorigen Aufgabe).

Aufgabe 140.

Man hat bei einer krummen Fläche in den zu den nach Willkür genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene gelegt. Hierauf hat man von zwei im Raume irgendwo festliegenden Punkten (a, b, c) und (α, β, γ) Perpendikel auf diese Berührungsebene gefällt. Welche Fläche ist es nun, wenn das Product beider Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird?

Nach der Einleitung zur vorigen Aufgabe ist des Punktes (a, b, c) und der Berührungsebene Entfernung gegeben durch

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad \frac{c - bq - ap - (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Des Punktes (α, β, γ) und der Berührungsebene Entfernung ist ebenso gegeben durch

$$\text{II)}\quad \frac{\gamma - \beta q - \alpha p - (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Das in Rede stehende Product ist also

$$\text{III)}\quad U = \frac{(c - bq - ap - z + px + qy) \cdot (\gamma - \beta q - \alpha p - z + px + qy)}{1 + p^2 + q^2}$$

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man die Ordinatenaxe Z durch die beiden Punkte (a, b, c) und (α, β, γ) legt; denn dabei wird $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, und Gleichung III reducirt sich auf

$$\text{IV)}\quad U = \frac{(c - z + px + qy) \cdot (\gamma - z + px + qy)}{1 + p^2 + q^2}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 141.

Man hat bei einer krummen Fläche in den zu den nach Willkür genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene gelegt. Man nimmt in der Ordinatenaxe Z zwei feste Punkte, und legt senkrechte Ebenen in diese Punkte. Dadurch wird die Berührungsebene nach zwei graden Linien geschnitten, welche von den Coordinatenebenen YZ und XZ begränzt werden. Welche Fläche mag es sein, wenn das Product der so begränzten graden Linien ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist?

Es sei (fig. 28) die Ebene P'QP die Berührungsebene, und die auf der Axe Z in den festen Punkten r und t senkrechten Ebenen seien gegeben durch die Spuren rV, rR, und Wt, tT, wobei $Or = c$ und $Ot = \gamma$ gesetzt werden mag. Die zu $Or = c$ gehörige Durchschnittslinie trifft die Coordinatenebene YZ und XZ bezüglich in den Punkten V und R; R und V sind also die Gränzpunkte dieser Linie, und somit ist

$$\text{I)}\quad RV = \sqrt{rR^2 + rV^2}$$

Ebenso verhält es sich bei der zu $Ot = \gamma$ gehörigen Durchschnittslinie; und es ist

$$\text{II)}\quad TW = \sqrt{tW^2 + tT^2}$$

Das hier in Rede stehende Product ist also

$$\text{III)}\quad U = RV \cdot TW$$

Die Gleichung der Berührungsebene ist bekanntlich

$$z' - z = (x' - x) \cdot p + (y' - y) \cdot q$$

Für die Spur P'Q ist $x' = 0$, und somit ist die Gleichung dieser Spur

$$y' = \frac{1}{q}(z' - z + x \cdot p + y \cdot q)$$

Demnach ist $rV = \frac{1}{q}(c - z + x \cdot p + y \cdot q)$, und $tW = \frac{1}{q}(\gamma - z + xp + yq)$.

Für die Spur PQ ist $y' = 0$, und somit ist die Gleichung dieser Spur

$$x' = \frac{1}{p} \cdot (z' - z + px + qy)$$

Demnach ist $rR = \frac{1}{p}(c - z + px + qy)$, und $tT = \frac{1}{p}(\gamma - z + px + qy)$. Gleichung I geht also über in

$$\text{IV)}\quad RV = \frac{1}{p \cdot q} \cdot (c - z + px + qy) \cdot \sqrt{p^2 + q^2}$$

Digitized by Google

und Gleichung II geht über in

$$\text{V)}\quad TW = \frac{1}{p \cdot q} \cdot (\gamma - z + px + qy) \cdot \sqrt{p^2 + q^2}$$

Somit geht Gleichung III jetzt über in

$$\text{VI)}\quad U = \frac{p^2 + q^2}{p^2 \cdot q^2} \cdot (c - z + px + qy) \cdot (\gamma - z + px + qy)$$

Das Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 142.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man ihren zu den nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Normallinie legt, und wenn man diese hierauf von zwei in bestimmten Punkten einer gegebenen Graden errichteten Perpendikeln begränzt, das Product dieser Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei den zu den nemlichen Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann.

Die gegebene Grade (fig. 29) sei OZ. Man lege die beiden sich rechtwinkelig schneidenden Coordinatenebenen YZ und XZ in die Linie OZ, so wird OZ die Ordinatenaxe. Nun nehme man einen beliebigen Punkt O in derselben an, und lege hierein die auf OZ senkrechte Coordinatenebene XY. Der beliebig gewählte und in der gesuchten Fläche liegende Punkt S, wo man grade die Normallinie hineinlegt, habe die Projectionen s und s'. Die Normallinie selbst habe die Projectionen r's't' und rst. Diejenigen auf der Ordinatenaxe stehenden Perpendikel, von welchen die in S hineingelegte Normallinie begränzt wird, seien HR und KT, deren Projectionen bezüglich hr, h'r', und kt, k't' sind, so dass $HR = \sqrt{hr^2 + h'r'^2}$ und $KT = \sqrt{kt^2 + k't'^2}$ ist. Es soll also $U = HR \cdot KT = (\sqrt{hr^2 + h'r'^2}) \cdot (\sqrt{kt^2 + k't'^2})$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Erst wenn die gesuchte Fläche gefunden ist, kann man beurtheilen, ob die beiden Radicale gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen, d. h. ob das in Rede stehende Product positiv oder negativ ist. Es ist aber bequem, wenn man vorerst

$$\text{I)}\quad U = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{(hr^2 + h'r'^2) \cdot (kt^2 + k't'^2)}$$

setzt, und die Zweideutigkeit des Productes durch den Factor $(\sqrt{1})$ bemerkbar macht. Die Gleichungen für die Projectionen einer Normallinie sind im Allgemeinen

$$(x'' - x) + (z'' - z) \cdot p = 0, \text{ und } (y'' - y) + (z'' - z) \cdot q = 0$$

oder

$$x'' = x + (z - z'') \cdot p, \text{ und } y'' = y + (z - z'') \cdot q$$

Hier sind x'', y'', z'' die veränderlichen Coordinaten der Normallinie; dagegen x, y, z sind die (übrigens gleichfalls veränderlichen) Coordinaten des Punktes S der Fläche, in welchen man grade die Normallinie legt. Ist nun $Oh = c$ und $Ok = \gamma$, so ist

$$hr = x + (z - c) \cdot p, \quad h'r' = y + (z - c) \cdot q$$
$$kt = x + (z - \gamma) \cdot p, \quad k't' = y + (z - \gamma) \cdot q$$

Gleichung I geht also über in

$$\text{II)}\quad U = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{[(x + (z - c) \cdot p)^2 + (y + (z - c) \cdot q)^2] \cdot [(x + (z - \gamma) \cdot p)^2 + (y + (z - \gamma) \cdot q)^2]}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 143.

Eine krumme Oberfläche wird in dem zu den willkürlich genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkte von einer Ebene berührt. Die Coordinatenaxen X und Y

Digitized by Google

und die in der Coordinatenebene XY von der Berührungsebene erzeugte Spur schliessen ein Dreieck ein. Die in der Coordinatenebene XZ liegende Projection der Normallinie schneidet in der Abscissenaxe X ein, und die Entfernung dieses Durchschnittspunktes bis zum Anfangspunkte der Coordinaten hat mit der Abscisse x das constante Verhältniss a; ferner die in der Coordinatenebene YZ liegende Projection der Normallinie schneidet in die Abscissenaxe Y ein, und die Entfernung dieses Durchschnittspunktes bis zum Anfangspunkte der Coordinaten hat mit der Abscisse y das constante Verhältniss b. Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen krummen Flächen ist es nun, wenn das oben besagte Dreieck ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist.

Das hier in Rede stehende Dreieck (fig. 27) ist vOw, und dessen Inhalt ist (nach Aufgabe 135)

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2pq} \cdot (z - px - qy)^2$$

Die Projectionen mn und m'n' der Normallinie haben die Gleichungen

$$\text{II)}\quad (z'' - z) \cdot p + (x'' - x) = 0, \text{ und III)}\quad (z'' - z) \cdot q + (y'' - y) = 0$$

Um On zu bekommen, setze man $z'' = 0$; und aus II folgt $On = x'' = p \cdot z + x$. Um On' zu bekommen, setze man wieder $z'' = 0$; und aus III folgt $On' = y'' = qz + y$. Die Aufgabe ist also: Es soll das in I aufgestellte U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für z gesuchte Function von x und y auch noch die beiden Gleichungen

$$\text{IV)}\quad pz + x = ax, \qquad \text{und V)}\quad qz + y = by$$

identisch machen muss.

Erste Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire hierauf die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus I folgt

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{1}{2pq} \cdot (z - px - qy) \cdot \left[2 \cdot \delta z - \frac{z + px - qy}{p} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{z + qy - px}{q} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right]$$

Aus IV und V folgt

$$\text{VII)}\quad p \cdot \delta z + z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} = 0, \text{ und VIII)}\quad q \cdot \delta z + z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} = 0$$

Eliminirt man jetzt $\frac{d_x \delta z}{dx}$ und $\frac{d_y \delta z}{dy}$, so geht Gleichung VI über in

$$\text{IX)}\quad \delta U = \frac{2}{p \cdot q} \cdot (z - px - qy) \cdot \delta z$$

Soll nun $\delta U = 0$ werden, so muss die identische Gleichung

$$\text{X)}\quad z - px - qy = 0$$

stattfinden; und man hat eine solche Function z von x und y aufzusuchen, dass dabei die drei Gleichungen IV, V und X gleichzeitig identisch werden. Gleichung IV geht nun über in $pz = (a - 1) \cdot x$, und daraus folgt durch Integration

$$\text{XI)}\quad z^2 = (a - 1) \cdot x^2 + \chi(y)$$

Differentiirt man diese Gleichung nach y, so bekommt man $2z \cdot q = \frac{d\chi(y)}{dy}$, oder $z \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\chi(y)}{dy}$. Substituirt man diesen Ausdruck in Gleichung V, so bekommt man $\frac{1}{2} \cdot \frac{d\chi(y)}{dy} = (b - 1) \cdot y$, oder $\frac{d\chi(y)}{dy} = 2 \cdot (b - 1) \cdot y$; und daraus folgt durch Integration $\chi(y) = (b - 1) \cdot y^2 + c$, so dass Gleichung XI übergeht in

$$\text{XII)}\quad z^2 = (a - 1) \cdot x^2 + (b - 1) \cdot y^2 + c$$

Digitized by Google

Man hat nun noch zu untersuchen, ob durch diese Gleichung auch Gleichung X identisch wird. Aus XII folgt aber nach und nach

$$z = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{(a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c}$$

$$p = (\sqrt{1}) \cdot \frac{(a-1) \cdot x}{\sqrt{(a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c}}$$

$$q = (\sqrt{1}) \cdot \frac{(b-1) \cdot y}{\sqrt{(a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c}}$$

Substituirt man diese drei Ausdrücke in Gleichung X, so bekommt man $c = 0$; und die Gleichung der jetzt gesuchten Fläche ist

$$\text{XIII)} \quad z^2 = (a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2$$

Unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{4}{p \cdot q} \cdot \delta z^2 = \frac{4 \cdot z^2}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot x \cdot y} \cdot \delta z^2, \text{ und } U' = 0$$

Zweite Auflösung.

Das den beiden Gleichungen IV und V gleichzeitig entsprechende Integral ist, wie bereits gefunden wurde, die Gleichung

$$\text{XIV)} \quad z^2 = (a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c$$

Führt man die daraus für z, p, q sich ergebenden Ausdrücke in I ein, so bekommt man

$$\text{XV)} \quad U = \frac{c^2}{2 \cdot (a-1) \cdot (b-1) \cdot xy}$$

Man hat also nur noch den Werth des willkürlichen Constanten c zu bestimmen. Aus XV folgt

$$\text{XVI)} \quad \frac{dU}{dc} = \frac{c}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot xy}$$

Aus $\frac{dU}{dc} = 0$ folgt $c = 0$; Gleichung XIV geht also über in

$$\text{XVII)} \quad z^2 = (a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2$$

ferner ist $U' = 0$, und $\frac{d^2U}{dc^2} = \frac{1}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot x \cdot y}$; und da $\frac{d^2U}{dc^2}$ dasselbe Vorzeichen hat, wie der in der ersten Auflösung für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck, so sieht man, dass die zweite Auflösung genau zu demselben Resultate geführt hat, wie die erste.

Zusatz. In der ersten Auflösung gab sich

$$\delta^2 U = \frac{4 \cdot z^2}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot x \cdot y} \cdot \delta z^2$$

und in der zweiten Auflösung gab sich

$$\frac{d^2U}{dc^2} = \frac{1}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot x \cdot y}$$

Der Anfänger könnte fragen: worin besteht die Uebereinstimmung dieser beiden Ausdrücke? Die Antwort hierauf ist folgende: Das den beiden Gleichungen IV und V gemeinsame Integral ist $z = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{(a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c}$. Die Mutation, welche z erleiden kann, besteht sonach nur in einer Werthänderung des willkürlichen Constanten c, indem man (o + Dc), oder vielmehr

$$c + \varkappa \cdot \vartheta c + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 c + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 c + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

an die Stelle des c setzt. Dadurch bekommt man

$$\delta z = (\sqrt{1}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{(a-1) \cdot x^2 + (b-1) \cdot y^2 + c}} \cdot \vartheta c = \frac{1}{2z} \cdot \vartheta c$$

und wenn man diesen für δz gefundenen Ausdruck substituirt, bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{1}{(a-1) \cdot (b-1) \cdot x \cdot y} \cdot \vartheta c^2$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen $\delta^2 U$ und $\frac{d^2U}{dc^2}$ nachgewiesen.

Digitized by Google

Aufgabe 144.

Man soll unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen, deren Berührungsebenen immer durch den nemlichen festen Punkt hindurchgehen, diejenige heraussuchen, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass, wenn man ihren zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt nimmt, wenn man dann in diesen Punkt die Berührungsebene legt, und wenn man hierauf von zwei im Raume irgendwo festliegenden Punkten (a, b, c) und (α, β, γ) Perpendikel auf diese Berührungsebene fällt, die Summe dieser Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die im Raume festliegenden Punkte (fig. 30) seien H und K. Der Punkt, durch welchen alle Berührungsebenen gehen sollen, sei D. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man die Ordinatenaxe Z in die Punkte H und K legt. Die Coordinatenebenen XZ und YZ liegen dabei in der Linie OZ. Hierauf lege man in den Punkt D eine auf OZ senkrechte Ebene, so gibt sich der Punkt O, welchen man zum Anfange der Coordinaten nehmen muss. Die in Rede stehenden Perpendikel HM und KN haben jetzt die Projectionen Hm, Hm', und Kn, Kn'. Der nunmehr in der Coordinatenebene XY liegende Punkt D hat die Projectionen d und d'. Nun ist die Gleichung der Berührungsebene $z' - z = (x' - x) \cdot p + (y' - y) \cdot q$; für den Punkt D ist $z' = 0$, $x' = Od$ und $y' = Od'$. Man setze $Od = g$ und $Od' = h$, so ist die Partialdifferentialgleichung derjenigen Flächen, deren Berührungsebenen alle durch den Punkt D gehen, folgende:

$$\text{I)}\quad z = (x - g) \cdot p + (y - h) \cdot q$$

Die Summe der beiden in Rede stehenden Perpendikel ist (nach der 138sten Aufgabe)

$$\text{II)}\quad U = \frac{c + \gamma - 2z + 2px + 2qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

und dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für z gesuchte Function von x und y nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, wodurch auch noch Gleichung I identisch wird.

Erste Auflösung.

Man mutire Gleichung I, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta z = (x - g) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (y - h) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

und

$$\text{IV)}\quad \delta^2 z = (x - g) \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + (y - h) \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}$$

Man mutire Gleichung II, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Big[(2x \cdot (1 + q^2) - p \cdot (c + \gamma - 2z + 2q \cdot y)) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$
$$+ (2y \cdot (1 + p^2) - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2p \cdot x)) \frac{d_y \delta z}{dy} - 2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot \delta z \Big]$$

Man erkennt gradezu, dass es am bequemsten ist, δz zu eliminiren; und thut man dieses, so geht Gleichung V über in

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \Big[(2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot g - p \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy)) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$
$$+ (2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot h - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy)) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \Big]$$

Man hat nun die beiden identischen Gleichungen

$$\text{VII)}\quad 2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot g - p \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy) = 0$$
$$\text{VIII)}\quad 2 \cdot (1 + p^2 + q^2) \cdot h - q \cdot (c + \gamma - 2z + 2px + 2qy) = 0$$

Digitized by Google

Dividirt man Gleichung VIII in VII, so bekommt man $\frac{g}{h} = \frac{p}{q}$; und wenn man aus VII und VIII zuerst q und dann p eliminirt, so geben sich folgende zwei neue Gleichungen:

$$\text{IX)}\quad 2 \cdot g^2 - (c + \gamma - 2z) \cdot g \cdot p + 2 \cdot (g^2 + h^2 - gx - hy) \cdot p^2 = 0$$
$$\text{X)}\quad 2 \cdot h^2 - (c + \gamma - 2z) \cdot h \cdot q + 2 \cdot (g^2 + h^2 - gx - hy) \cdot q^2 = 0$$

Diese Gleichungen sind noch immer identisch, d. h. gelten noch immer bei jedem Werthe des x und des y. Differentiirt man Gleichung IX nach x, so bekommt man

$$2g \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot p - (c + \gamma - 2z) \cdot g \cdot \frac{d_x p}{dx} - 2g \cdot p^2 + 4 \cdot (g^2 + h^2 - gx - hy) \cdot p \cdot \frac{d_x p}{dx} = 0$$

und weil $p = \frac{d_x z}{dx}$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\text{XI)}\quad [(c + \gamma - 2z) \cdot g - 4 \cdot (g^2 + h^2 - gx - hy) \cdot p] \cdot \frac{d_x p}{dx} = 0$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_x p}{dx} = 0$, d. h. $\frac{d_x^2 z}{dx^2} = 0$, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad z = x \cdot \pi(y) + \chi(y)$$

Diese Gleichung enthält aber zwei willkürliche Functionen, während doch die vorgegebene Differentialgleichung IX nur von der ersten Ordnung ist. Aber eben der Umstand, dass IX durch XII identisch werden muss, dient dazu, um eine der beiden Functionen $\pi(y)$ und $\chi(y)$ durch die andere zu bestimmen. Man führe also $(x \cdot \pi(y) + \chi(y))$ statt z, und $\pi(y)$ statt p in IX ein, so bekommt man

$$2g^2 - (c + \gamma) \cdot g \cdot \pi(y) + 2g \cdot \pi(y) \cdot \chi(y) + 2 \cdot (g^2 + h^2 - hy) \cdot (\pi(y))^2 = 0$$

woraus

$$\chi(y) = \frac{1}{2g \cdot \pi(y)} \cdot [(c + \gamma) \cdot g \cdot \pi(y) - 2g^2 - 2 \cdot (g^2 + h^2 - hy) \cdot (\pi(y))^2]$$

folgt, so dass jetzt Gleichung XII übergeht in

$$\text{XIII)}\quad z = \frac{1}{2g \cdot \pi(y)} \cdot [2 \cdot (gx + hy - g^2 - h^2) \cdot (\pi(y))^2 + (c + \gamma) \cdot g \cdot \pi(y) - 2g^2]$$

wo also nur noch die einzige willkürliche Function $\pi(y)$ vorkommt. Durch diese Gleichung muss aber auch noch Gleichung X identisch werden, so dass man bestimmen kann, was $\pi(y)$ für eine Function sein muss. Aus XIII folgt

$$\text{XIV)}\quad q = \frac{1}{g \cdot (\pi(y))^2} \cdot \left[h \cdot (\pi(y))^3 + (gx + hy - g^2 - h^2) \cdot (\pi(y))^2 \cdot \frac{d\pi(y)}{dy} + g^2 \cdot \frac{d\pi(y)}{dy}\right]$$

und wenn man diese für z und q gefundenen Ausdrücke in X einsetzt, so bekommt man $\frac{d\pi(y)}{dy} = 0$, woraus $\pi(y) = A$ folgt, d. h. $\pi(y)$ ist constant. Gleichung XIII geht also jetzt über in

$$\text{XV)}\quad z = \frac{1}{2A \cdot g} \cdot [2 \cdot A^2 \cdot (gx + hy - g^2 - h^2) + A \cdot g \cdot (c + \gamma) - 2g^2]$$

Dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche insoferne die Aufgabe löst, als jede Ebene auch zugleich ihre eigene Berührende ist. Durch Gleichung XV muss aber auch noch Gleichung I identisch werden. Aus XV folgt $p = A$ und $q = \frac{A \cdot h}{g}$; und wenn man diese zuletzt für p, q, z hergestellten Ausdrücke in I einsetzt, so gibt sich $A = \frac{2g}{c + \gamma}$, und dadurch geht Gleichung XV über in

$$\text{XVI)}\quad z = \frac{2}{c + \gamma} \cdot (g \cdot x + h \cdot y - g^2 - h^2)$$

so dass die gesuchte Ebene vollkommen bestimmt ist, und keiner Nebenbedingung mehr unterworfen werden kann. Wenn man noch einmal mutirt, und dann soviel als möglich reducirt, so bekommt man

Digitized by Google

$$\delta^2 U = -\frac{(c+\gamma)^2}{[(c+\gamma)^2 + 4(g^2+h^2)] \cdot \sqrt{(c+\gamma)^2 + 4(g^2+h^2)}} \cdot \left[(c+\gamma)^2 \cdot \left(\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right) + \left(h \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - g \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]$$

Ferner ist $U' = \sqrt{(c+\gamma)^2 + 4 \cdot (g^2 + h^2)}$. Dieser Ausdruck stellt die Summe zweier Linien dar. Da die für U' und $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke das Radical als gemeinschaftlichen Factor enthalten, so entscheidet man sich (nach §. 114, a, S. 170) auf folgende Weise:

α) Hat das Radical seine positive Bedeutung, so ist U' positiv, dagegen $\delta^2 U$ negativ; und dabei ist diese Summe zweier Linien ein Maximum-stand.

β) Hat das Radical seine negative Bedeutung, so ist U' negativ, dagegen $\delta^2 U$ positiv; und dabei ist diese Summe zweier Linien ein Minimum-stand, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht.

Zweitens. Schaut man wieder auf Gleichung XI zurück, und setzt man

$$(c + \gamma - 2z) \cdot g - 4 \cdot (g^2 + h^2 - gx - h \cdot y) \cdot p = 0$$

so bekommt man durch Integriren zunächst

$$\text{XVII)} \quad 2z - c - \gamma = (F(y)) \cdot \sqrt{gx + hy - g^2 - h^2}$$

Dadurch muss aber vor allem die Gleichung IX identisch werden; und da aus XVII sich $p = \frac{g \cdot (F(y))}{4 \cdot \sqrt{gx + hy - g^2 - h^2}}$ ergibt, so geht durch die gehörige Substitution Gleichung IX über in

$$2g^2 + \frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot (F(y))^2 - \frac{1}{8} \cdot g^2 \cdot (F(y))^2 = 0$$

Es ist also $F(y) = 4 \cdot \sqrt{-1}$; und somit geht Gleichung XVII über in

$$\text{XVIII)} \quad 2z - c - \gamma = 4 \cdot \sqrt{g^2 + h^2 - gx - hy}$$

Nun untersuche man, ob dabei auch Gleichung X identisch wird; und da jetzt

$$q = -\frac{h}{\sqrt{g^2 + h^2 - gx - hy}}$$

ist, so geht Gleichung X durch die gehörigen Substitutionen über in

$$2h^2 - 4h^2 + 2h^2 = 0$$

d. h. ist wirklich identisch. Die Gleichung XVIII ist also ein den beiden Gleichungen VII und VIII gemeinsames besonderes Integral. Man muss nun noch untersuchen, ob auch die Gleichung I durch Gleichung XVIII identisch wird. Da aber dieses nicht der Fall ist, so braucht Gleichung XVIII nicht weiter beachtet zu werden.

Zweite Auflösung.

Man integrire Gleichung I, so bekommt man

$$\text{XIX)} \quad z = (x - g) \cdot \xi\left(\frac{x-g}{y-h}\right)$$

wo $\xi\left(\frac{x-g}{y-h}\right)$ eine ganz willkürliche Function des Quotienten $\frac{x-g}{y-h}$ ist. Setzt man nun zur Abkürzung ω anstatt $\frac{x-g}{y-h}$, so bekommt man

$$z = (x - g) \cdot \xi(\omega)$$

$$p = \xi(\omega) + \frac{x-g}{y-h} \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$$

$$q = -\left(\frac{x-g}{y-h}\right)^2 \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$$

Diese drei Ausdrücke führe man statt z, p, q in Gleichung II ein, so wird U eine Function von x, y, $\xi(\omega)$ und $\frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$, d. h. man bekommt

Digitized by Google

$$\text{XX)}\quad U = F\left(x,\, y,\, \xi(\omega),\, \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\right)$$

Mutirt man, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad \delta U = F'\left(x,\, y,\, \xi(\omega),\, \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\right) \cdot \delta\xi(\omega) + F''\left(x,\, y,\, \xi(\omega),\, \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\right) \cdot \frac{d\delta\xi(\omega)}{d\omega}$$

Man hat also jetzt die zwei Gleichungen

$$F'\left(x,\, y,\, \xi(\omega),\, \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\right) = 0, \text{ und } F''\left(x,\, y,\, \xi(\omega),\, \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}\right) = 0$$

aus welchen man $\frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$ eliminiren kann, so dass sich dann für $\xi(\omega)$ eine ganz bestimmte Function von x und y ergibt, welche, wenn man sie in Gleichung XIX einsetzt, diese Gleichung wieder auf die Form XVI bringt.

Und so fort.

Diese zweite Auflösung führt aber nicht auf Gleichung XVIII. Der Grund davon ist der, dass man in der zweiten Auflösung vom Integrale der Gleichung I ausging, und Gleichung XVIII weder ein besonderes noch ein singuläres Integral zu Gleichung I ist (man vergleiche die Schlussbemerkung zu den Aufgaben 77, 81, 116).

Aufgabe 145.

Man hat zwei feste miteinander parallele Ebenen, und sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt dieser Fläche, und bestimmt die diesem Punkte entsprechenden zwei Krümmungsmittelpunkte. Nun nimmt man die Entfernungen dieser beiden Krümmungsmittelpunkte bis zu der einen der gegebenen Ebenen, und addirt sie; sodann nimmt man ebenso die Entfernungen dieser beiden Krümmungsmittelpunkte bis zur andern der gegebenen Ebenen, und addirt sie ebenfalls; zuletzt nimmt man das Product dieser beiden Summen. Wenn nun die gesuchte Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass bei dem zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkte das besagte Product grösser oder kleiner ist, als bei den zu denselben Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann; welche Fläche wird gesucht?

Die beiden parallelen Ebenen (fig. 31) seien gegeben durch ihre Spuren P'Q, PQ, und R'S, RS. Die Durchführung der Aufgabe wird einfacher, wenn man die Coordinatenebene XY mit den zwei gegebenen Ebenen parallel, also die Ordinatenaxe Z auf die beiden gegebenen Ebenen senkrecht nimmt. Der zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte A und B, gegeben durch die Projectionen a, a' und b, b'. Die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes A bis zur Ebene P'QP ist also a'm' oder am oder fQ, die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes B bis zur Ebene P'QP ist b'n' oder bn oder gQ; ferner die Entfernung des Punktes A bis zur Ebene R'SR ist a'h' oder ah oder fS, die Entfernung des Punktes B bis zur Ebene R'SR ist b'k' oder bk oder gS. Das hier in Rede stehende Product ist sonach

$$\text{I)}\quad U = (gQ + fQ) \cdot (gS + fS)$$

Setzt man nun zur Abkürzung p anstatt $\frac{d_x z}{dx}$, q anstatt $\frac{d_y z}{dy}$, r anstatt $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, s anstatt $\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}$, t anstatt $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$; setzt man ferner H anstatt $(r \cdot t - s^2)$, M anstatt $[(1 + p^2) \cdot t - 2pq \cdot s + (1 + q^2) \cdot r]$, P anstatt $(1 + p^2 + q^2)$; und setzt man K anstatt $\frac{M + \sqrt{M^2 - 4H \cdot P}}{2 \cdot H}$, und k anstatt $\frac{M - \sqrt{M^2 - 4H \cdot P}}{2 \cdot H}$; so ist der eine Krümmungshalbmesser

$$R' = K \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

und die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind

$$\mathfrak{x}' = x - p \cdot K$$
$$\mathfrak{y}' = y - q \cdot K$$
$$\mathfrak{z}' = z + K$$

Dagegen der andere Krümmungshalbmesser ist

$$R'' = k \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

und die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes sind

$$\mathfrak{x}'' = x - p \cdot k$$
$$\mathfrak{y}'' = y - q \cdot k$$
$$\mathfrak{z}'' = z + k$$

Man nehme an, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ seien die Coordinaten des Punktes B, und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ seien die Coordinaten des Punktes A; und man bezeichne die Linien OQ und OS bezüglich mit C und E; so ist

$$gQ = OQ - Og = C - \mathfrak{z}'' = C - z - k$$
$$fQ = OQ - Of = C - \mathfrak{z}' = C - z - K$$
$$gS = OS - Og = E - \mathfrak{z}'' = E - z - k$$
$$fS = OS - Of = E - \mathfrak{z}' = E - z - K$$

Gleichung I geht also jetzt über in

$$\text{II)} \quad U = (2C - 2z - k - K) \cdot (2E - 2z - k - K)$$

und wenn man für k und K die Ausdrücke setzt, so bekommt man

$$\text{III)} \quad U = \left(2C - 2z - \frac{M}{H}\right) \cdot \left(2E - 2z - \frac{M}{H}\right)$$

Mutirt man jetzt, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \delta U = 2 \cdot \left(C + E - 2z - \frac{M}{H}\right) \cdot \left(- 2 \cdot \delta z - \delta\left(\frac{M}{H}\right)\right)$$

Soll nun die gesuchte Fläche aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgesucht werden, so muss folgende identische Gleichung stattfinden:

$$\text{V)} \quad C + E - 2z - \frac{M}{H} = 0$$

und wenn man für H und M die Ausdrücke zurückführt, so bekommt man folgende nichtlineäre Partialdifferentialgleichung des zweiten Grades der zweiten Ordnung:

$$\text{VI)} \quad (C + E - 2z) \cdot (r \cdot t - s^2) = (1 + p^2) \cdot t - 2pq \cdot s + (1 + q^2) \cdot r$$

Mutirt man Gleichung IV noch einmal, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left(2 \cdot \delta z + \delta\left(\frac{M}{H}\right)\right)^2$$

und daran erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Die Gleichung VI, welche, wie gesagt, eine nichtlineäre Partialdifferentialgleichung des zweiten Grades der zweiten Ordnung ist, hat zum allgemeinen Integral einen Ausdruck, welcher zwei willkürliche Functionen enthält. Ohne aber das allgemeine Integral herzustellen, kann man schon aus Gleichung VI Eigenschaften ableiten, die allen dieser Gleichung entsprechenden unendlichvielen Flächen gemeinsam sind. Setzt man z. B. in Gleichung VI die Abkürzungszeichen wieder ein, so bekommt man

$$(C + E - 2z) \cdot H = M$$

und daraus folgt

$$C + E - 2z = \frac{M}{H}$$

oder

$$C + E - 2z = \frac{M + \sqrt{M^2 - 4H \cdot P}}{2H} + \frac{M - \sqrt{M^2 - 4H \cdot P}}{2H}$$

oder

Digitized by Google

$$C + E - 2z = K + k$$

oder

$$2 \cdot \left(\frac{C + E}{2} - z\right) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} = K \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} + k \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

oder

$$\text{VIII)} \quad 2 \cdot \left(\frac{C + E}{2} - z\right) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} = R' + R''$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ der Sinus des Winkels, welcher von der Normallinie und von der Coordinatenebene XY gebildet wird, also auch der Sinus aller der Winkel, welche von der Normallinie und jeder auf der Ordinatenaxe Z senkrechten Ebene gebildet werden. Daraus folgt

1) dass der Ausdruck $z \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Länge des von der Coordinatenebene XY bis zum Berührungspunkte erstreckten Stückes der Normallinie vorstellt; und wenn

2) der Punkt W mitten zwischen Q und S liegt, so ist $\frac{C + E}{2} = \frac{OQ + OS}{2} = OW$, woraus man ferner erkennt, dass der Ausdruck $\frac{C + E}{2} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Länge des Stückes der Normallinie vorstellt, welches von der Coordinatenebene XY bis zu einer mitten zwischen den beiden gegebenen Ebenen parallelen Ebene erstreckt ist.

Aus Gleichung VIII folgt also: „alle jene unendlichvielen Flächen, die der Gleichung VI genügen, haben in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass die Summe der beiden Krümmungshalbmesser gleich ist dem doppelten Stücke der Normallinie, welches vom Berührungspunkte bis zu einer mitten zwischen den beiden gegebenen Ebenen parallelen Ebene erstreckt ist."

Aus Gleichung V folgt $2z + \frac{M}{H} = C + E$, und somit geht Gleichung III über in $U = -(E - C)^2$, d. h. „alle jene unendlichvielen Flächen, welche der Gleichung VI genügen, liefern für das verlangte Product einen constanten Ausdruck, so dass niemals von einer secundären Beziehung eine Rede sein kann."

Andere Untersuchungen führen von dem hiesigen Zwecke zu weit ab.

Aufgabe 146.

Man hat eine feste Ebene, und sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt dieser Fläche, und bestimmt die diesem Punkte der Fläche entsprechenden zwei Krümmungsmittelpunkte. Von diesen beiden Krümmungsmittelpunkten fällt man Perpendikel auf besagte feste Ebene, und nimmt das Product beider Perpendikel. Wenn nun die gesuchte Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass bei dem zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkte dieses Product grösser oder kleiner ist, als bei den zu denselben Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann; welche Fläche wird gesucht?

Die feste Ebene (fig. 31) sei gegeben durch ihre Spuren P'Q, PQ. Die Durchführung der Aufgabe wird einfacher, wenn man die Coordinatenebene XY mit der gegebenen Ebene parallel, also die Ordinatenaxe Z auf diese Ebene senkrecht nimmt. Der zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte A und B, gegeben durch die Projectionen a, a' und b, b'. Die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes A bis zur Ebene P'QP ist also a'm' oder am oder fQ; die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes B bis zur Ebene P'QP ist b'n' oder bn oder gQ. Das hier in Rede stehende Product ist sonach

$$\text{I)} \quad U = gQ \cdot fQ$$

Digitized by Google

Nach der vorigen Aufgabe ist aber $gQ = C - z - k$, und $fQ = C - z - K$; und Gleichung I geht über in

$$\text{II)} \quad U = (C - z - k) \cdot (C - z - K)$$

Mutirt man jetzt, so bekommt man zunächst

$$\text{III)} \quad \delta U = -(2C - 2z - k - K) \cdot \delta z - (C - z - K) \cdot \delta k - (C - z - k) \cdot \delta K$$

Hier hat man vorerst für δk und δK noch die Ausdrücke einzusetzen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

Aufgabe 147.

Man hat einen im Raume irgendwo festliegenden Punkt, und sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt dieser Fläche, und bestimmt die diesem Punkte entsprechenden zwei Krümmungsmittelpunkte. Nun verbindet man diese beiden Krümmungsmittelpunkte mit dem gegebenen im Raume irgendwo festliegenden Punkte. Wenn aber die Summe der Quadrate beider Verbindungslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist; welche Fläche wird gesucht?

Der gegebene und im Raume festliegende Punkt (fig. 32) sei O. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man den Anfang der Coordinaten in den Punkt O verlegt. Der zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte A und B, gegeben durch die Projectionen a, a' und b, b'. Die beiden hier in Rede stehenden Verbindungslinien sind also OA und OB, gegeben durch die Projectionen Oa', Oa und Ob', Ob. Die hier in Rede stehende Quadratsumme ist also

$$\text{I)} \quad U = OA^2 + OB^2$$

Nun ist $OA^2 = Om^2 + ma'^2 + ma^2$, und $OB^2 = On^2 + nb'^2 + nb^2$; und Gleichung I geht über in

$$\text{II)} \quad U = Om^2 + On^2 + ma'^2 + nb'^2 + ma^2 + nb^2$$

Da aber Om, ma', ma die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes A, und On, nb', nb die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes B sind; so setze man $On = \mathfrak{z}''$, $nb' = \mathfrak{y}''$, $nb = \mathfrak{x}''$, $Om = \mathfrak{z}'$, $ma' = \mathfrak{y}'$, $ma = \mathfrak{x}'$; und wenn man für $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ die (bereits in der 145sten Aufgabe stehenden) Ausdrücke einsetzt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)} \quad U = (z + K)^2 + (z + k)^2 + (y - K \cdot q)^2 + (y - k \cdot q)^2 + (x - K \cdot p)^2 + (x - k \cdot p)^2$$

Das Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 148.

Man hat einen im Raume irgendwo festliegenden Punkt, und sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt dieser Fläche, und bestimmt die diesem Punkte entsprechenden zwei Krümmungsmittelpunkte. Nun verbindet man den gegebenen im Raume irgendwo festliegenden Punkt mit diesen beiden Krümmungsmittelpunkten, sowie auch diese beiden unter sich. Dadurch entsteht ein Dreieck. Wenn aber dieses Dreiecks Inhalt ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, welche Fläche wird gesucht?

Der gegebene und im Raume festliegende Punkt (fig. 32) sei O. Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man den Anfang der Coordinaten in den Punkt O verlegt. Der zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte A und B, gegeben durch die Projectionen a, a' und b, b'. Das hier in Rede stehende Dreieck ist also OAB, gegeben durch die



Projectionen Oa'b' und Oab; und wenn man die in der Coordinatenebene XY liegende Projection des Dreiecks OAB umlegt, so bekommt man Oa''b''. Man bestimme nun den Inhalt eines jeden der drei Dreiecke Oab, Oa'b' und Oa''b'' auf folgende Weise: Es ist

$$\begin{aligned}\text{Dreieck Oab} &= \text{Dreieck Oam} + \text{Trapez mabn} - \text{Dreieck Obn}\\ &= \frac{1}{2}\cdot[Om\cdot ma + (ma + nb)\cdot(On - Om) - On\cdot nb]\\ &= \frac{1}{2}\cdot[On\cdot ma - Om\cdot nb]\\ &= \frac{1}{2}\cdot[\mathfrak{z}''\cdot\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{x}'']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[(z + k)\cdot(x - Kp) - (z + K)\cdot(x - k\cdot p)]\end{aligned}$$

Darans folgt

$$\text{I)}\quad \text{Dreieck Oab} = \frac{1}{2}\cdot(k - K)\cdot(x + pz)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\text{Dreieck Oa'b'} &= \text{Dreieck Oa'm} + \text{Trapez ma'b'n} - \text{Dreieck Ob'n}\\ &= \frac{1}{2}\cdot[Om\cdot ma' + (ma' + nb')\cdot(On - Om) - On\cdot nb']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[On\cdot ma' - Om\cdot nb']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[\mathfrak{z}''\cdot\mathfrak{y}' - \mathfrak{z}'\cdot\mathfrak{y}'']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[(z + k)\cdot(y - K\cdot q) - (z + K)\cdot(y - k\cdot q)]\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{II)}\quad \text{Dreieck Oa'b'} = \frac{1}{2}\cdot(k - K)\cdot(y + z\cdot q)$$

Endlich ist

$$\begin{aligned}\text{Dreieck Oa''b''} &= \text{Dreieck On''b''} + \text{Trapez n''b''a''m''} - \text{Dreieck Om''}\cdot\text{m''a''}\\ &= \frac{1}{2}\cdot[On''\cdot n''b'' + (n''b'' + m''a'')\cdot(Om'' - On'') - Om''\cdot m''a'']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[Om''\cdot n''b'' - On''\cdot m''a'']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[ma\cdot nb' - nb\cdot ma']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[\mathfrak{x}'\cdot\mathfrak{y}'' - \mathfrak{x}''\cdot\mathfrak{y}']\\ &= \frac{1}{2}\cdot[(x - K\cdot p)\cdot(y - k\cdot q) - (x - k\cdot p)\cdot(y - K\cdot q)]\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{III)}\quad \text{Dreieck Oa''b''} = \frac{1}{2}\cdot(k - K)\cdot(yp - xq)$$

Indem man sich nun des Satzes

„Das Quadrat jeder ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer auf „die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren"

bedient, bekommt man für den Inhalt des gesuchten Dreiecks OAB folgenden Ausdruck

$$\text{IV)}\quad U = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(k - K)^2\cdot[(y + zq)^2 + (x + zp)^2 + (yp - xq)^2]}$$

und wenn man für K und k die Ausdrücke einsetzt, so bekommt man

$$\text{V)}\quad U = \frac{1}{2H}\cdot\sqrt{(M^2 - 4PH)\cdot[(y + zq)^2 + (x + zp)^2 + (yp - xq)^2]}$$

Man hat hier das Radical zweideutig genommen, und wird ihm, sobald man die gesuchte

Digitized by Google

Fläche gefunden, und dadurch auch $H = r \cdot t - s^2$ kennen gelernt hat, diejenige Bedeutung beilegen, bei welcher U positiv wird.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 149.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man legt in ihren zu den nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene. Von einem zu den festen Abscissen $x = a$ und $y = b$ gehörigen Punkte der gesuchten Fläche fällt man ein Perpendikel auf diese Berührungsebene; ebenso fällt man von einem zu den festen Abscissen $x = \alpha$ und $y = \beta$ gehörigen Punkte der gesuchten Fläche ein Perpendikel auf die Berührungsebene.. Welche Fläche hat aber in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft, dass bei dem zu den grade genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkte das Product dieser beiden Perpendikel grösser oder kleiner wird, als bei den zu den nemlichen Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann?

Die Gleichung irgend einer Ebene sei

$$\text{I)} \quad A \cdot x' + B \cdot y' + C \cdot z' + E = 0$$

so ist die senkrechte Entfernung irgend eines Punktes (n, m, k) von dieser Ebene gegeben durch

$$\text{II)} \quad \frac{A \cdot n + B \cdot m + C \cdot k + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Die Gleichung der Berührungsebene irgend einer krummen Fläche ist bekanntlich $z' - z = p \cdot (x' - x) + q \cdot (y' - y)$, oder

$$\text{III)} \quad p \cdot x' + q \cdot y' - z' + (z - px - qy) = 0$$

Der Punkt der gesuchten Fläche, dessen Abscissen a und b sind, hat die Ordinate $z_{a,b}$; und dieses Punktes senkrechte Entfernung bis zur Berührungsebene ist also

$$\text{IV)} \quad \frac{a \cdot p + b \cdot q - z_{a,b} + (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Der Punkt der gesuchten Fläche, dessen Abscissen α und β sind, hat die Ordinate $z_{\alpha,\beta}$; und dieses Punktes senkrechte Entfernung bis zur Berührungsebene ist also

$$\text{V)} \quad \frac{\alpha p + \beta q - z_{\alpha,\beta} + (z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Das hier in Rede stehende Product ist daher

$$\text{VI)} \quad U = \frac{[a \cdot p + b \cdot q - z_{a,b} + (z - px - qy)] \cdot [\alpha p + \beta q - z_{\alpha,\beta} + (z - px - qy)]}{1 + p^2 + q^2}$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 150.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man legt in ihren zu den festen Abscissen $x = a$ und $y = b$ gehörigen Punkt die Berührungsebene; und ebenso legt man in ihren zu den festen Abscissen $x = \alpha$ und $y = \beta$ gehörigen Punkt die Berührungsebene. Von ihrem zu den nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkte fällt man Perpendikel auf diese beiden Berührungsebenen. Welche Fläche ist es aber, wenn das Product beider Perpendikel grösser oder kleiner ist, als bei allen andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann?

Schaut man auf Gleichung III der vorigen Aufgabe zurück, so erkennt man, dass die zu den Abscissen a und b gehörige Berührungsebene folgende Gleichung hat

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad p_{a,b} \cdot x' + q_{a,b} \cdot y' - z' + (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) = 0$$

Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\text{II)}\quad \frac{p_{a,b} \cdot x + q_{a,b} \cdot y - z + (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b)}{\sqrt{1 + p_{a,b}^2 + q_{a,b}^2}}$$

Ebenso erkennt man, dass die zu den Abscissen α und β gehörige Berührungsebene folgende Gleichung hat

$$\text{III)}\quad p_{\alpha,\beta} \cdot x'' + q_{\alpha,\beta} \cdot y'' - z'' + (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta) = 0$$

Die senkrechte Entfernung des Punktes (x, y, z) bis zu dieser Ebene ist also

$$\text{IV)}\quad \frac{p_{\alpha,\beta} \cdot x + q_{\alpha,\beta} \cdot y - z + (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta)}{\sqrt{1 + p_{\alpha,\beta}^2 + q_{\alpha,\beta}^2}}$$

Die hier befindlichen Ausdrücke II und IV geben das in Rede stehende Product.

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 151.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man legt in ihren zu den festen Abscissen $x = a$ und $y = b$ gehörigen Punkt die Berührungsebene; man legt ebenso in ihren zu den festen Abscissen $x = \alpha$ und $y = \beta$ gehörigen Punkt die Berührungsebene; ferner legt man auch in den zu irgend zwei nach Belieben genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkt die Berührungsebene. Die in der Coordinatenebene XY liegenden Spuren dieser drei Berührungsebenen schliessen ein Dreieck ein. Wenn nun die gesuchte Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass bei dem zu den grade genommenen Abscissen x und y gehörigen Punkte des besagten Dreiecks Flächeninhalt grösser oder kleiner ist, als bei den zu den nemlichen Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen und der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann; welche Fläche wird gesucht?

Zu den festen Abscissen $x = a$ und $y = b$ gehöre (fig. 33) der Punkt M, mit den Projectionen m und m'; die in dem Punkte M liegende Berührungsebene ist P'QP. Zu den festen Abscissen $x = \alpha$ und $y = \beta$ gehöre der Punkt N, mit den Projectionen n und n'; die in dem Punkte N liegende Berührungsebene ist S'RS. Zu den nach Belieben genommenen Abscissen x und y gehöre der Punkt K, mit den Projectionen k und k'; die in dem Punkte K liegende Berührungsebene ist V'WV.

Die Gleichung der in K liegenden Berührungsebene ist

$$\text{I)}\quad z' - z = (x' - x) \cdot p + (y' - y) \cdot q$$

Die Gleichung der in N liegenden Berührungsebene ist

$$\text{II)}\quad z'' - z_{\alpha,\beta} = (x'' - \alpha) \cdot p_{\alpha,\beta} + (y'' - \beta) \cdot q_{\alpha,\beta}$$

Die Gleichung der in M liegenden Berührungsebene ist

$$\text{III)}\quad z''' - z_{a,b} = (x''' - a) \cdot p_{a,b} + (y''' - b) \cdot q_{a,b}$$

Legt man nun die Coordinatenebene XY um, so kommt der Punkt V in die Lage 𝔙, der Punkt S in die Lage 𝔖, und der Punkt P in die Lage 𝔓; und man erkennt, dass das Dreieck fgh das hier in Rede stehende Dreieck ist. Dessen Inhalt ist

$$U = \text{Trapez ufhw} - \text{Trapez ufgv} - \text{Trapez vghw}$$

oder

$$U = \frac{1}{2}(uf + wh) \cdot (Ou - Ow) - \frac{1}{2}(uf + vg) \cdot (Ou - Ov)$$
$$- \frac{1}{2} \cdot (vg + wh) \cdot (Ov - Ow)$$

oder

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot [uf \cdot (Ov - Ow) + wh \cdot (Ou - Ov) + vg \cdot (Ow - Ou)]$$

Es kommt also noch darauf an, die Linien uf, wh, vg, Ov, Ow, Ou zu bestimmen, und die sich ergebenden Ausdrücke in Gleichung IV zu substituiren.

Für die in der Coordinatenebene XY liegenden Spuren der Berührungsebenen ist $z' = 0$, $z'' = 0$, $z''' = 0$; und die Gleichungen I, II, III gehen der Reihe nach über in

$$\text{V)}\quad p \cdot x' + q \cdot y' + (z - px - qy) = 0$$

$$\text{VI)}\quad p_{\alpha,\beta} \cdot x'' + q_{\alpha,\beta} \cdot y'' + (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta) = 0$$

$$\text{VII)}\quad p_{a,b} \cdot x''' + q_{a,b} \cdot y''' + (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) = 0$$

Die Gleichung V gehört der Linie V'V an, die Gleichung VI gehört der Linie S'S an, die Gleichung VII gehört der Linie P'P an. Für den Punkt f ist $x' = x''$ und $y' = y''$; und aus den Gleichungen V und VI folgt:

$$Ou = x' = x'' = \frac{q \cdot (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta) - q_{\alpha,\beta} \cdot (z - p \cdot x - q \cdot y)}{p \cdot q_{\alpha,\beta} - q \cdot p_{\alpha,\beta}}$$

$$uf = y' = y'' = -\frac{p \cdot (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta) - p_{\alpha,\beta} \cdot (z - px - qy)}{p \cdot q_{\alpha,\beta} - q \cdot p_{\alpha,\beta}}$$

Für den Punkt g ist $x' = x'''$ und $y' = y'''$; und aus den Gleichungen V und VII folgt:

$$Ov = x' = x''' = \frac{q \cdot (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) - q_{a,b} \cdot (z - px - qy)}{p \cdot q_{a,b} - q \cdot p_{a,b}}$$

$$vg = y' = y''' = -\frac{p \cdot (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) - p_{a,b} \cdot (z - px - qy)}{p \cdot q_{a,b} - q \cdot p_{a,b}}$$

Für den Punkt h ist $x'' = x'''$ und $y'' = y'''$; und aus den Gleichungen VII und VIII folgt

$$Ow = x'' = x''' =$$
$$\frac{q_{\alpha,\beta} \cdot (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) - q_{a,b} \cdot (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta)}{p_{\alpha,\beta} \cdot q_{a,b} - p_{a,b} \cdot q_{\alpha,\beta}}$$

$$wh = y'' = y''' =$$
$$-\frac{p_{\alpha,\beta} \cdot (z_{a,b} - p_{a,b} \cdot a - q_{a,b} \cdot b) - p_{a,b} \cdot (z_{\alpha,\beta} - p_{\alpha,\beta} \cdot \alpha - q_{\alpha,\beta} \cdot \beta)}{p_{\alpha,\beta} \cdot q_{a,b} - p_{a,b} \cdot q_{\alpha,\beta}}$$

Hat man nun diese für uf, vg, wh, Ou, Ov, Ow hergestellten Ausdrücke in Gleichung IV eingesetzt, so geht alles Weitere, wie gewöhnlich.

Aufgabe 152.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt den zu den zwei festen Abscissen α und β gehörigen Punkt der Fläche, bestimmt die zwei zu diesem Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte, und legt in diese sodann zwei auf die Ordinatenaxe Z senkrechte Ebenen. Man nimmt jetzt den zu zwei nach Willkür gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt der Fläche, und bestimmt die zwei zu diesem Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Nun nimmt man die Entfernungen dieser beiden Krümmungsmittelpunkte bis zur einen der vorhin besagten Ebenen, und addirt sie. Hierauf nimmt man ebenso die Entfernungen dieser beiden Krümmungsmittelpunkte bis zur andern der vorhin besagten Ebenen, und addirt auch sie. Zuletzt nimmt man das Product beider Summen. Wenn nun die gesuchte Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass bei dem zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkte besagtes Product grösser oder kleiner

Digitized by Google

ist, als bei den zu denselben Abscissen x und y gehörigen Punkten aller andern, der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden, Nachbarflächen der Fall sein kann; welche Fläche wird gesucht?

Die beiden auf der Ordinatenaxe Z senkrechten Ebenen, welche durch die Krümmungsmittelpunkte, die dem zu den festen Abscissen α und β gehörigen Punkte der Fläche entsprechen, gelegt sind, seien (fig. 31) gegeben durch ihre Spuren PQ, P'Q und RS, R'S. Der zu den grade gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte A und B, gegeben durch die Projectionen a, a' und b, b'. Die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes A bis zur Ebene P'QP ist also a'm' oder am oder fQ, die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes B bis zur Ebene P'QP ist b'n' oder bn oder gQ; ferner die Entfernung des Punktes A bis zur Ebene R'SR ist a'h' oder ah oder fS, die Entfernung des Punktes B bis zur Ebene R'SR ist b'k' oder bk oder gS. Das hier in Rede stehende Product ist sonach

$$\text{I)}\quad U = (gQ + fQ)\cdot(gS + fS)$$

Nun ist (nach der Einleitung zur 145sten Aufgabe) $Og = z + k$ und $Of = z + K$. Da ferner OQ und OS die Ordinaten der Krümmungsmittelpunkte sind, welche dem zu den festen Abscissen α und β gehörigen Punkte der Fläche entsprechen; so ist $OQ = z_{\alpha,\beta} + k_{\alpha,\beta}$ und $OS = z_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta}$. Man hat also

$$gQ = OQ - Og = z_{\alpha,\beta} + k_{\alpha,\beta} - z - k$$
$$fQ = OQ - Of = z_{\alpha,\beta} + k_{\alpha,\beta} - z - K$$
$$gS = OS - Og = z_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta} - z - k$$
$$fS = OS - Of = z_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta} - z - K$$

Da ferner $k + K = \frac{M}{H}$, so geht Gleichung I über in.

$$\text{II)}\quad U = \left(2\cdot z_{\alpha,\beta} + 2\cdot k_{\alpha,\beta} - 2z - \frac{M}{H}\right)\cdot\left(2\cdot z_{\alpha,\beta} + 2\cdot K_{\alpha,\beta} - 2z - \frac{M}{H}\right)$$

Alles Weitere, wie gewöhnlich. Die Bedeutung von K, k, M, H ist aus der 145sten Aufgabe bekannt.

Aufgabe 153.

Man hat eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Fläche. Man nimmt in derselben zwei Punkte, deren erster zu den festen Abscissen a und b, und deren zweiter zu den festen Abscissen α und β gehört. Hierauf nimmt man auch den zu den nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt der Fläche. Nun bestimmt man zu jedem dieser drei Punkte die zugehörigen zwei Krümmungsmittelpunkte. Jetzt verbindet man den einen zu den Abscissen x und y gehörigen Krümmungsmittelpunkt mit den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten, deren einer zu den Abscissen a und b, und deren anderer zu den Abscissen α und β gehört; so bekommt man zwei Verbindungslinien. Hierauf verbindet man den andern zu den Abscissen x und y gehörigen Krümmungsmittelpunkt mit den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten, deren einer zu den Abscissen a und b, und deren anderer zu den Abscissen α und β gehört; so bekommt man abermals zwei Verbindungslinien. Wenn nun die Summe der Quadrate dieser vier Verbindungslinien ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist; von welcher Fläche ist hier die Rede?

Der zu den nach Willkür gewählten Abscissen x und y gehörige Punkt der gesuchten Fläche habe (fig. 34) die beiden Krümmungsmittelpunkte C und E, gegeben durch die Projectionen c, c', und e, e'. Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes C seien $Ov = z + K$, $vc = x - p\cdot K$, $vc' = y - q\cdot K$; und somit sind $Ow = z + k$, $we = x - p\cdot k$, $we' = y - p\cdot k$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes E.

Digitized by Google

Der zu den festen Abscissen a und b gehörige Punkt der gesuchten Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte G und H, gegeben durch die Projectionen g, g', und h, h'. Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes G seien $Od = z_{a,b} + K_{a,b}$, $dg = a - p_{a,b} \cdot K_{a,b}$, $dg' = b - q_{a,b} \cdot K_{a,b}$; und somit sind $Of = z_{a,b} + k_{a,b}$, $fh = a - p_{a,b} \cdot k_{a,b}$, $fh' = b - q_{a,b} \cdot k_{a,b}$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes H.

Der zu den festen Abscissen α und β gehörige Punkt der gesuchten Fläche habe die beiden Krümmungsmittelpunkte M und N, gegeben durch die Projectionen m, m', und n, n'. Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes M seien $Oi = z_{\alpha,\beta} + K_{\alpha,\beta}$, $im = \alpha - p_{\alpha,\beta} \cdot K_{\alpha,\beta}$, $im' = \beta - q_{\alpha,\beta} \cdot K_{\alpha,\beta}$; und somit sind $Oj = z_{\alpha,\beta} + k_{\alpha,\beta}$, $jn = \alpha - p_{\alpha,\beta} \cdot k_{\alpha,\beta}$, $jn' = \beta - q_{\alpha,\beta} \cdot k_{\alpha,\beta}$ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes N.

Man sieht also, dass die drei ersten einander entsprechenden Krümmungsmittelpunkte durch G, C, M, und dass die drei andern einander entsprechenden Krümmungsmittelpunkte durch H, E, N bezeichnet sind. Es sind also CG, CM, EH, EN die vier in der Aufgabe besagten Verbindungslinien; und die Aufgabe selbst ist: Es soll

$$\text{I)} \quad U = CG^2 + CM^2 + EH^2 + EN^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Nun ist

$$CG^2 = (Ov - Od)^2 + (vc - dg)^2 + (vc' - dg')^2$$
$$CM^2 = (Ov - Oi)^2 + (vc - im)^2 + (vc' - im')^2$$
$$EH^2 = (Ow - Of)^2 + (we - fh)^2 + (we' - fh')^2$$
$$EN^2 = (Ow - Oj)^2 + (we - jn)^2 + (we' - jn')^2$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke hat man in Gleichung I die gehörigen Substitutionen zu machen, und dann zu verfahren, wie gewöhnlich.

Hiermit mag nun die Reihe dieser Aufgaben, welche man beliebig vermehren könnte, geschlossen werden. Die bereits gegebenen haben für alle Fälle hinlänglich vorbereitet.

Digitized by Google

DRITTE ABTHEILUNG.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Integrale vorkommen.

A) Aufgaben, wo Functionen mit einem einzigen absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht werden.

Aufgabe 154.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das zwischen den nach Belieben genommenen Gränzen a und α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(2y + 3\cdot(\sqrt[3]{x-y})^2\right)\cdot dx$$

grösser oder kleiner wird, als es von jeder andern, der gesuchten Function bei jedem Werthe des x nächstanliegenden, Nachbarfunction gemacht werden kann.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (in §. 223) auseinandergesetzt. Alle, der gesuchten Function y bei jedem Werthe des x nächstanliegenden, Nachbarfunctionen werden (nach §. 60) dargestellt durch

$$y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Function von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. ganz beliebige reelle Functionen von x sind.

Der hier vorgelegte Ausdruck I ist wegen des Radicals $(\sqrt[3]{x-y})^2$ ein dreiförmiger. Um bequem calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1})^2\cdot(x-y)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $(\sqrt[3]{1})^2$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also jetzt

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \left(2y + 3\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot(x-y)^{\frac{2}{3}}\right)\cdot dx$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem Factor $(\sqrt[3]{1})^2$ zuerst seine reelle und dann seine zwei imaginären Formen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem Factor $(\sqrt[3]{1})^2$ seine reelle Form beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(2y + 3\cdot(x-y)^{\frac{2}{3}}\right)\cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(2 - 2\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Erstens. Lässt man den bei δy befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung $2 - 2\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}} = 0$; und die gesuchte Function ist

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad y = x - 1$$

woran man erkennt, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function äussern können. Hierbei wird $U' = \alpha \cdot (\alpha + 1) - a \cdot (a + 1)$; und da kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $(x - y)$ in den Nenner bekommen kann, und $y = x - 1$ ist; so kann auch kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ annehmen, und die für ΔU herzustellende Reihe läuft nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort. Nun ist $\delta^2 U = -\frac{2}{3} \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$, und dieser Ausdruck bleibt (man sehe §. 9) negativ bei jedem Werthe des a und des α, so lange man, wie nach der Voraussetzung geschehen muss, $\alpha > a$ nimmt. Es findet also ein Maximum-stand statt. Aber eben weil die gesuchte Function $y = x - 1$ von den Gränzen a und α unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen allen andern beliebigen Gränzen $x = a'$ bis $x = \alpha'$, wenn nur $\alpha' > a'$ ist, einen Maximum-stand; denn auch dabei ist $\delta^2 U$ immer negativ.

Zweitens. Legt man dem bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ bei, so bekommt man die identische Gleichung $x - y = 0$, woraus

$$\text{VI)}\quad y = x$$

folgt, und woran man erkennt, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function äussern können. Hierbei wird $U' = \int_a^\alpha 2x \cdot dx = (\alpha + a) \cdot (\alpha - a)$. Das Prüfungsmittel wird durch directe Reihenentwickelung hergestellt, indem man

$$[(\alpha + a) \cdot (\alpha - a) + \Delta U] \text{ an die Stelle des } U$$

und

$$\left(x + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } (x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \text{ statt } y$$

in Gleichung III einsetzt. Dadurch bekommt man

$$(\alpha + a) \cdot (\alpha - a) + \Delta U = \int_a^\alpha \left(2x + 3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \cdot dx$$

Weil aber nur nach x integrirt werden soll, und die Elemente a und α von $\varkappa$ ganz unabhängig sind; so kann man $\varkappa$ auch ausserhalb des Integralzeichens setzen. Dann gibt sich

$$\Delta U = 3 \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dx + 2 \cdot \varkappa \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P} \cdot dx$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen der ganzen Reihe das nemliche, wie das des ersten Gliedes. Das erste Glied bleibt aber (man sehe §. 9) positiv bei jedem Werthe des a und des α, wenn man nur, wie auch nach der Voraussetzung geschehen muss, $\alpha > a$ nimmt. Also existirt ein Minimum-stand. Aber eben weil die gesuchte Function $y = x$ von den Gränzen a und α ganz unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen jeden andern beliebigen Gränzen $x = a'$ bis $x = \alpha'$, wenn nur $\alpha' > a'$ ist, einen Minimum-stand; denn auch dabei ist das erste Glied obiger Reihe positiv.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})^2$ seine beiden imaginären Formen bei. Man bekommt dann

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(2 - 2 \cdot (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Digitized by Google

Erstens. Lässt man den bei δy befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad 2 - 2\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt gradezu $(\sqrt[3]{1})^2 = (x-y)^{\frac{1}{3}}$; und wenn man beiderseits auf die dritte Potenz erhebt, so gibt sich $1 = x - y$, woraus $y = x - 1$ folgt. Dabei geht Gleichung VII über in $2 - 2\cdot(\sqrt[3]{1})^2 = 0$; weil aber $(\sqrt[3]{1})^2$ nur seine beiden imaginären Formen repräsentirt, so enthält letztere Gleichung einen Widerspruch in sich selbst, so dass dieser Fall nicht weiter beachtet werden kann.

Zweitens. Legt man dem bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{P}}{0}$ bei, so bekommt man die identische Gleichung $x - y = 0$, woraus

$$\text{VIII)}\quad y = x$$

folgt, und woran man erkennt, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function äussern können. Hierbei ist wieder $U' = (\alpha + a)(\alpha - a)$. Das Prüfungsmittel gewinnt man, indem man wieder $[(\alpha + a)(\alpha - a) + \Delta U]$ an die Stelle des U, und $(x + \varkappa\cdot\mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung II überall einsetzt; und dann ist

$$(\alpha + a)(\alpha - a) + \Delta U = \int_a^\alpha\left(2x + 3\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{2}{3}} + 2\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P}\right)\cdot dx$$

Daraus folgt

$$\Delta U = 3\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\varkappa^{\frac{2}{3}}\int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}\cdot dx + 2\varkappa\cdot\int_a^\alpha \mathfrak{P}\cdot dx$$

Aber weil $(\sqrt[3]{1})^2$ nur seine imaginären Formen repräsentirt, so ist ΔU unter allen Umständen imaginär; und der aus den imaginären Formen der Gleichung I hergestellte reelle Ausdruck $U' = (\alpha + a)\cdot(\alpha - a)$ ist ein Einzelstand.

Aufgabe 155.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das zwischen den nach Belieben genommenen Gränzen a und α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha\left(g + \frac{3}{2}\cdot(\sqrt[3]{2xy - y^2})^4\right)\cdot dx$$

grösser oder kleiner wird, als es von jeder andern, der gesuchten Function bei jedem Werthe des x nächstanliegenden, Nachbarfunction gemacht werden kann.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (in §. 223) auseinandergesetzt. Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des Radicals ein dreiförmiger. Um bequem calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1})^4\cdot(2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}$, und betrachte nur den Factor $(\sqrt[3]{1})^4$ als dreiförmig, alles Andere dagegen als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also jetzt

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha\left(g + \frac{3}{2}\cdot(\sqrt[3]{1})^4\cdot(2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}\right)\cdot dx$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem $(\sqrt[3]{1})^4$ zuerst seine reelle und dann seine zwei imaginären Formen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Digitized by Google

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $(\sqrt[3]{1})^4$ seine reelle Form beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(g + \frac{3}{2}\cdot(2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}\right)\cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad \delta U = 4\cdot\int_a^\alpha (x-y)\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot(2x-y)^{\frac{1}{3}}\cdot\delta y\cdot dx$$

Der zu δy gehörige Factor wird Null, wenn $x - y = 0$, oder wenn $y = 0$, oder wenn $2x - y = 0$.

A) Aus der identischen Gleichung $x - y = 0$ folgt $y = x$, woran man erkennt, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function äussern können. Hierbei wird

$$U' = g\cdot(\alpha - a) + \frac{9}{22}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^{11}} - \sqrt[3]{a^{11}}\right),\ \text{und}\ \delta^2 U = -4\cdot\int_a^\alpha (\delta y\cdot\sqrt[3]{x})^2\cdot dx$$

Dieser Ausdruck bleibt (man sehe §. 9) negativ bei jedem Werthe des a und des α, so lange man, wie nach der Voraussetzung geschehen muss, $\alpha > a$ nimmt. Es findet also ein Maximum-stand statt. Aber eben weil die gesuchte Function $y = x$ von den Gränzen a und α ganz unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen allen andern beliebigen Gränzen $x = a'$ bis $x = \alpha'$, wenn nur $\alpha' > a'$ ist, einen Maximum-stand; denn auch dabei ist $\delta^2 U$ immer negativ.

B) Aus der identischen Gleichung $y = 0$ folgt $U' = g\cdot(\alpha - a)$. Weil aber dabei $\delta^2 U$ Null in den Nenner bekommt, so muss man das Prüfungsmittel auf directem Wege herstellen. Verfahrt man dabei wie gewöhnlich, so bekommt man

$$\varDelta U = \frac{3}{2}\cdot\varkappa^{\frac{4}{3}}\cdot\int_a^\alpha (2x\cdot\mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}\cdot dx - 2\cdot\varkappa^{\frac{7}{3}}\cdot\int_a^\alpha (2x)^{\frac{1}{3}}\cdot\mathfrak{P}^{\frac{7}{3}}\cdot dx\ \ldots\ldots$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen der ganzen Reihe das nemliche, wie das des ersten Gliedes. Das erste Glied bleibt aber (man sehe §. 9) positiv bei jedem Werthe des a und des α, wenn man nur, wie auch nach der Voraussetzung geschehen muss, $\alpha > a$ nimmt. Aber eben, weil die gesuchte Function $y = 0$ von den Gränzen a und α ganz unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen jeder andern beliebigen Gränze $x = a'$ und $x = \alpha'$, wenn nur $\alpha' > a'$ ist, einen Minimum-stand; denn auch dabei bleibt das erste Glied obiger Reihe positiv.

C) Aus der identischen Gleichung $2x - y = 0$ folgt $y = 2x$, woran man erkennt, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function äussern können. Hierbei wird $U' = g\cdot(\alpha - a)$. Weil aber dabei das $\delta^2 U$ wieder Null in den Nenner bekommt, so muss man das Prüfungsmittel auch wieder auf directem Wege herstellen; und dadurch bekommt man

$$\varDelta U = \frac{3}{2}\cdot\varkappa^{\frac{4}{3}}\cdot\int_a^\alpha (2x\cdot\mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}\cdot dx + 2\cdot\varkappa^{\frac{7}{3}}\cdot\int_a^\alpha (2x)^{\frac{1}{3}}\cdot\mathfrak{P}^{\frac{7}{3}}\cdot dx\ \ldots\ldots$$

Aus dieser Reihe folgt aber genau dasselbe, was aus der im vorigen Falle aufgestellten Reihe folgt.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})^4$ seine beiden imaginären Formen bei. Man bekommt dann

$$\text{V)}\quad \delta U = 4\cdot(\sqrt[3]{1})^4\cdot\int_a^\alpha (x-y)\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot(2x-y)^{\frac{1}{3}}\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus gibt sich wieder entweder $x - y = 0$ oder $y = 0$ oder $2x - y = 0$.

Digitized by Google

A) Ist $x - y = 0$, also $y = x$; so ist $U' = g(\alpha - a) + \frac{9}{22} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot (\sqrt[3]{\alpha^{11}} - \sqrt[3]{a^{11}})$, welcher Ausdruck, weil er imaginär ist, nicht berücksichtigt werden kann.

B) Ist $y = 0$, so ist $U' = g \cdot (\alpha - a)$ ein Einzel-stand, wie man aus der Reihe

$$\varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot \varkappa^{\frac{4}{3}} \cdot \int_a^\alpha (2x \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} \cdot dx - \ldots\ldots$$

erkennt.

C) Ist $2x - y = 0$, also $y = 2x$; so ist wieder $U' = g \cdot (\alpha - a)$ ein Einzelstand, wie man aus der Reihe

$$\varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot \varkappa^{\frac{4}{3}} \cdot \int_a^\alpha (2x \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} \cdot dx + \ldots\ldots$$

erkennt.

Aufgabe 156.

Man sucht für y eine solche Function von x, und zugleich für a und α solche Werthe, dass das zwischen den Gränzen a und α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(3x \cdot y^2 - y^3 - m^2 \cdot x^2 + \frac{3m^4}{64} \cdot x\right) \cdot dx$$

ein Maximum-werth eines Maximum-standes oder ein Minimum-werth eines Minimum-standes wird.

Durch gemischtes Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad (\delta)U = \int_a^\alpha \delta V \cdot dx + V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - V_a \cdot \vartheta a$$

und

$$\text{III)}\quad (\delta)^2 U = \int_a^\alpha \delta^2 V \cdot dx + 2 \cdot \delta V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \delta V_a \cdot \vartheta a$$
$$+ V_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - V_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$

Es ist aber $\delta V = 3y \cdot (2x - y) \cdot \delta y$, und $\delta^2 V = 3y \cdot (x - y) \cdot \delta^2 y + 6 \cdot (x - y) \cdot \delta y^2$, welche Ausdrücke man in II und III einzuführen hat. Gleichung II geht dabei über in

$$\text{IV)}\quad (\delta)U = \int_a^\alpha 3y \cdot (2x - y) \cdot \delta y + V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - V_a \cdot \vartheta a$$

Man bekommt nun zunächst die identische Gleichung

$$\text{V)}\quad 3y \cdot (2x - y) = 0$$

und weil hier zwischen a und α keine Abhängigkeit besteht, so bekommt man gleichzeitig noch die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{VI)}\quad V_\alpha = 0, \quad\text{und VII)}\quad V_a = 0$$

Erstens. Gleichung V wird identisch, wenn $2x - y = 0$, d. h. wenn $y = 2x$ ist. Die Gleichung VI geht dabei über in

$$\text{VIII)}\quad \left(4\alpha^2 - m^2 \cdot \alpha + \frac{3 \cdot m^4}{64}\right) \cdot \alpha = 0$$

Daraus folgt entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{2m^2 \pm m^2}{16}$. Die Gleichung VII geht ebenfalls über in

$$\text{IX)}\quad \left(4a^2 - m^2 \cdot a + \frac{3m^4}{64}\right) \cdot a = 0$$

Daraus folgt entweder $a = 0$ oder $a = \frac{2m^2 \pm m^2}{16}$. Man soll $\alpha > a$ sein; man kann

Digitized by Google

also, da m^2 positiv ist, die Werthe des a und des α auf dreierlei Weise vertheilen, d. h. man kann

1) entweder $a = 0$ mit $\alpha = \frac{m^2}{16}$

2) oder $a = 0$ mit $\alpha = \frac{3m^2}{16}$

3) oder $a = \frac{m^2}{16}$ mit $\alpha = \frac{3m^2}{16}$

verbinden. In allen diesen drei Fällen zieht sich Gleichung III zurück auf

$$\text{X)} \quad \delta_i^2 U = -6 \cdot \int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$

Unter der Voraussetzung, dass $\alpha > a$ und dass a nicht negativ, wie es auch bei den für a bereits ermittelten Werthen der Fall ist, bleibt $x \cdot \delta y^2$ bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen positiv, also auch $\int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx$; somit ist der mit dem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz immer negativ, und es findet in primärer Beziehung ein Maximum-stand statt. Im Allgemeinen ist

$$\text{XI)} \quad U' = \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{3} \cdot \alpha + \frac{3 \cdot m^4}{128}\right) \cdot \alpha^2 - \left(a^2 - \frac{m^2}{3} \cdot a + \frac{3 \cdot m^4}{128}\right) \cdot a^2$$

A) Verbindet man $a = 0$ mit $\alpha = \frac{m^2}{16}$, so ist $U'' = + \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^4$, und

$$\delta_i^2 U = -6 \cdot \int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx - 8 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta\alpha^2 - 12 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta a^2$$

Die beiden mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze sind zusammen immer negativ; also ist $\delta_i^2 U$ unter allen Umständen negativ, und es findet ein Maximum-werth eines Maximum-standes statt.

B) Verbindet man $a = 0$ mit $\alpha = \frac{3m^2}{16}$, so ist $U'' = -9 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^4$, und

$$\delta_i^2 U = -6 \cdot \int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx + 24 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta\alpha^2 - 12 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta a^2$$

Das Aggregat der beiden mit Differenzcoefficienten behafteten Theilsätze kann nicht immer einerlei Vorzeichen behalten; und somit findet jetzt in secundärer Beziehung weder ein Maximum-werth noch Minimum-werth statt.

C) Verbindet man $a = \frac{m^2}{16}$ mit $\alpha = \frac{3m^2}{16}$, so ist $U'' = -\frac{32}{3} \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^4$, und

$$\delta_i^2 U = -6 \cdot \int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx + 24 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta\alpha^2 + 8 \cdot \left(\frac{m^2}{16}\right)^2 \cdot \vartheta a^2$$

Hier findet also ein Minimum-werth eines Maximum-standes statt, welcher Zustand jedoch in der Aufgabe nicht verlangt wird.

Zweitens. Gleichung V wird auch identisch, wenn $y = 0$, d. h. wenn y selbst eine identische Function von x ist. Gleichung VI geht dabei über in

$$\text{XII)} \quad \left(-\alpha + \frac{3m^2}{64}\right) \cdot m^2\alpha = 0$$

und daraus folgt entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{3m^2}{64}$. Gleichung VII aber geht über in

$$\text{XIII)} \quad \left(-a + \frac{3m^2}{64}\right) \cdot m^2 a = 0$$

und daraus folgt entweder $a = 0$ oder $a = \frac{3m^2}{64}$. Da nun $\alpha > a$ sein soll, so kann man nur $a = 0$ und $\alpha = \frac{3m^2}{64}$ setzen. Gleichung III zieht sich jetzt zurück auf

Digitized by Google

$$\delta_1^2 U = + 6 \cdot \int_a^\alpha x \cdot \delta y^2 \cdot dx - 3 \cdot \left(\frac{m^2}{8}\right)^2 \cdot \vartheta\alpha^2 - 3 \cdot \left(\frac{m^2}{8}\right)^2 \cdot \vartheta a^2$$

Der mit dem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz ist bei jeder für δy zu setzenden Function positiv, dagegen das Aggregat der mit den Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze bleibt immer negativ, und somit erkennt man, dass $U'' = 288 \cdot \left(\frac{m^2}{64}\right)^4$ ein Maximumwerth eines Minimum-standes ist, welcher Zustand jedoch in der Aufgabe nicht verlangt wird.

Aufgabe 157.

Man sucht für y eine solche Function von x und zugleich für a und α solche Werthe, dass das zwischen den Gränzen a und α erstreckte Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(2y \cdot \sqrt{2} - \frac{m \cdot y^2}{ax} - \frac{3 \cdot x^2}{m} + \alpha + a\right) \cdot dx$$

ein Maximum-werth eines Maximum-standes oder ein Minimum-werth eines Minimum-standes wird.

Das Bemerkenswerthe dieser Aufgabe ist, dass die Elemente a und α schon in dem ursprünglichen Ausdrucke vorkommen (man vergleiche noch Aufgabe 195 und 197). Durch gemischtes Mutiren (man sehe §. 264) bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta_1 U = \int_a^\alpha \left(2 \cdot \sqrt{2} - \frac{2m \cdot y}{a \cdot x}\right) \cdot \delta y \cdot dx + \left(V_\alpha + \int_a^\alpha dx\right) \cdot \vartheta\alpha$$
$$+ \left(- V_a + \int_a^\alpha \left(\frac{m \cdot y^2}{a^2 \cdot x} + 1\right) \cdot dx\right) \cdot \vartheta a$$

Man bekommt nun zunächst die identische Gleichung

$$\text{III)} \quad 2 \cdot \sqrt{2} - \frac{2m \cdot y}{a \cdot x} = 0$$

und weil hier zwischen a und α keine Abhängigkeit stattfindet, so bekommt man gleichzeitig noch die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{IV)} \quad V_\alpha + \int_a^\alpha dx = 0, \quad \text{und V)} \quad - V_a + \int_a^\alpha \left(\frac{m \cdot y^2}{a^2 \cdot x} + 1\right) \cdot dx = 0$$

Aus III folgt $y = \frac{a \cdot x \cdot \sqrt{2}}{m}$ als die für y gesuchte Function; und dadurch gehen die Gleichungen IV und V bezüglich über in

$$\text{VI)} \quad \frac{1}{m} \cdot (2a\alpha - 3 \cdot \alpha^2 + 2m \cdot \alpha) = 0, \quad \text{und VII)} \quad \frac{1}{m} \cdot (\alpha^2 - 2am) = 0$$

Es ist also $\alpha = \frac{3m \pm m}{2}$ und $a = \frac{\alpha^2}{2m}$.

A) Setzt man $\alpha = \frac{3m + m}{2} = 2m$, so ist auch $a = 2m$; da aber $\alpha > a$ sein muss, so können diese zwei zusammengehörigen Werthe des a und α nicht beachtet werden.

B) Setzt man $\alpha = \frac{3m - m}{2} = m$, so ist $a = \frac{m}{2}$. Nun soll $\alpha > a$, d. h. es soll die Differenz $(\alpha - a)$, oder vielmehr es soll die Differenz $\left(m - \frac{m}{2}\right)$ positiv sein; und dieses ist nur möglich, wenn m selbst positiv ist. Es kann also $a = \frac{m}{2}$ und $\alpha = m$ nur berücksichtigt werden, wenn m positiv ist.

Unter Beachtung alles Vorhergehenden bleibt nur

$$\delta_1^2 U = - \frac{2m}{a} \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{x} \cdot \delta y^2 \cdot dx - (2 \cdot (\vartheta\alpha - \vartheta a)^2 + \vartheta\alpha^2),$$

Digitized by Google

oder

$$\delta^2 U = -4 \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{x} \cdot \delta y^2 \cdot dx - (2 \cdot (\vartheta\alpha - \vartheta a)^2 + \vartheta\alpha^2)$$

Da nun a und α nur positiv sind, so kann der mit dem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz nur negativ sein; auch ist das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze negativ. Es findet also ein Maximum-werth eines Maximum-standes statt.

Aufgabe 158.

Man sucht diejenige ebene Curve, welche zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten die kürzeste ist.

Die hiesige Aufgabe verlangt, dass der Bogen der gesuchten Curve durch eine Function der Abscisse ausgedrückt, und hierauf von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt werde. Da die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist, so muss (wie aus der Theorie der Rectification bekannt) die erste Ableitung des Bogens bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein. Man darf also für des Bogens erste Ableitung nur den eindeutigen positiven Ausdruck $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ und nicht den zweideutigen $\sqrt[\pm]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ setzen.

Die Aufgabe ist also:

Man sucht y als solche Function von x, dass das zwischen den Gränzen a und α erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

kleiner wird, als es von jeder andern der gesuchten Function bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunction gemacht werden kann. Zur Bequemlichkeit setze man noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$; und es gibt sich

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man führe die gehörige Umformung aus, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \delta y \cdot dx$$

und

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta^2 y + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn die identische Gleichung $p = 0$, d. h. $\frac{dy}{dx} = 0$ stattfindet, und daraus folgt durch Integration

$$\text{V)} \quad y = B$$

wo B ein willkürlicher Constanter ist. Durch diese Gleichung ist aber die mit der Abscissenaxe parallele Grade dargestellt. Die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, haben durchaus keinen Einfluss auf die hier gefundene Function $y = B$;

Digitized by Google

und bei ihr wird nicht allein die erste sondern auch die zweite (in III aufgestellte) Form des δU zu Null, und die beiden (in II und IV aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv, und es ist nicht nöthig, ihn noch umzuformen, ein Geschäft, welches im dritten Falle dieser Aufgabe ausgeführt werden soll. Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss auf die Function $y = B$ haben, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α erstreckte, sondern auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte Integral U zu einem Minimum-stande. (Ueber das Wort „Minimum-stand" sehe man §. 223.)

Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. Hier hat man die Hauptgleichung

$$\text{VI)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VII)} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Aus VI folgt durch Integration zunächst $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = g$, und daraus gibt sich $p = \frac{dy}{dx} = \frac{g}{\sqrt{1-g^2}}$; und wenn man zur Abkürzung A statt $\frac{g}{\sqrt{1-g^2}}$ setzt, so bekommt man $\frac{dy}{dx} = A$, woraus durch abermalige Integration

$$\text{VIII)} \quad y = A \cdot x + B$$

folgt. Die grade Linie in der Ebene genügt also der Aufgabe, aber nicht jede grade Linie, sondern nur diejenigen, welche solchen Gränzbedingungen unterworfen sind, dass die Gränzengleichung VII hinwegfällt; und diese graden Linien machen nur das zwischen den Gränzen a und α erstreckte Integral $U' = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + A^2}$ und kein zwischen andern Gränzen erstrecktes zu einem Minimum-stande. In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich Gleichung IV auf

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Man beachte, dass das Radical $\sqrt{1 + A^2}$ positiv ist; und somit ist (nach §. 231) auch $\delta^2 U$ positiv, was aber noch näher nachgewiesen werden soll. Man nehme zu diesem Zwecke das von a bis x erstreckte Integral $\int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$, und setze

$$\int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = \zeta(x) \cdot \delta y_x^2 - \zeta(a) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx} + \pi(x) \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

wo $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ zwei noch zu bestimmende Functionen von x sind. Differentiirt man auf beiden Seiten, und bringt man dann Alles auf die linke Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\left(\frac{d\zeta(x)}{dx} + (\pi(x))^2\right) \cdot \delta y_x^2 + 2 \cdot (\zeta(x) + \pi(x)) \cdot \delta y_x \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

Diese Gleichung gilt bei jeder beliebigen Function δy von x, und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie muss also in folgende zwei identische Gleichungen zerfallen:

$$\frac{d\zeta(x)}{dx} + (\pi(x))^2 = 0, \text{ und } \zeta(x) + \pi(x) = 0$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt $\pi(x) = -\zeta(x)$; und somit geht die erste über in $\frac{d\zeta(x)}{dx} + (\zeta(x))^2 = 0$, woraus $\frac{1}{\zeta(x)} = x + c$, oder $\zeta(x) = \frac{1}{x+c}$ folgt, wo c ein

Digitized by Google

willkürlicher Constanter ist. Nun ist $\pi(x) = -\xi(x) = -\frac{1}{x+c}$; und somit bekommt man

$$\text{X)}\quad \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{x+c}\cdot \delta y_x^2 - \frac{1}{a+c}\cdot \delta y_a^2 + \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}\cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Man beachte nun sorgfältig folgende drei Punkte:

1) Es existirt durchaus keine Bedingung, von welcher der Werth des Constanten c abhangt;

2) Man mag dem Constanten c was immer für einen Werth beilegen, dieser Werth hat niemals Einfluss weder auf δy noch auf $\frac{d\delta y}{dx}$;

3) Die Gleichung X ist und bleibt eine identische, man mag dem Constanten c was immer für einen beliebigen Werth beilegen, und sich unter δy was immer für eine beliebige Function von x denken. Davon kann man sich namentlich dadurch überzeugen, dass man auf beiden Seiten wieder differentiirt.

Da nun Gleichung X für das zwischen den Gränzen a bis zu dem noch allgemeinen x erstreckte Integral gilt, so gilt sie nothwendig auch für das zwischen den Gränzen a bis zu dem bestimmten α erstreckte Integral, d. h. es ist nothwendig auch noch

$$\text{XI)}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx = \frac{1}{\alpha+c}\cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a+c}\cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}\cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

bei jedem beliebigen Werthe des Constanten c. Gleichung IX geht nun über in

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\left[\left(A\cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{1}{(\alpha+c)(1+A^2)}\cdot \delta y_\alpha^2\right) - \left(A\cdot \delta^2 y_a + \frac{1}{(a+c)(1+A^2)}\cdot \delta y_a^2\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}\cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Was man auch immer dem Constanten c für einen beliebigen Werth beilegen mag, so hat doch jedesmal der in XII für $\delta^2 U$ aufgestellte Ausdruck genau denselben Werth, wie der in IX aufgestellte; und man hat das in der That höchst beachtenswerthe Ergebniss, dass der Werth des in Gleichung XII für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe des Constanten c. Man hat dabei weiter nichts zu beachten, als dass man dem unter dem Integralzeichen befindlichen c jedesmal den nemlichen Werth beilegt, den man dem ausserhalb des Integralzeichens befindlichen c beilegt.

Vielleicht ist es für Manchen nicht überflüssig, wenn man ihn noch auf folgendem Wege zu der Erkenntniss führt, dass der Werth des in XII für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruckes von dem willkürlichen Werthe des Constanten c ganz unabhängig ist. Gleichung XII lässt sich zunächst umformen in

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\left[\left(A\cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{1}{(\alpha+c)\cdot(1+A^2)}\cdot \delta y_\alpha^2\right) - \left(A\cdot \delta^2 y_a + \frac{1}{(a+c)\cdot(1+A^2)}\cdot \delta y_a^2\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \left(2\cdot \frac{1}{x+c}\cdot \delta y\cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{(x+c)^2}\cdot \delta y^2\right)\right]\cdot dx$$

Nun ist $2\cdot \frac{1}{x+c}\cdot \delta y\cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{(x+c)^2}\cdot \delta y^2 = \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{x+c}\cdot \delta y^2\right)$, und Gleichung XIII geht über in

Digitized by Google

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\left[\left(A\cdot\delta^2 y_\alpha + \frac{1}{(\alpha+c)(1+A^2)}\cdot\delta y_\alpha^2\right) - \left(A\cdot\delta^2 y_a + \frac{1}{(a+c)\cdot(1+A^2)}\cdot\delta y_a^2\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{x+c}\cdot\delta y^2\right)\right]\cdot dx$$

Der zweite unter dem Integralzeichen befindliche Theilsatz, welcher ein vollständiges Differential ist, lässt sich ohneweiteres integriren; und thut man dieses, so reducirt sich Gleichung XIV gradezu auf Gleichung IX, wo der Constante c nicht weiter vorkommt. Da nun Gleichung XIV und XII ganz die nemlichen sind, so ist vollkommen erwiesen, dass der willkürliche Werth des Constanten c keinen Einfluss hat auf den Werth des $\delta^2 U$.

Nun mögen einige durch Gränzbedingungen specialisirte Fälle nachfolgen.

Erster Fall. Sind zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, durch welche die gesuchte Grade begränzt werden soll; so müssen auch alle andern in Betracht zu ziehenden nächstanliegenden Nachbarcurven durch diese zwei festen Punkte begränzt werden. Alle in Betracht zu ziehenden Curven haben also bei der Abscisse a eine Ordinate, deren Werth $= y_a = b$, und bei der Abscisse α eine Ordinate, deren Werth $= y_\alpha = \beta$. Desshalb bestehen zwischen den Gränzordinaten der gesuchten und aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende zwei Gleichungen:

$$y_a = y_a + \varkappa\cdot\delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y_a + \dots\dots\dots\dots$$

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa\cdot\delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y_\alpha + \dots\dots\dots$$

Es muss also (nach §. 87) sein $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung VII wird also jetzt von selbst erfüllt, und an den Gränzen geht die gefundene Gleichung VIII bezüglich in folgende zwei über:

$$b = A\cdot a + B, \text{ und } \beta = A\cdot\alpha + B$$

woraus sich A und B bestimmen lassen, so dass

$$y = \frac{\beta - b}{\alpha - a}\cdot x + \frac{\alpha\cdot b - a\cdot\beta}{\alpha - a}$$

die vollständig bestimmte Gleichung der für diesen ersten Fall gesuchten graden Linie ist. Dabei reduciren sich die Gleichungen IV und XII bezüglich auf

$$\text{XV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

und

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c}\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

Beide Ausdrücke sind unter allen Umständen positiv, weil bekanntlich das einfache Radical $\sqrt{1+A^2}$ nur eine positive Bedeutung hat. Es findet also ein Minimum-stand statt. Ueber das Wort „Minimum-stand“ sehe man §. 223. Was man auch immer dem Constanten c für einen beliebigen Werth beilegen mag, so haben doch die beiden Ausdrücke XV und XVI ganz genau einerlei Werth; denn Gleichung XVI geht, wie schon im Allgemeinen an XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{x+c}\cdot\delta y^2\right)\right]\cdot dx$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}}\cdot\left[\frac{1}{\alpha+c}\cdot\delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a+c}\cdot\delta y_a^2 + \int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx\right]$$

Digitized by Google

welcher Ausdruck sich, weil $\delta y_a = 0$ und $\delta y_\alpha = 0$ ist, ohneweiters auf XV zurückzieht.

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Grade von einem festen Punkte bis zu einem auf der Abscissenaxe stehenden Perpendikel genommen werden; und ist der feste Punkt gegeben durch $x = a$ und $y_a = b$, das auf der Abscissenaxe stehende Perpendikel aber durch $x = \alpha$; so ist auch hier $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. können jeden beliebigen Werth annehmen. Die Gränzengleichung VII reducirt sich jetzt auf $\frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \delta y_\alpha = 0$. Wegen der Willkürlichkeit des Werthes von δy_α muss $A = 0$ sein. Die Gleichung VIII reducirt sich also jetzt auf $y = B$; und da die gesuchte Grade durch den festen Punkt (a, b) geht, so ist $y = b$ die vollständig bestimmte Gleichung derselben. Sie geht also durch den Punkt (a, b) parallel mit der Abscissenaxe, und ist auf dem in $x = \alpha$ errichteten Perpendikel senkrecht. Ferner ist jetzt $U' = \alpha - a$, und die Ausdrücke IX und XII reduciren sich auf

$$\text{XVII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XVIII)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Diese beiden Ausdrücke haben, was man auch immer für einen beliebigen Werth dem Constanten c beilegen mag, doch jedesmal genau den gleichen Werth; denn Gleichung XVIII geht, wie schon im Allgemeinen an Gleichung XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{x + c} \cdot \delta y^2\right)\right] \cdot dx$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \left[-\frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

welcher Ausdruck sich, weil $\delta y_a = 0$ ist, ohneweiters auf XVII zurückzieht, und wodurch bestätigt ist, dass der Werth des in XVIII aufgestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe, welchen man dem Constanten c beilegt. Man bekommt also auch den wahren Werth des $\delta^2 U$, wenn man dem c einen solchen Werth beilegt, dass der in Gleichung XVIII ausserhalb des Integralzeichens befindliche Theilsatz zu Null wird. Dieses trifft aber nur ein, wenn man c unendlichgross nimmt; denn dann geht Gleichung XVIII über in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\alpha + \infty} \cdot \delta y_\alpha^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + \infty} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Da aber $\frac{1}{\alpha + \infty} = 0$ und $\frac{1}{x + \infty} = 0$; so reducirt sich letztere Gleichung ohneweiters auf XVII. Es findet also ein Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Wenn kein fester Punkt gegeben ist, und man überhaupt die kürzeste Entfernung zwischen zwei auf der Abscissenaxe stehenden Perpendikeln sucht; so sind jetzt die Elemente δy_a und δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn sie gleich einerlei Form haben. (Der Beweis dazu steht in §. 92.) Ebenso verhält es sich zwischen $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$, zwischen $\delta^3 y_a$ und $\delta^3 y_\alpha$, etc. Gleichung VII zerfällt also in folgende zwei:

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha = 0 \text{ und } \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a = 0$$

woraus aber nichts weiter folgt, als $A = 0$. Die Gleichung der gesuchten Linie ist daher $y = B$; und da zur Bestimmung des B keine weitere Bedingung gegeben ist, so ist die gesuchte Linie eine in beliebiger Entfernung mit der Abscissenaxe oberhalb oder

Digitized by Google

unterhalb parallel gezogene Grade. Hier ist wieder $U' = \alpha - a$, und die Ausdrücke IX und XII reduciren sich auf

$$\text{XIX)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Diese beiden Ausdrücke haben, was man auch immer dem Constanten c für einen beliebigen Werth beilegen mag, doch jedesmal genau einerlei Werth; denn Gleichung XX geht, wie schon im Allgemeinen an XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{x + c} \cdot \delta y^2\right)\right] \cdot dx$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

$$\delta^2 U = \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \left[-\frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

welcher Ausdruck sich ohneweiters auf Gleichung XIX zurückzieht, und wodurch abermals bestätigt ist, dass der Werth des in XX für $\delta^2 U$ aufgestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe, welchen man dem Constanten c beilegt. Man bekommt also auch den wahren Werth des $\delta^2 U$, wenn man dem c einen solchen Werth beilegt, dass die in Gleichung XX ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze zusammen wegfallen, d. h. dass die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 = 0$$

stattfindet. Daraus folgt

$$c = \frac{\alpha \cdot \delta y_a^2 - a \cdot \delta y_\alpha^2}{\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2}$$

Durch diese Gleichung ist aber ausgesprochen, was c jedesmal für einen Werth annimmt, wenn man sich unter δy bald diese bald jene Function von x denkt. Gleichung XX geht jetzt über in

$$\text{XXI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2}{x \cdot (\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2) + \alpha \cdot \delta y_a^2 - a \cdot \delta y_\alpha^2} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Dieser für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck hat genau denselben Werth, wie der in XIX, also auch wie der in XX. Man kann auch die in XXI aufgestellte Form auf die in XIX zurückführen; denn XXI geht, wie schon im Allgemeinen an XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2}{x \cdot (\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2) + \alpha \cdot \delta y_a^2 - a \cdot \delta y_\alpha^2} \cdot \delta y^2\right)\right] \cdot dx$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

$$\delta^2 U = \left[-\frac{\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2}{\alpha \cdot (\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2) + \alpha \cdot \delta y_a^2 - a \cdot \delta y_\alpha^2} \cdot \delta y_\alpha^2 + \frac{\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2}{a \cdot (\delta y_\alpha^2 - \delta y_a^2) + \alpha \cdot \delta y_a^2 - a \cdot \delta y_\alpha^2} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

Digitized by Google

Die beiden ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze heben sich, wie man sieht, einander auf; und somit reducirt sich letzterer Ausdruck auf XIX, wie zu erweisen war. Es findet also auch hier ein Minimum-stand statt.

Vierter Fall. Ist zwar in den Gränzordinaten wieder kein fester Punkt gegeben, dagegen die Bedingung gestellt, dass der Unterschied derselben constant sein soll, so dass die Gleichung $y_\alpha - y_a = K$ stattfindet; so folgt aus dieser Bedingung $\delta y_a = \delta y_\alpha$, $\delta^2 y_a = \delta^2 y_\alpha$, etc. Gleichung VII geht also über in $\frac{A}{\sqrt{1+A^2}} \cdot (\delta y_a - \delta y_a) = 0$, d. h. die Gränzengleichung fällt von selbst weg. Die Gleichung der gesuchten Graden ist aber jetzt:

$$y = \frac{K}{\alpha - a} \cdot x + B$$

wo B ganz beliebig ist. Alle Graden, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel bilden, dessen goniometrische Tangente $= \frac{K}{\alpha - a}$ ist, genügen jetzt der Aufgabe. Hier ist $U' = \sqrt{(\alpha - a)^2 + K^2}$, und Gleichung IX und XII reduciren sich auf

$$\text{XXII)} \quad \delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^3}{[(\alpha - a)^2 + K^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XXIII)} \quad \delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^3}{[(\alpha - a)^2 + K^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\alpha + c} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx\right]$$

Diese beiden Ausdrücke haben, was man auch immer dem c für einen beliebigen Werth beilegen mag, doch jedesmal genau einerlei Werth; denn Gleichung XXIII geht, wie schon im Allgemeinen an XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^3}{[(\alpha - a)^2 + K^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\alpha + c} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{x + c} \cdot \delta y^2\right)\right) \cdot dx\right]$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

$$\delta^2 U = \frac{(\alpha - a)^3}{[(\alpha - a)^2 + K^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\alpha + c} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 - \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

Eliminirt man noch das δy_α dadurch, dass man δy_a anstatt δy_α setzt; so fallen alle ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze weg, und es bleibt bloss Gleichung XXII, wodurch abermals bestätigt ist, dass der Werth des in XXII für $\delta^2 U$ aufgestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe, welchen man dem Constanten c beilegt. Man bekommt also auch den wahren Werth des $\delta^2 U$, wenn man dem c einen solchen Werth beilegt, dass der in Gleichung XXII ausserhalb des Integralzeichens befindliche Theilsatz wegfällt, d. h. dass die Gleichung $\frac{1}{\alpha + c} - \frac{1}{a + c} = 0$ stattfindet. Diese Gleichung enthält jedoch einen Widerspruch in sich selbst, den Fall ausgenommen, wo c unendlichgross ist. Nimmt man aber c unendlichgross, so wird gleichzeitig $\frac{1}{\alpha + \infty} = 0$, $\frac{1}{a + \infty} = 0$ und $\frac{1}{x + \infty} = 0$; und Gleichung XXIII geht ohneweiters in XXI über. Es findet also auch hier ein Minimum-stand statt.

Digitized by Google

Fünfter Fall. Soll die Summe der Gränzordinaten beständig dieselbe bleiben, so dass man die Gleichung $y_\alpha + y_a = K$ hat; so folgt daraus $\delta y_\alpha = -\delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = -\delta^2 y_a$, etc. Die Gränzengleichung VII geht also über in $\frac{2A}{\sqrt{1+A^2}} \cdot \delta y_a = 0$, d. h. es muss $A = 0$ sein. Die Gleichung der gesuchten Graden ist also jetzt $y = \frac{K}{2}$, d. h. die gesuchte Grade läuft in der Entfernung $\frac{K}{2}$ mit der Abscissenaxe parallel. Hier ist wieder $U' = \alpha - a$, und die Gleichungen IX oder XII reduciren sich auf

$$\text{XXIV)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XXV)} \quad \delta^2 U = \left[\left(\frac{1}{\alpha + c} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx\right]$$

Man hat nun mit dem Ausdrucke XXV zu verfahren, wie im vierten Falle mit dem Ausdrucke XXIII geschehen ist. Es findet also ein Minimum-stand statt.

Sechster Fall. Soll das Product der Gränzordinaten beständig dasselbe bleiben, so dass man die Gleichung $y_a \cdot y_\alpha = \pm K^2$ hat; so folgt daraus $y_a \cdot \delta y_\alpha + y_\alpha \cdot \delta y_a = 0$, $y_a \cdot \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + y_\alpha \cdot \delta^2 y_a = 0$, etc. Es ist daher

$$y_\alpha = \frac{\pm K^2}{y_a}, \; \delta y_\alpha = -\frac{\pm K^2}{y_a^2} \cdot \delta y_a, \text{ und } \delta^2 y_\alpha = -\frac{\pm K^2}{y_a^2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\pm 2K^2}{y_a^3} \cdot \delta y_a^2$$

etc. Gleichung VII geht also jetzt über in

$$\text{XXVI)} \quad \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \frac{y_a^2 \pm K^2}{y_a^2} \cdot \delta y_a = 0$$

d. h. entweder ist $A = 0$ oder $y_a^2 \pm K^2 = 0$.

𝔄) Setzt man $A = 0$, so ist $y = B$, d. h. y ist constant. Es ist also auch $y_a = y_\alpha = B$, und somit ist $y_a \cdot y_\alpha = y_a^2 = y_\alpha^2 = \pm K^2$, woraus $y_a = y_\alpha = \sqrt{\pm K^2}$ folgt, und woran man erkennt, dass jetzt nur das positive Zeichen vor K^2 stehen darf. Sonach ist $y = \sqrt{K^2}$ die Gleichung der gesuchten Graden; und diese ist eine in der Entfernung $\sqrt{K^2}$ entweder oberhalb oder unterhalb mit der Abscissenaxe parallele Grade, je nachdem man dem $\sqrt{K^2}$ seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Ferner ist $U' = \alpha - a$. Da aber hier nur das $+$ Zeichen vor K^2 stehen darf, so muss man, wenn man δy_α eliminiren will, $\left(-\frac{K^2}{y_a^2} \cdot \delta y_a\right)$ an die Stelle des δy_α setzen. Die Gleichungen IX und XII reduciren sich auf

$$\text{XXVII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XXVIII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{1}{\alpha + c} \cdot \frac{K^4}{y_a^4} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Diese beiden Ausdrücke haben, was man auch immer dem c für einen beliebigen Werth beilegen mag, doch jedesmal genau einerlei Werth; denn Gleichung XXVIII geht, wie im Allgemeinen schon an XIV gezeigt ist, gradezu über in

$$\delta^2 U = \left(\frac{1}{\alpha + c} \cdot \frac{K^4}{y_a^4} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{x + c} \cdot \delta y^2\right)\right] \cdot dx$$

oder, wenn man das vollständige Differential integrirt, in

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \left(\frac{1}{\alpha + c} \cdot \frac{K^4}{y_a^4} - \frac{1}{a + c}\right) \cdot \delta y_a^2 + \left[- \frac{1}{\alpha + c} \cdot \delta y_\alpha^2 + \frac{1}{a + c} \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

Wenn man δy_α eliminirt, so fallen die ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze alle weg, und es bleibt bloss Gleichung XXVII, so dass abermals bestätigt ist, dass der Werth des in XXVIII für $\delta^2 U$ aufgestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe, welchen man dem Constanten c beilegt. Man bekommt also auch den wahren Werth des $\delta^2 U$, wenn man dem c einen solchen Werth beilegt, dass die in Gleichung XXVIII ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze zusammen wegfallen, d. h. dass die Gleichung $\frac{1}{\alpha + c} \cdot \frac{K^4}{y_a^4} - \frac{1}{a + c} = 0$ stattfindet.

Daraus folgt $c = \frac{\alpha \cdot y_a^4 - a \cdot K^4}{K^4 - y_a^4}$, und Gleichung XXVIII geht über in

$$\text{XXIX)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{K^4 - y_a^4}{x \cdot (K^4 - y_a^4) + \alpha \cdot y_a^4 - a \cdot K^4} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Diesen Ausdruck kann man wieder auf die Form in XXVII zurückführen, indem man ihn zunächst in

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{K^4 - y_a^4}{x(K^4 - y_a^4) + \alpha \cdot y_a^4 - aK^4} \cdot \delta y^2\right)\right] \cdot dx$$

umformt, hierauf das vollständige Differential integrirt, und sodann δy_α^2 eliminirt. Es findet also hier ein Minimum-stand statt.

B) Will man der Gleichung XXVI dadurch genügen, dass man $y_a^2 \pm K^2 = 0$ setzt; so ist dieses nur möglich, wenn das untere Zeichen gilt. Daraus folgt $y_a = \sqrt{K^2}$ und weil jetzt $y_a \cdot y_\alpha = - K^2$ ist, so ist $y_\alpha = - \frac{K^2}{\sqrt{K^2}} = - \sqrt{K^2}$, d. h. y_a und y_α haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung der hierher gehörigen Graden ist also

$$y = \frac{2 \cdot \sqrt{K^2}}{\alpha - a} \cdot x - \frac{(a + \alpha) \cdot \sqrt{K^2}}{\alpha - a}$$

Diese Grade durchschneidet die Abscissenaxe da, wo $x = \frac{a + \alpha}{2}$, d. h. mitten zwischen den Gränzordinaten. Sie geht von oben nach unten, wenn y_a positiv und y_α negativ ist; sie geht von unten nach oben, wenn y_a negativ und y_α positiv ist. Die Gleichungen IX und XII gehen, weil bei $(\pm K^2)$ nur das untere Vorzeichen gelten darf, jetzt über in

$$\text{XXX)} \quad \delta^2 U = - \frac{2A \cdot K^2}{y_a^3 \cdot \sqrt{1 + A^2}} \cdot \delta y_a^2 + \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und

$$\text{XXXI)} \quad \delta^2 U =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left(- \frac{2A \cdot K^2}{y_a^3} + \frac{K^4}{(1 + A^2) \cdot (\alpha + c) \cdot y_a^4} - \frac{1}{(1 + A^2) \cdot (a + c)}\right) \cdot \delta y_a^2 + \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x + c} \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

Diese beiden für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke haben, was man auch immer dem Constanten c für einen beliebigen Werth beilegen mag, doch jedesmal genau einerlei Werth; denn Gleichung XXXI geht, wie schon im Allgemeinen an Gleichung XIV gezeigt ist, gradezu über in

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \cdot \left(- \frac{2A \cdot K^2}{y_a^3} + \frac{K^4}{(1+A^2)\cdot(\alpha+c)\cdot y_a^4} - \frac{1}{(1+A^2)(a+c)} \right) \cdot \delta y_a^2$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{x+c} \cdot \delta y^2 \right) \right) \cdot dx$$

Indem man hier das vollständige Differential integrirt, und hierauf δy_α eliminirt; reducirt sich dieser Ausdruck auf XXX, wodurch noch besonders nachgewiesen ist, wie der Werth des $\delta^2 U$ in XXXI ganz unabhängig ist vom Werthe des c. Man lege nun dem c einen solchen Werth bei, dass in XXXI der ausserhalb des Integralzeichens befindliche Theilsatz wegfällt, d. h. dass die Gleichung stattfindet

$$\text{XXXII)} \quad - \frac{2A \cdot K^2}{y_a^3} + \frac{K^4}{(1+A^2)\cdot(\alpha+c)\cdot y_a^4} - \frac{1}{(1+A^2)\cdot(a+c)} = 0 \quad .$$

Daraus lassen sich zwei verschiedene Werthe für c bestimmen, und jeder derselben macht, dass XXXI sich auf

$$\text{XXXIII)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{(1+A^2)^3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{x+c} \cdot \delta y \right) \cdot dx$$

zurückzieht, wo man aber dem c einen aus XXXII sich ergebenden Werth beigelegt denken muss. An dem Ausdrucke XXXIII erkennt man gradezu, dass er positiv ist; es ist also auch der mit ihm gleichbedeutende Ausdruck XXX positiv. Somit findet ein Minimum-stand statt.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannæ et Genevæ. 1744. Seite 48 und 49). Sie wurde später von vielen Schriftstellern, welche über den (von Euler sogenannten) Variationscalcul schrieben, aufgenommen, aber immer nur sehr mangelhaft behandelt.

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man:

1) Die Untersuchung der ersten Form des δU.

2) Die verschiedenen Gränzfälle, welche sich bei der Untersuchung der zweiten Form des δU befinden.

3) Die zu jedem Gränzfalle gehörige Umformung des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes; Umformungen, welche, so nöthig sie auch sind, doch noch Niemand ausgeführt hat.

Aufgabe 159.

Man sucht bei einem polaren Coordinatensysteme diejenige ebene Curve, welche die kürzeste ist zwischen zwei Leitstralen, die zu den durch a und α gegebenen Coordinatenwinkeln gehören.

Es sei u der Leitstral; die Coordinatenwinkel sollen zwischen der Ordinatenaxe und den jedesmaligen Leitstralen genommen, und durch die auf den Halbmesser = 1 bezogenen Kreisbögen w gemessen werden. Die hiesige Aufgabe verlangt also, dass der Bogen der gesuchten Curve durch eine Function von w dargestellt, und hierauf von w = a bis w = α erstreckt werde. Da nun die Differenz α — a positiv ist, so muss (wie aus der Theorie der Rectification bekannt) die erste Ableitung des Bogens bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des w positiv sein. Man darf also für des Bogens erste Ableitung nur den eindeutigen Ausdruck $\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2}$ und durchaus nicht den zweideutigen $\sqrt{\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2}}$ setzen. Die Aufgabe ist also: Man sucht für u eine solche Function von w, dass das zwischen den nach Belieben genommenen Gränzen a und α erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dw = \int_a^\alpha \left(\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2} \right) \cdot dw$$

Digitized by Google

kleiner wird, als es von jeder andern, der gesuchten Function bei jedem Werthe des w nächstanliegenden, Nachbarfunction gemacht werden kann. Mutirt man nun, und setzt dann zur Bequemlichkeit noch p statt $\frac{du}{dw}$; so bekommt man

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{u \cdot \delta u}{\sqrt{u^2 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}} \cdot \frac{d\delta u}{dw}\right) \cdot dw$$

und wenn man umformt, so bekommt man

$$\delta U = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta u_\alpha - \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_a \cdot \delta u_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta u \cdot dw$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Hier müssen die beiden identischen Gleichungen $\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} = 0$ und $\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}} = 0$ zugleich stattfinden. Diese aber widersprechen sich, ausser es müsste schon $u = 0$, d. h. es müsste u eine identische Function von w sein. Eine solche entspricht aber nicht der hiesigen Aufgabe.

Untersuchung der zweiten Form des δU. Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss stattfinden die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad \frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{II)} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta u_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_a \cdot \delta u_a = 0$$

Multiplicirt man Gleichung I mit $p = \frac{du}{dw}$, so ergibt sich

$$\frac{u \cdot du}{\sqrt{u^2 + p^2}} - p \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

oder

$$d\sqrt{u^2 + p^2} - \frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}} \cdot dp - p \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

oder

$$d\sqrt{u^2 + p^2} - d\left(p \cdot \frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$\sqrt{u^2 + p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} = E$$

oder

$$\text{III)} \quad \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} = E$$

Also ist $dw = \frac{E \cdot du}{u \cdot \sqrt{u^2 - E^2}}$; und daraus folgt $w + m = \text{arc sec} \frac{u}{E}$, oder

$$\text{IV)} \quad \sec(w + m) = \frac{u}{E}$$

oder

$$\text{V)} \quad u = E \cdot \sec(w + m)$$

oder

$$\text{VI)} \quad u \cdot \cos(w + m) = E$$

oder

$$\text{VII)} \quad u = \frac{E}{\cos(w + m)}$$

Man erkennt also, dass die grade Linie der Aufgabe genügt, aber nicht jede grade Linie, sondern nur diejenigen, die solchen Gränzbedingungen unterworfen sind, dass die Gränzengleichung II, welche im Allgemeinen auch dargestellt werden kann durch

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad (\sin(\alpha + m)) \cdot \delta u_\alpha - (\sin(a + m)) \cdot \delta u_a = 0$$

hinwegfällt.

Man kann Gleichung VI leicht in eine für rechtwinkelige Coordinaten umwandeln. Entwickelt man $\cos(w + m)$, so geht VI über in

$$u \cdot \cos w \cdot \cos m - u \cdot \sin w \cdot \sin m = E$$

Daraus folgt

$$u \cdot \cos w = \frac{\sin m}{\cos m} \cdot u \cdot \sin w + \frac{E}{\cos m}$$

Nun ist nach der hier gemachten Voraussetzung $u \cdot \cos w = y$, $u \cdot \sin w = x$; und setzt man noch A statt $\frac{\sin m}{\cos m}$, und B statt $\frac{E}{\cos m}$, so hat man $y = A \cdot x + B$, wie in voriger Aufgabe.

In Folge alles Vorhergehenden ist jetzt nur

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = (\sin(\alpha + m)) \cdot \delta^2 u_\alpha - (\sin(a + m)) \cdot \delta^2 u_a$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \int_a^\alpha \cos(w + m)^2 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} \cdot \cos(w + m) - \delta u \cdot \sin(w + m)\right)^2 \cdot dw$$

Um nun den Zeichenstand des $\delta^2 U$ beurtheilen zu können, betrachte man (nach §. 230 und 231) den zu $\left(\frac{d\delta u}{dw}\right)^2$ gehörigen Factor. Dieser ist aber $\frac{\cos(w + m)^4}{\sqrt{E^2}}$, d. h. er ist positiv, und sonach liefern alle diejenigen graden Linien, welche der Gränzengleichung II oder VIII genügen, einen Minimum-stand. Ueber das Wort „Minimum-stand" sehe man §. 223.

Schaut man wieder nach Gleichung IX zurück, so erkennt man gradezu, dass $\delta^2 U$ positiv ist, wenn die ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze wegfallen; fallen sie aber nicht weg, so muss die Untersuchung nach §. 230 und 231 vorgenommen werden, wie hier geschehen soll. Man nehme das von a bis w erstreckte Integral $\int_a^w \cos(w + m)^2 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} \cdot \cos(w + m) - \delta u \cdot \sin(w + m)\right)^2 \cdot dw$, und setze

$$\text{X)}\quad \int_a^w \cos(w + m)^2 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} \cdot \cos(w + m) - \delta u \cdot \sin(w + m)\right)^2 \cdot dw =$$

$$\cos(w + m)^4 \cdot \zeta(w) \cdot \delta u_w^2 - \cos(a + m)^4 \cdot \zeta(a) \cdot \delta u_a^2$$

$$+ \int_a^w \cos(w + m)^4 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} + \pi(w) \cdot \delta u\right)^2 \cdot dw$$

wo $\zeta(w)$ und $\pi(w)$ zwei noch zu bestimmende Functionen von w sind. Differentiirt man auf beiden Seiten, und reducirt man soviel als möglich; so geht aus Gleichung X jetzt hervor

$$\text{XI)}\quad [\cos(w + m)^2 \cdot \sin(w + m)^2 - \frac{d\zeta(w)}{dw} \cdot \cos(w + m)^4$$

$$+ 4 \cdot \zeta(w) \cdot \cos(w + m)^3 \cdot \sin(w + m) - (\pi(w))^2 \cdot \cos(w + m)^4] \cdot \delta u^2$$

$$-2.[\cos(w + m)^3 . \sin(w + m) + \zeta(w) . \cos(w + m)^4 + \pi(w) . \cos(w + m)^4] . \delta u . \frac{d\delta u}{dw} = 0$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Function δu von w, und bei jedem beliebigen Werthe des w; sie muss also in folgende zwei identische Gleichungen zerfallen

$$\text{XII)}\quad \cos(w + m)^2 \cdot \sin(w + m)^2 - \frac{d\zeta(w)}{dw} \cdot \cos(w + m)^4$$

$$+ 4 \cdot \zeta(w) \cdot \cos(w + m)^3 \cdot \sin(w + m) - (\pi(w))^2 \cdot \cos(w + m)^4 = 0$$

$$\text{XIII)}\quad \cos(w + m)^3 \cdot \sin(w + m) + \zeta(w) \cdot \cos(w + m)^4 + \pi(w) \cdot \cos(w + m)^4 = 0$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt

$$\text{XIV)}\quad \pi(w) = -\frac{\sin(w + m) + \zeta(w) \cdot \cos(w + m)}{\cos(w + m)}$$

Digitized by Google

Gleichung XII geht also jetzt über in

$$\text{XV)}\quad \frac{d\zeta(w)}{dw} = 2\cdot\zeta(w)\cdot \operatorname{tg}(w+m) - (\zeta(w))^2$$

Man gebe dieser Gleichung eine algebraische Form, und setze $z = \operatorname{tg}(w+m)$; so bekommt man $w + m = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z$, und $dw = \frac{dz}{1+z^2}$. Gleichung XV geht also über in $d\zeta(w) = 2\cdot\zeta(w)\cdot\frac{z\cdot dz}{1+z^2} - (\zeta(w))^2\cdot\frac{dz}{1+z^2}$; und diese Gleichung formt sich gradezu um in

$$-\frac{d\zeta(w)}{(\zeta(w))^2} + \frac{2\cdot\zeta(w)\cdot z\cdot dz - z^2\cdot d\zeta(w)}{(\zeta(w))^2} = dz$$

Diese Gleichung lässt sich ohneweiters integriren, und man bekommt $\frac{1}{\zeta(w)} + \frac{z^2}{\zeta(w)} = z + n$. Daraus folgt

$$\text{XVI)}\quad \zeta(w) = \frac{1+z^2}{n+z} = \frac{1+\operatorname{tg}(w+m)^2}{n+\operatorname{tg}(w+m)}$$

Der in XIV für $\varkappa(w)$ hingestellte Ausdruck lässt sich auch umformen in $\varkappa(w) = -\zeta(w) - \operatorname{tg}(w+m)$; und somit ist

$$\text{XVII)}\quad \varkappa(w) = -\frac{1+\operatorname{tg}(w+m)^2}{n+\operatorname{tg}(w+m)} - \operatorname{tg}(w+m)$$

wo n ein noch ganz willkürlicher Constanter ist, zu dessen Bestimmung durchaus keine Bedingung existirt. Gleichung X geht also jetzt über in

$$\text{XVIII)}\quad \int_a^w \cos(w+m)^2\cdot\left(\frac{d\delta u}{dw}\cdot\cos(w+m) - \delta u\cdot\sin(w+m)\right)^2\cdot dw$$
$$= \frac{1+\operatorname{tg}(w+m)^2}{n+\operatorname{tg}(w+m)}\cdot\cos(w+m)^4\cdot\delta u_w^2 - \frac{1+\operatorname{tg}(a+m)^2}{n+\operatorname{tg}(a+m)}\cdot\cos(a+m)^4\cdot\delta u_a^2$$
$$+\int_a^w \cos(w+m)^4\cdot\left(\frac{d\delta u}{dw} - \left(\operatorname{tg}(w+m) + \frac{1+\operatorname{tg}(w+m)^2}{n+\operatorname{tg}(w+m)}\right)\cdot\delta u\right)^2\cdot dw$$

Diese Gleichung ist und bleibt eine identische, man mag dem Constanten n was immer für einen beliebigen Werth beilegen, wovon man sich rückwärts überzeugen kann, dadurch, dass man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens differentiirt. Da nun Gleichung XVIII für das zwischen den Gränzen a bis zu dem noch allgemeinen w erstreckte Integral gilt, so gilt sie nothwendig auch noch für das von der Gränze a bis zu dem bestimmten α erstreckte Integral, d. h. es ist nothwendig auch noch

$$\text{XIX)}\quad \int_a^\alpha \cos(m+w)^2\cdot\left(\frac{d\delta u}{dw}\cdot\cos(m+w) - \delta u\cdot\sin(m+w)\right)^2\cdot dw$$
$$= \frac{1+\operatorname{tg}(\alpha+m)^2}{n+\operatorname{tg}(\alpha+m)}\cdot\cos(\alpha+m)^4\cdot\delta u_\alpha^2 - \frac{1+\operatorname{tg}(a+m)^2}{n+\operatorname{tg}(a+m)}\cdot\cos(a+m)^4\cdot\delta u_a^2$$
$$+\int_a^\alpha \cos(w+m)^4\cdot\left(\frac{d\delta u}{dw} - \left(\operatorname{tg}(m+w) + \frac{1+\operatorname{tg}(m+w)^2}{n+\operatorname{tg}(m+w)}\right)\cdot\delta u\right)^2\cdot dw$$

bei jedem beliebigen Werthe des Constanten n. Gleichung IX geht nun über in

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = (\sin(\alpha+m))\cdot\delta^2 u_\alpha + \frac{1}{\sqrt{E^2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}(\alpha+m)^2}{n+\operatorname{tg}(\alpha+m)}\cdot\cos(\alpha+m)^4\cdot\delta u_\alpha^2$$
$$-(\sin(a+m))\cdot\delta^2 u_a - \frac{1}{\sqrt{E^2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}(a+m)^2}{n+\operatorname{tg}(a+m)}\cdot\cos(a+m)^4\cdot\delta u_a^2$$
$$+\frac{1}{\sqrt{E^2}}\cdot\int_a^\alpha \cos(w+m)^4\cdot\left(\frac{d\delta u}{dw} - \left(\operatorname{tg}(w+m) + \frac{1+\operatorname{tg}(w+m)^2}{n+\operatorname{tg}(w+m)}\right)\cdot\delta u\right)^2\cdot dw$$

Was man auch immer dem Constanten n für einen beliebigen Werth beilegen mag, so hat doch jedesmal der in XX für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck den gleichen Werth, wie

Digitized by Google

der in IX für $\delta^2 U$ hergestellte; und man hat das höchst bemerkenswerthe Ergebniss, dass der Werth des in XX für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe des Constanten n. Man hat dabei weiter nichts zu beachten, als dass man dem unter dem Integralzeichen befindlichen n jedesmal den nemlichen willkürlichen Werth beilegt, welchen man dem ausserhalb des Integralzeichens befindlichen n beilegt.

Vielleicht ist es für manchen nicht überflüssig, wenn man ihn noch auf folgendem Wege zu der Erkenntniss führt, dass der Werth des in XX für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruckes von dem willkürlichen Werthe des Constanten n unabhängig ist. Gleichung XX lässt sich zunächst umformen in

$$\text{XXI)}\quad \delta^2 U = (\sin(\alpha + m)) \cdot \delta^2 u_\alpha + \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \frac{1 + tg(\alpha + m)^2}{n + tg(\alpha + m)} \cdot \cos(\alpha + m)^4 \cdot \delta u_\alpha^2$$
$$- (\sin(a + m)) \cdot \delta^2 u_a - \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \frac{1 + tg(a + m)^2}{n + tg(a + m)} \cdot \cos(a + m)^4 \cdot \delta u_a^2$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \int_a^\alpha \Bigg[\cos(m + w)^4 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} - \delta u \cdot tg(m + w)\right)^2$$
$$- 2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot \cos(m + w)^4 \cdot \delta u \cdot \frac{d\delta u}{dw}$$
$$+ \left(2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot tg(m + w) + \left(\frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)}\right)^2\right) . \cos(m + w)^4 . \delta u^2\Bigg] . dw$$

Nun ist

$$\left(2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot tg(m + w) + \left(\frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)}\right)^2\right) \cdot \cos(m + w)^4 \cdot \delta u^2$$
$$- 2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot \cos(m + w)^4 \cdot \delta u \cdot \frac{d\delta u}{dw} =$$
$$- \frac{1}{dw} \cdot d\left(\delta u^2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot \cos(m + w)^4\right)$$

und somit geht Gleichung XXI über in

$$\text{XXII)}\quad \delta^2 U = (\sin(\alpha + m)) \cdot \delta^2 u_\alpha + \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \frac{1 + tg(\alpha + m)^2}{n + tg(\alpha + m)} \cdot \cos(\alpha + m)^4 \cdot \delta u_\alpha^2$$
$$- (\sin(a + m)) \cdot \delta^2 u_a - \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \frac{1 + tg(a + m)^2}{n + tg(a + m)} \cdot \cos(a + m)^4 \cdot \delta u_a^2$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{E^2}} \cdot \int_a^\alpha \Bigg[\cos(m + w)^2 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} \cdot \cos(m + w) - \delta u \cdot \sin(m + w)\right)^2$$
$$- \frac{1}{dw} \cdot d\left(\delta u^2 \cdot \frac{1 + tg(m + w)^2}{n + tg(m + w)} \cdot \cos(m + w)^4\right)\Bigg] \cdot dw$$

Derjenige unter dem Integralzeichen befindliche Theilsatz, welcher ein vollständiges Differential ist, lässt sich ohneweiters integriren; und thut man dieses, so reducirt sich Gleichung XXII gradezu auf IX, wo der Constante n nicht weiter vorkommt. Da nun Gleichung XXII und XX ganz die nemlichen sind, so ist vollkommen erwiesen, dass der willkürliche Werth des Constanten n keinen Einfluss hat auf den Werth des $\delta^2 U$.

Was nun auch für Umstände eintreten mögen, so kann man doch immer dem n einen solchen Werth beilegen, dass in XX die ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze alle wegfallen; und somit ist erwiesen, dass $\delta^2 U$ unter allen Umständen positiv bleibt.

Erster Fall. Sind zwei feste Punkte, der eine durch $w = a$ und $u_a = b$, und der andere durch $w = \alpha$ und $u_\alpha = \beta$ gegeben; so ist $\delta u_a = 0$, $\delta u_\alpha = 0$, $\delta^2 u_a = 0$, $d^2 u_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst weg, und die Constanten bestimmen sich durch

$$1)\quad E \cdot \sec(a + m) = b, \qquad \text{und } 2)\quad E \cdot \sec(\alpha + m) = \beta$$

Digitized by Google

oder durch

$$3)\quad b \cdot \cos(a + m) = E, \qquad \text{und } 4)\quad \beta \cdot \cos(\alpha + m) = E$$

Zweiter Fall. Ist nur ein fester Punkt gegeben durch $w = a$ und $u_a = b$, und hat man für den andern Punkt wohl $w = \alpha$, aber für u_α keinen bestimmten Werth; so ist von dem Leitstrale der zweiten Gränze nur dessen Richtung, nicht aber dessen Länge gegeben. Es ist also wohl $\delta u_a = 0$, $\delta^2 u_a = 0$, etc., dagegen δu_α, $\delta^2 u_\alpha$, etc. sind alle willkürlich. Die Gränzengleichung VIII reducirt sich also auf $\sin(\alpha + m) = 0$. Daraus folgt $\alpha + m = \mathfrak{a} \cdot \pi$, oder $m = \mathfrak{a} \cdot \pi - \alpha$, wo $\mathfrak{a}$ entweder Null oder irgend eine positive ganze Zahl bedeutet. Diesen für m gefundenen Werth führe man in die Gleichungen 3 und 4 ein, und man bekommt bezüglich

$$\left\{\begin{array}{l} 5)\quad b \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \pi + a - \alpha) = E \\ \text{oder} \\ 6)\quad b \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \pi) \cdot \cos(\alpha - a) = E \end{array}\right\}, \text{ und } 7)\quad \beta \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \pi) = E$$

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen ineinander, so gibt sich

$$\frac{\beta \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \pi)}{b \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \pi) \cdot \cos(\alpha - a)} = \frac{E}{E}, \text{ oder } \frac{\beta}{b \cdot \cos(\alpha - a)} = 1, \text{ oder } \frac{\beta}{b} = \cos(\alpha - a);$$

und daraus folgt, dass die gesuchte Grade auf dem Leitstrale der zweiten Gränze senkrecht steht.

Dritter Fall. Sind zwar $w = a$ und $w = \alpha$ gegeben, aber weder der Werth des $u_a = b$ noch des $u_\alpha = \beta$; so sind (man sehe § 92) die Elemente δu_a und δu_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Ebenso verhält es sich zwischen $\delta^2 u_a$ und $\delta^2 u_\alpha$, etc. Die Gränzengleichung VIII zerfällt also in folgende zwei:

$$8)\quad \sin(\alpha + m) = 0, \qquad \text{und } 9)\quad \sin(a + m) = 0$$

Daraus folgt $\alpha + m = \mathfrak{a} \cdot \pi$, und $a + m = \mathfrak{b} \cdot \pi$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nach Belieben entweder Null oder irgend eine positive ganze Zahl bedeuten. Subtrahirt man aber die beiden letzten Gleichungen, so gibt sich $\alpha - a = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \cdot \pi$; und diese Gleichung zeigt an, dass die zu den beiden Gränzen gehörigen Leitstralen entweder ineinander fallen, oder dass der eine die Verlängerung des andern ist. Beides ist der Voraussetzung entgegen, weil a und α nach Belieben sollen gewählt werden können, mit der Berücksichtigung aber, dass $\alpha > a$. Also kann dieser dritte Fall nicht weiter beachtet werden.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi etc. Seite 134 und 135). Sie ist aber daselbst nur ausgeführt bis zu der hier mit III bezeichneten Gleichung. Alles Weitere ist von mir hinzugefügt, wobei namentlich die Umformung des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes zu beachten ist; Umformungen, welche, so nöthig sie auch sind, doch noch Niemand ausgeführt hat.

Aufgabe 160.

Man sucht in einer Ebene die kürzeste Entfernung von der zu $x = a$ gehörigen Ordinate bis zu der durch die Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen Curve.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass sowohl die zur Abscisse $x = a$ gehörige Ordinate als auch die durch $f(\alpha, \beta) = 0$ gegebene Gränzcurve, sowie die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der Gränzcurve $f(\alpha, \beta) = 0$ sich endigende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (entweder in dem noch zu ermittelnden Punkte, oder in den ihm nächstgelegenen übrigens nur in der Gränzcurve befindlichen Nachbarpunkten, sich endigenden) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt also für y eine solche Function, und für α einen solchen Werth, dass der Ausdruck

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Durch gemischtes Mutiren, wobei diesmal a als constant behandelt werden muss, bekommt man

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\sqrt{1 + p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \int_a^\alpha \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

Wenn man die gewöhnliche Umformung ausführt, so bekommt man für die zweite Form

$$\text{III)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + \left(\sqrt{1 + p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Die dieser zweiten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ entsprechende Form des ${}_{(}\delta_{)}^2U$ ist nun folgende:

$$\text{IV)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + 2 \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$
$$+ \left(\frac{d\sqrt{1 + p^2}}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + \left(\sqrt{1 + p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta^2 y\right] \cdot dx$$

Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. In dieser Form kommt die Mutation der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinate nicht vor. Da aber die Aufgabe vorschreibt, dass die gesuchte Linie sich in der gegebenen Gränzcurve endigen soll, also die Gränzordinate der gesuchten Linie auch zugleich eine Ordinate der Gränzcurve sein muss; so müssen durchaus die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinaten verglichen werden mit den Werthänderungen der zur gegebenen Gränzcurve gehörigen Ordinaten. Dazu bietet aber die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ nicht die Mittel, sie kann also nicht weiter beachtet werden.

Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. Diese Form zerlegt sich in die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + \left(\sqrt{1 + p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha = 0$$

Aus V folgt durch Integration

$$\text{VII)}\quad y = A \cdot x + B$$

d. h. die Gleichung einer graden Linie, wie zu erwarten war. Nun ist

$$\frac{d\sqrt{1 + p^2}}{dx} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

und weil aus Gleichung VII folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, so ist auch

$$\text{VIII)}\quad \frac{d\sqrt{1 + p^2}}{dx} = 0$$

Setzt man nun A statt p, und berücksichtigt man die Gleichungen V und VIII, so geht VI über in

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha - A \cdot \delta y_a + (1 + A^2) \cdot \vartheta\alpha] = 0$$

Digitized by Google

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ auch hätte weglassen können. Gleichung IV geht über in

$$\text{X)}\quad \delta_t^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \cdot \left[A \cdot \delta^2 y_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a + (1+A^2) \cdot \vartheta^2\alpha + 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha\right]$$

Nun ist man so weit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b) bis zu einer durch die Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen Curve; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Die Gränzengleichung IX, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ weglässt, reducirt sich also auf

$$\text{XI)}\quad A \cdot \delta y_\alpha + (1+A^2) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

Da die gegebene Gränzcurve von der gesuchten Graden geschnitten wird, so muss bei diesem Durchschnittspunkte

$$1)\quad y_\alpha = \beta$$

sein; und man kann diesen ersten Fall von hier an auf zweierlei Weise durchführen, je nachdem man bei der Gränzcurve $f(\alpha, \beta) = 0$ entweder die Abscisse α oder die Ordinate β als das dem Werthe nach unabhängige Element behandelt.

Erste Auflösung. Nimmt man die zur Gränzcurve gehörige Abscisse α als das dem Werthe nach willkürliche, und die Ordinate β als das dem Werthe nach abhängige Element; so muss man β aus der Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ absondern, so dass man $\beta = \chi(\alpha)$ bekommt. Statt der Gleichung $y_\alpha = \beta$ muss man also setzen

$$2)\quad y_\alpha = \chi(\alpha)$$

oder vielmehr

$$3)\quad A \cdot \alpha + B = \chi(\alpha)$$

Man erkennt aber, dass sich aus dieser Gleichung nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des α ergeben, dass also letztere Gleichung keine identische ist. Will man daher dem α einen Werth $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welcher der Gleichung 3 nicht entspricht; so muss man an die Stelle des y auch eine andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 2 einsetzen, d. h. man muss Gleichung 2 einer gemischten Mutation unterwerfen, wie bereits (man sehe Bd. I. S. 332 bis 338, besonders aber 336 und 337) hinlänglich erläutert ist.

Unterwirft man Gleichung 2 wirklich einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$4)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = \frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

$$5)\quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 = \frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\chi(\alpha)}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2$$

etc. etc.

Weil aber $y = A \cdot x + B$, so ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, etc.; es ist also auch im Besondern $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. Ferner ist $\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{d^2\chi(\alpha)}{d\alpha^2}$, etc. bezüglich gleich zu achten mit $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, etc. Die Gleichungen 4 und 5 gehen also über in

$$6)\quad \delta y_\alpha + A \cdot \vartheta\alpha = \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

Digitized by Google

$$7)\quad \delta^2 y_\alpha + 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + A\cdot\vartheta^2\alpha = \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2$$

etc. etc.

Daraus folgt

$$8)\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta\alpha$$

$$9)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

etc. etc.

Durch Gleichung 8 ist bestimmt, wie der Werth des δy_α von dem willkürlichen Werthe des $\vartheta\alpha$ abhangt. Und so fort. (Ausführliche Erläuterung findet man Bd. I, S. 161, etc.) Eliminirt man δy_α aus XI, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad \left(1 + A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ folgt aus dieser Gleichung

$$\text{XIII)}\quad 1 + A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Jetzt eliminire man $\delta^2 y_\alpha$ aus X, und berücksichtige Gleichung XIII, sowie die Gleichungen $\delta y_a = 0$. $\delta^2 y_a = 0$, etc. Dadurch reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\left[A\cdot\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{1}{1+A^2}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx\right]$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; dagegen der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Nun sind a und b gegeben. Die vier Stücke A, B, α, β können also durch die vier Gleichungen $b = A\cdot a + B$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $f(\alpha,\beta) = 0$, und $1 + A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ bestimmt werden.

Was Gleichung XIII anbelangt, so bemerke man, dass $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = A$ die goniometrische Tangente des Winkels ist, welcher von der gesuchten Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen wird. Ebenso ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der die Gränzcurve $f(\alpha,\beta) = 0$ im gesuchten Punkte (α,β) berührenden Graden und der Abscissenaxe eingeschlossen wird. Diese beiden Graden selbst durchschneiden sich unter einem Winkel, dessen Cosinus

$$= \frac{1 + A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}}{(\sqrt{1+A^2})\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\right)}$$

Da nun nach Gleichung XIII der Zähler dieses Bruches Null ist, so schneiden sich diese beiden Graden unter einem rechten Winkel, d. h. die absolut kürzeste Entfernung steht auf der gegebenen Gränzcurve senkrecht, oder, was dasselbe ist, die absolut kürzeste Entfernung und die betreffende Normale der Gränzcurve liegen in einer und derselben graden Linie. Man hat also ein bequemes Mittel, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren.

Zusatz 1. Die theoretische Durchführung dieser ersten Auflösung hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$. Es ist also ganz einerlei, ob die Gränzcurve durch die Gleichung $f(\alpha,\beta) = 0$ oder durch $\beta = \chi(\alpha)$ gegeben ist; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor β absondert. (Man vergleiche Zusatz 3 dieser Aufgabe.)

1) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b) bis zu der durch die Gleichung

Digitized by Google

$$10)\quad \beta = E \cdot \alpha + F$$

gegebenen Graden; so ist jetzt $\frac{d\beta}{d\alpha} = E$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, etc. Gleichung XIV reducirt sich also jetzt auf

$$XV)\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = -\frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 2. Dass dieser für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die Gränzcurve diesmal eine grade Linie ist, zusammenhangt. Aus Gleichung 10 folgt nemlich $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$; und so fällt der mit $\vartheta\alpha^2$ versehene Theilsatz aus XIV hinweg. Der in XV für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ hergestellte Ausdruck liefert aber dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann. Von der gesuchten Graden kann nemlich die gegebene Grade nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, welches im festen Punkte (a, b) anfängt, und in der gegebenen Graden aufhört. Sowie nun von unserer Figur nur ein einziges Stück der gesuchten Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können: eben so wenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein. (Man vergleiche noch Zusatz 8.)

2) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b) bis zu einer durch die Gleichung

$$11)\quad (E-\alpha)^2 + (F-\beta)^2 = R^2$$

gegebenen Kreislinie; so gibt sich durch Differentiation

$$12)\quad (E-\alpha)\cdot d\alpha + (F-\beta)\cdot d\beta = 0$$
$$13)\quad -d\alpha^2 - d\beta^2 + (F-\beta)\cdot d^2\beta = 0$$

Da nun $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{E-\alpha}{F-\beta}$ ist, so geht Gleichung XIII über in

$$14)\quad F-\beta = A\cdot(E-\alpha)$$

Gleichung 11 geht also über in $(E-\alpha)^2\cdot(1+A^2) = R^2$; und daraus folgt

$$15)\quad \alpha = E \mp \frac{R}{\sqrt{1+A^2}}$$

Es gibt also zwei Punkte der Kreislinie, welche zugleich der gesuchten Graden angehören, so dass es zwei verschiedene Stücke der gesuchten Graden gibt, welche noch einer nähern Betrachtung unterworfen werden müssen.

Zieht man vom festen Punkte (a, b) eine Grade durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist diese die gesuchte Linie, und sie steht in ihren beiden Durchschnittspunkten senkrecht auf der Kreislinie.

Aus XIII folgt $d\beta = -\frac{d\alpha}{A}$; und so geht Gleichung 13 über in

$$-d\alpha^2 - \frac{d\alpha^2}{A^2} + A\cdot(E-\alpha)\cdot\delta^2\beta = 0$$

Daraus folgt

$$16)\quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{1+A^2}{A^3\cdot(E-\alpha)}$$

und Gleichung XIV geht über in

$$XVI)\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{\sqrt{1+A^2}}{A^2\cdot(E-\alpha)}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten hat dasselbe Zeichen, wie $(E-\alpha)$; er ist positiv, wenn $\alpha < E$, er ist negativ, wenn $\alpha > E$.

a) Ist $\alpha < E$, d. h. nimmt man das Stück der gesuchten Graden, welches vom festen Punkte (a, b) bis zum ersten in der Kreislinie befindlichen Durchschnittspunkte erstreckt ist; so ist sowohl der mit dem Mutationscoefficienten als auch der mit dem

Digitized by Google

Differenzcoefficienten versehene Theilsatz positiv. Dabei findet ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

B) Ist $\alpha > E$, d. h. nimmt man das Stück der gesuchten Graden, welches vom festen Punkte (a, b) bis zum zweiten in der Kreislinie gelegenen Durchschnittspunkte erstreckt ist; so ist der mit dem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz noch immer positiv, dagegen der mit dem Differenzcoefficienten versehene Theilsatz ist negativ. Es findet also wohl ein Minimum-stand, dagegen in secundärer Beziehung findet ein Grösstes statt, d. h. man hat jetzt den Maximumwerth eines Minimum-standes, welcher Zustand jedoch in der Aufgabe nicht verlangt wird, also auch nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

Zweite Auflösung. Nimmt man die zur Gränzcurve gehörige Ordinate β als das dem Werthe nach willkürliche, und die Abscisse α als das dem Werthe nach abhängige Element an; so muss man α aus der Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ absondern, so dass man

$$17) \quad \alpha = F(\beta)$$

bekommt. Die zum Durchschnittspunkte der gesuchten Graden und der gegebenen Gränzcurve gehörige Gleichung

$$18) \quad y_\alpha = \beta$$

oder vielmehr

$$19) \quad A \cdot \alpha + B = \beta$$

geht jetzt über in

$$20) \quad A \cdot F(\beta) + B = \beta$$

Man erkennt aber, dass sich aus dieser Gleichung nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des β ergibt, dass also letztere Gleichung keine identische ist. Hat man nun aus Gleichung 20 die Werthe des β ermittelt, so ergibt sich der entsprechende Werth des α jedesmal durch $\alpha = F(\beta)$. Will man aber dem β andere Werthe $(\beta + D\beta)$ beilegen, welche der Gleichung 20 nicht entsprechen; so muss man an die Stelle des y auch andere Functionen $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 18 einsetzen, d. h. man muss Gleichung 18 einer gemischten Mutation unterwerfen. Dadurch bekommt man

$$21) \quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\beta$$

$$22) \quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha = \vartheta^2\beta$$

etc. etc.

Aus der für die Gränzcurve gegebenen Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ folgt

$$23) \quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

$$24) \quad \vartheta^2\alpha \quad \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2$$

etc. etc.

Nun ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, etc.; es ist also auch im Besondern $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. etc. Aus 21 und 23 folgt also

$$25) \quad \delta y_\alpha = \left(1 - A \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta$$

und aus 22 und 24 folgt

$$26) \quad \delta^2 y_\alpha = \left(1 - A \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta^2\beta - A \cdot \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 - 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung XI geht also jetzt über in

$$\text{XVII)} \quad \left(A + \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ folgt aus dieser Gleichung

Digitized by Google

$$\text{XVIII)}\quad A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Nun eliminire man $\delta^2 y_\alpha$ aus X, und berücksichtige Gleichung XVIII, sowie die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Dadurch reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XIX)}\quad \delta_i^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass ein Minimum-stand stattfindet; dagegen der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Nun ist a und b gegeben. Die vier Stücke α, β, A, B können also durch die vier Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f(\alpha, \beta) = 0$, $A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$ bestimmt werden.

Was Gleichung XVIII anbelangt, so bemerke man, dass die Gleichung der zur Gränzcurve gehörigen Normallinie bekanntlich folgende ist

$$27)\quad \beta'' - \beta + (\alpha'' - \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

wo α'' und β'' die veränderlichen Coordinaten der zum gesuchten Punkte (α, β) gehörigen Normallinie sind. Wenn man die Gleichungen $\beta = A \cdot \alpha + B$ und $y = A \cdot x + B$ voneinander subtrahirt, so bekommt man

$$28)\quad y - \beta = A \cdot (x - \alpha)$$

Da nun aus Gleichung XVIII folgt, dass $A = -\frac{d\alpha}{d\beta}$; so geht Gleichung 28 über in

$$29)\quad y - \beta + (x - \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Man sieht also, dass zur Normale der gegebenen Gränzcurve dieselbe Gleichung gehört, wie zur gesuchten Graden, d. h. die absolut kürzeste Entfernung und die betreffende Normale der Gränzcurve liegen in einer und derselben graden Linie, oder, was dasselbe ist, die absolut kürzeste Entfernung steht auf der gegebenen Gränzcurve senkrecht. Man hat also ein bequemes Mittel, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren. Somit ist Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Zusatz 3. Die theoretische Durchführung dieser zweiten Auflösung hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{d\beta}$ und $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}$. Es ist also auch hier ganz einerlei, ob die Gränzcurve durch die Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ oder durch $\alpha = F(\beta)$ gegeben ist; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor α absondert. (Man vergleiche Zusatz 1 dieser Aufgabe.)

1) Sucht man wieder die absolut kürzeste Entfernung vom festen Punkte (a, b) bis zu der durch die Gleichung

$$30)\quad \beta = E \cdot \alpha + F$$

gegebenen Graden; so ist $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{E}$, $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$, etc. Gleichung XIX reducirt sich also auf

$$\text{XX)}\quad \delta_i^2 U = - \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 4. Dieser Ausdruck enthält keinen Differenzcoefficienten, welche Erscheinung mit dem Umstande, dass die Gränzcurve diesmal eine grade Linie ist, zusammenhangt. Aus Gleichung 30 folgt nemlich $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$; und somit fällt der mit $\vartheta\beta^2$ versehene Theilsatz aus XIX weg. Die nähere Erläuterung ist bereits (Zusatz 2) gegeben.

2) Sucht man aber wieder die absolut kürzeste Entfernung vom festen Punkte (a, b) bis zu der durch die Gleichung

$$31)\quad (E - \alpha)^2 + (F - \beta)^2 = R^2$$

Digitized by Google

Differenzcoefficienten versehene Theilsatz positiv. Dabei findet ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

B) Ist $\alpha > E$, d. h. nimmt man das Stück der gesuchten Graden, welches vom festen Punkte (a, b) bis zum zweiten in der Kreislinie gelegenen Durchschnittspunkte erstreckt ist; so ist der mit dem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz noch immer positiv, dagegen der mit dem Differenzcoefficienten versehene Theilsatz ist negativ. Es findet also wohl ein Minimum-stand, dagegen in secundärer Beziehung findet ein Grösstes statt, d. h. man hat jetzt den Maximumwerth eines Minimum-standes, welcher Zustand jedoch in der Aufgabe nicht verlangt wird, also auch nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

Zweite Auflösung. Nimmt man die zur Gränzcurve gehörige Ordinate β als das dem Werthe nach willkürliche, und die Abscisse α als das dem Werthe nach abhängige Element an; so muss man α aus der Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ absondern, so dass man

$$17)\quad \alpha = F(\beta)$$

bekommt. Die zum Durchschnittspunkte der gesuchten Graden und der gegebenen Gränzcurve gehörige Gleichung

$$18)\quad y_\alpha = \beta$$

oder vielmehr

$$19)\quad A \cdot \alpha + B = \beta$$

geht jetzt über in

$$20)\quad A \cdot F(\beta) + B = \beta$$

Man erkennt aber, dass sich aus dieser Gleichung nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des β ergibt, dass also letztere Gleichung keine identische ist. Hat man nun aus Gleichung 20 die Werthe des β ermittelt, so ergibt sich der entsprechende Werth des α jedesmal durch $\alpha = F(\beta)$. Will man aber dem β andere Werthe $(\beta + D\beta)$ beilegen, welche der Gleichung 20 nicht entsprechen; so muss man an die Stelle des y auch andere Functionen $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 18 einsetzen, d. h. man muss Gleichung 18 einer gemischten Mutation unterwerfen. Dadurch bekommt man

$$21)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\beta$$

$$22)\quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha = \vartheta^2\beta$$

etc. etc.

Aus der für die Gränzcurve gegebenen Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ folgt

$$23)\quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

$$24)\quad \vartheta^2\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2$$

etc. etc.

Nun ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, etc.; es ist also auch im Besondern $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. etc. Aus 21 und 23 folgt also

$$25)\quad \delta y_\alpha = \left(1 - A \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta$$

und aus 22 und 24 folgt

$$26)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(1 - A \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta^2\beta - A \cdot \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 - 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung XI geht also jetzt über in

$$XVII)\quad \left(A + \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ folgt aus dieser Gleichung

Digitized by Google

$$\text{XVIII)} \quad A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Nun eliminire man $\delta^2 y_\alpha$ aus X, und berücksichtige Gleichung XVIII, sowie die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Dadurch reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XIX)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass ein Minimum-stand stattfindet; dagegen der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Nun ist a und b gegeben. Die vier Stücke α, β, A, B können also durch die vier Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f(\alpha, \beta) = 0$, $A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$ bestimmt werden.

Was Gleichung XVIII anbelangt, so bemerke man, dass die Gleichung der zur Gränzcurve gehörigen Normallinie bekanntlich folgende ist

$$27) \quad \beta'' - \beta + (\alpha'' - \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

wo α'' und β'' die veränderlichen Coordinaten der zum gesuchten Punkte (α, β) gehörigen Normallinie sind. Wenn man die Gleichungen $\beta = A \cdot \alpha + B$ und $y = A \cdot x + B$ voneinander subtrahirt, so bekommt man

$$28) \quad y - \beta = A \cdot (x - \alpha)$$

Da nun aus Gleichung XVIII folgt, dass $A = -\frac{d\alpha}{d\beta}$; so geht Gleichung 28 über in

$$29) \quad y - \beta + (x - \alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Man sieht also, dass zur Normale der gegebenen Gränzcurve dieselbe Gleichung gehört, wie zur gesuchten Graden, d. h. die absolut kürzeste Entfernung und die betreffende Normale der Gränzcurve liegen in einer und derselben graden Linie, oder, was dasselbe ist, die absolut kürzeste Entfernung steht auf der gegebenen Gränzcurve senkrecht. Man hat also ein bequemes Mittel, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren. Somit ist Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Zusatz 3. Die theoretische Durchführung dieser zweiten Auflösung hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{d\beta}$ und $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}$. Es ist also auch hier ganz einerlei, ob die Gränzcurve durch die Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ oder durch $\alpha = F(\beta)$ gegeben ist; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor α absondert. (Man vergleiche Zusatz 1 dieser Aufgabe.)

1) Sucht man wieder die absolut kürzeste Entfernung vom festen Punkte (a, b) bis zu der durch die Gleichung

$$30) \quad \beta = E \cdot \alpha + F$$

gegebenen Graden; so ist $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{E}$, $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$, etc. Gleichung XIX reducirt sich also auf

$$\text{XX)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 4. Dieser Ausdruck enthält keinen Differenzcoefficienten, welche Erscheinung mit dem Umstande, dass die Gränzcurve diesmal eine grade Linie ist, zusammenhangt. Aus Gleichung 30 folgt nemlich $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$; und somit fällt der mit $\vartheta\beta^2$ versehene Theilsatz aus XIX weg. Die nähere Erläuterung ist bereits (Zusatz 2) gegeben.

2) Sucht man aber wieder die absolut kürzeste Entfernung vom festen Punkte (a, b) bis zu der durch die Gleichung

$$31) \quad (E - \alpha)^2 + (F - \beta)^2 = R^2$$

Digitized by Google

gegebenen Kreislinie; so gibt sich durch Differentiation

$$32)\quad (E - \alpha)\cdot d\alpha + (F - \beta)\cdot d\beta = 0$$

$$33)\quad (E - \alpha)\cdot d^2\alpha - d\alpha^2 - d\beta^2 = 0$$

Da nun $\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{F-\beta}{E-\alpha}$ ist, so geht Gleichung XVIII über in

$$34)\quad F - \beta = A\cdot(E - \alpha)$$

Gleichung 31 geht also über in $(E - \alpha)^2\cdot(1 + A^2) = R^2$; und daraus folgt

$$35)\quad \alpha = E \mp \frac{R}{\sqrt{1 + A^2}}$$

welches wiederum die Gleichung 15 ist, und es gilt wieder die daselbst gemachte Bemerkung. Aus XVIII folgt $d\alpha = -A\cdot d\beta$; und so geht Gleichung 33 über in

$$(E - \alpha)\cdot d^2\alpha - (1 + A^2)\cdot d\beta^2 = 0$$

Daraus folgt

$$36)\quad \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = \frac{1 + A^2}{E - \alpha}$$

und Gleichung XIX geht über in

$$XXI)\quad \vartheta_i^2 U = \frac{\sqrt{1 + A^2}}{E - \alpha}\cdot\vartheta\beta^2 + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Hier hat man wieder, wie beim Ausdrucke XVI, die zwei Fälle zu unterscheiden, ob $\alpha < E$, oder ob $\alpha > E$.

Zusatz 5. Aus Gleichung 23 folgt $\vartheta\beta = \frac{1}{\frac{d\alpha}{d\beta}}\cdot\vartheta\alpha$; und aus Gleichung XVIII folgt $\frac{d\alpha}{d\beta} = -A$. Somit hat man $\vartheta\beta = -\frac{1}{A}\cdot\vartheta\alpha$. Eliminirt man $\vartheta\beta$ aus XXI, so bekommt man wieder den Ausdruck XVI.

Zweiter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei nicht fest, es sei nur gesagt, dass er in der zur Abscisse $x = a$ gehörigen senkrechten Ordinate liege; und man sucht die absolut kürzeste Entfernung von dieser Ordinate bis zu der gegebenen Gränzcurve.

Jetzt sind die Elemente δy_a, $\delta^2 y_a$, etc. dem Werthe nach willkürlich, und durchaus von nichts abhängig. Es kann also δy_a nur dadurch aus Gleichung IX wegfallen, dass sein Coefficient zu Null wird, d. h. dass man

$$37)\quad A = 0$$

setzt. Dabei reducirt sich Gleichung IX auf

$$38)\quad \vartheta\alpha = 0$$

woran man erkennt, dass in diesem zweiten Falle der Differenzcoefficient $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf. Aus der für die Gränzcurve gegebenen Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ folgt aber $\vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta$, so dass Gleichung 38 übergeht in

$$39)\quad \frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta = 0$$

Daraus aber kann, wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$, nur folgen

$$40)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Weil $A = 0$, so reducirt sich die Gleichung der gesuchten Curve auf

$$41)\quad y = B$$

d. h. die gesuchte Grade läuft mit der Abscissenaxe parallel. Die Gleichung $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$

Digitized by Google

zeigt an, dass die den gesuchten Punkt (α, β) der gegebenen Gränzcurve berührende Grade mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Somit steht auch diesmal unsere absolut kürzeste Entfernung auf der Gränzcurve senkrecht.

Weil $y = B$; so ist $B = b = \beta$. Nun ist a schon von Anfange her gegeben. Die vier Stücke b, α, β, B bestimmen sich also aus den vier Gleichungen $B = b$, $B = \beta$, $f(\alpha, \beta) = 0$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$.

Weil $A = 0$, so reducirt sich Gleichung X zunächst auf

$$\text{XXII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = \vartheta^2\alpha + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Nun ist im Allgemeinen $\vartheta^2\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2$, welcher Ausdruck sich aber (wegen 40) diesmal auf $\vartheta^2\alpha = \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2$ reducirt, so dass XXII übergeht in

$$\text{XXIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 6. Folgende Unterscheidungen sind beachtenswerth:

𝔄) Wenn die zur Abscisse a gehörige Ordinate von der Gränzcurve nur berührt, aber niemals geschnitten wird; so ist ihre absolut kürzeste Entfernung gleich Null. Dasselbe gilt, wenn die Gränzcurve eine grade Linie ist und in die zur Abscisse a gehörige Ordinate hineinfällt. In solchen Fällen ist die Differenz $\alpha - a = 0$.

𝔅) Wenn aber die zur Abscisse a gehörige Ordinate von der Gränzcurve geschnitten wird; so kann

a) von einer absolut kürzesten Entfernung derselben keine Rede sein. Würde aber eine solche (eine absolut kürzeste Entfernung nemlich) dennoch gefordert werden, so müsste sich die Unstatthaftigkeit der Forderung jedesmal durch eine Erscheinung des Calculs offenbaren.

b) Ganz anders verhält es sich bei einer relativ kürzesten Entfernung, d. h. bei einer Entfernung, welche unter allen denen, die einer oder mehreren gemeinschaftlichen Bedingungen genügen, die kürzeste ist. Die Forderung einer solchen kürzesten Entfernung wird in der Regel statthaft sein, auch wenn die zur Abscisse a gehörige Ordinate von der Gränzlinie geschnitten wird; und sollte sie einmal unstatthaft sein, so wird es der Calcul ohneweiters anzeigen.

(Hier sollen einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.)

Dritter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest. Man sucht auch nicht die absolut kürzeste Entfernung von der zur Abscisse a gehörigen Ordinate bis zu der gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Differenz der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$42)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 43)\quad y_\alpha - y_a = K$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 43 einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man bekommt also

$$44)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a = 0$$

$$45)\quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha - \delta^2 y_a = 0$$

etc. etc.

Nun ist $\delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right) \cdot \vartheta\alpha$; und somit folgt aus 44, dass $\delta y_a = + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$. Eliminirt man jetzt δy_a und δy_α aus IX, so bleibt nur

Digitized by Google

$$46)\quad \vartheta\alpha = 0$$

Man sieht also, dass $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf. Letztere Gleichung ist aber (wie aus vorigem Falle erhellet) gleichbedeutend mit

$$47)\quad \frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta = 0$$

Daraus kann aber, wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$, nur folgen

$$48)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Setzt man $A\cdot x + B$ an die Stelle des y in 43 ein, so gibt sich $A\cdot(\alpha - a) = K$. Es ist also $A = \frac{K}{\alpha - a}$; und für die gesuchte Linie hat man folgende Gleichung

$$49)\quad y = \frac{K}{\alpha - a}\cdot x + B$$

wo nur noch B ein unbestimmter Constanter ist.

Nun ist a gegeben. Die fünf Stücke b, α, β, A, B bestimmen sich also durch die fünf Gleichungen $b = A\cdot a + B$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $A\cdot(\alpha - a) = K$, $f(\alpha,\beta) = 0$, $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$.

Eliminirt man $\delta^2 y_a$ aus X, so gibt sich zunächst

$$(\delta)^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

welcher Ausdruck (nach dem Vorgange des vorigen Falles) übergeht in

$$\text{XXIV)}\quad (\delta)^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Zusatz 7. Die Gleichungen 38 und 46 des zweiten und dritten Falles sind sehr merkwürdig; denn durch sie sind Beispiele geliefert, dass es oft erst im Verlaufe der Untersuchung sich zeigen kann, welche Elemente man als abhängig nehmen muss, d. h. dass es Fälle geben kann, wo wir nicht schon im Voraus sagen dürfen, dieses Element wollen wir als abhängig, und jenes wollen wir als unabhängig behandeln. Man hat also hiermit eine thatsächliche Rechfertigung für mein Verfahren, nach welchem ich für die Werthänderungen aller nichtmutablen Veränderlichen, sie mögen abhängig oder unabhängig sein, unaufhörliche Reihen setze. Ist die Untersuchung bis auf einen gewissen Punkt gediehen, dann kann man noch immer entscheiden, bei welcher Werthänderung das erste Glied der Reihe genügt, und bei welcher Werthänderung auch noch höhere Glieder der Reihe nöthig sind. (Man vergleiche Bd. I. Seite 117; ebenso Zusatz 3 in Aufgabe 176, und Zusatz 4 in Aufgabe 178.)

Vierter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von der zur Abscisse a gehörigen Ordinate bis zu der gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Summe der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$50)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 51)\quad y_a + y_\alpha = K$$

gelten, die kürzeste sucht, die von besagter Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 51 einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man bekommt also

$$52)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + \delta y_a = 0$$

$$53)\quad \delta^2 y_\alpha + 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \delta^2 y_a = 0$$

etc. etc.

Digitized by Google

Nun ist $\delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta\alpha$; und somit folgt aus 52, dass $\delta y_a = -\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$ ist. Eliminirt man δy_α und δy_a aus IX, so bekommt man

$$54)\quad \left(1 + 2A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ weggelassen hat. Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ folgt aus 54, dass

$$55)\quad 1 + 2A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

sein muss. Führt man $Ax + B$ an die Stelle des y in 51 ein, so bekommt man $A\cdot(\alpha + a) + 2B = K$.

Nun ist a gegeben. Die fünf Stücke b, α, β, A, B bestimmen sich also durch die fünf Gleichungen $b = A\cdot a + B$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $A\cdot(\alpha + a) + 2B = K$, $f(\alpha,\beta) = 0$, $1 + 2A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$.

Mittelst Gleichung 9 und 53 ergibt sich, dass $\delta^2 y_a = -\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha - \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2$ ist. Eliminirt man jetzt $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$ aus X, und beachtet man Gleichung 55; so bleibt

$$XXV)\quad \delta^2 U = \frac{2A}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Fünfter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von der zur Abscisse a gehörigen Ordinate bis zu der gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen deren, bei welchen das Product der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$56)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 57)\quad y_a\cdot y_\alpha = K$$

gelten, die kürzeste sucht, die von besagter Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 57 einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man bekommt also

$$58)\quad y_\alpha\cdot\delta y_a + y_a\cdot\delta y_\alpha + y_a\cdot\frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha = 0$$

Eliminirt man hieraus das δy_α, so bekommt man

$$59)\quad y_\alpha\cdot\delta y_a + y_a\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha = 0$$

oder, wenn man $(Ax + B)$ statt y einsetzt

$$60)\quad (A\cdot\alpha + B)\cdot\delta y_a + (A\cdot a + B)\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha = 0$$

durch welche Gleichung die Abhängigkeit des δy_a von $\vartheta\alpha$ dargestellt ist. Eliminirt man jetzt δy_a und δy_α aus IX, so bekommt man, wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$, folgende Gleichung

$$61)\quad A\cdot[A\cdot(\alpha + a) + 2B]\cdot\frac{d\beta}{d\alpha} + (A\cdot\alpha + B) = 0$$

Gleichung 57 geht jetzt über in

$$62)\quad (A\cdot\alpha + B)\cdot(A\cdot a + B) = K$$

Nun ist a gegeben. Die fünf Stücke b, α, β, A, B bestimmen sich also durch die Gleichungen 61 und 62, verbunden mit $b = A\cdot a + B$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $f(\alpha,\beta) = 0$.

Digitized by Google

Man unterwerfe jetzt Gleichung 58 einer zweiten gemischten Mutation, und eliminire δy_α und $\delta^2 y_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 8 und 9 geschieht; so wird sich, wenn man noch $(A \cdot x + B)$ statt y einsetzt, ergeben

$$63)\quad (A\alpha + B) \cdot \delta^2 y_a + 2 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \delta y_a \cdot \vartheta\alpha + (A \cdot a + B) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2\right) = 0$$

Um das Prüfungsmittel herzustellen, hat man $\delta^2 y_\alpha$ und $\delta^2 y_a$ aus X zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen 9, 60 und 63 geschieht.

Sechster Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von der zur Abscisse a gehörigen Ordinate bis zu der gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der beiden Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) der Unterschied der beiden Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$64)\quad y_\alpha = \beta, \qquad 65)\quad y_a + y_\alpha = K, \qquad \text{und } 66)\quad y_\alpha - y_a = \mathfrak{K}$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man die Gleichungen 65 und 66 einer gemischten Mutation, wobei a constant ist; so bekommt man

$$67)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \delta y_a = 0, \quad \text{und } 68)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a = 0$$

Eliminirt man δy_α aus diesen beiden Gleichungen, so bekommt man

$$69)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \delta y_a = 0, \quad \text{und } 70)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a = 0$$

Unterwirft man die Gleichungen 67 und 68 einer zweiten gemischten Mutation, und eliminirt man dann $\delta^2 y_\alpha$; so bekommt man

$$71)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \delta^2 y_a = 0, \quad \text{und } 72)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - \delta^2 y_a = 0$$

Weil die Gleichungen 69 und 70 nebeneinander bestehen müssen, so muss $\vartheta\alpha = 0$ und $\delta y_a = 0$ sein. Ebenso folgt aus 71 und 72, dass $\vartheta^2\alpha = 0$ und $\delta^2 y_a = 0$ ist. Desshalb ist auch $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc., so dass die Mutationen der Gränzordinaten zu Null werden, während δy, $\delta^2 y$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg, und Gleichung X reducirt sich auf

$$\text{XXVI})\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Nun ist a gegeben. Die fünf Stücke b, α, β, A, B bestimmen sich also durch die fünf Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f(\alpha, \beta) = 0$, $A \cdot (\alpha + a) + 2B = K$, $A \cdot (\alpha - a) = \mathfrak{K}$.

Zusatz 8. Auch hier hat der für ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten. Der Grund davon ist aber der, dass wegen der Menge der Gränzbedingungen die Gränzordinaten gar keiner Mutation, weder einer reinen noch einer gemischten, unterworfen werden können. Die Menge der Gränzbedingungen ist also diesmal, dagegen früher (man sehe Zusatz 2) waren die Eigenthümlichkeiten der Gränzcurve die Ursache, dass Verschiedenheiten in secundärer Beziehung nicht stattfinden.

Siebenter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von der zur Abscisse a

Digitized by Google

gehörigen Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) Die Summe der beiden Gränzordinaten den bestimmt gegebenen Werth K,
2) Die Differenz der beiden Gränzordinaten den bestimmt gegebenen Werth $\mathfrak{K}$, und
3) Das Product der beiden Gränzordinaten den bestimmt gegebenen Werth $\mathfrak{H}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzordinaten die Gleichungen

73) $y_\alpha = \beta$, 74) $y_\alpha + y_a = K$, 75) $y_\alpha - y_a = \mathfrak{K}$, und 76) $y_a \cdot y_\alpha = \mathfrak{H}$

gelten, die kürzeste sucht, die von besagter Ordinate bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Man unterwerfe die Gleichungen 74, 75, 76 einer gemischten Mutation, und beachte, dass a constant ist. Man wird dann erkennen, dass $\vartheta\alpha = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\vartheta^2\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. ist, so dass abermals die Mutationen der Gränzordinaten zu Null werden, während δy, $\delta^2 y$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und für das Prüfungsmittel bekommt man wieder den Ausdruck XXVI.

Nun ist a gegeben; und zur Bestimmung der fünf Stücke b, α, β, A, B hat man jetzt sechs Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f(\alpha, \beta) = 0$, $A \cdot (\alpha + a) + 2B = K$, $A \cdot (\alpha - a) = \mathfrak{K}$, $(A \cdot \alpha + B) \cdot (A \cdot a + B) = \mathfrak{H}$, welche, weil eine zuviel ist, sich leicht widersprechen können; und so wird dieser siebente Fall in der Regel überbestimmt, d. h. unmöglich sein.

Schlussbemerkung. Aufgaben dieser Art konnten erst gelöst werden, nachdem Lagrange seinen Variationscalcul erfunden hatte. In der zweiundzwanzigsten Vorlesung seines Werkes „Leçons sur le Calcul des Fonctions" theilt er Beispiele mit; und in dem ersten derselben wird die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven verlangt. (Die nemliche Forderung wird in dem ersten Falle der nächsten Aufgabe gestellt werden.)

Ich löse dergleichen Aufgaben mittelst der (von mir sogenannten) gemischten Mutationen, habe also die betreffende Methode ganz umgestaltet. Es kann Jeder, der die nöthige Vergleichung anstellt, sich überzeugen, dass bei meiner Methode mehr Klarheit, Leichtigkeit und Eleganz erreicht wird, als bei der Methode des Lagrange, welchem, wie allen seinen Nachfolgern, die Idee der gemischten Mutationen fremd geblieben ist.

Ferner möge man noch unter den von mir gemachten Beiträgen folgende beachten:

1) Die Untersuchung der ersten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$.
2) Die eigenthümliche Durchführung des zweiten Falles.
3) Die verschiedenen Gränzfälle, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.
4) Die bei jedem einzelnen Gränzfalle befindliche Darstellung des für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ sich ergebenden Ausdruckes, welcher, obgleich er jedesmal einen grossen Theil der ganzen Untersuchung ausmacht, doch noch von Niemand dargestellt worden ist.

Aufgabe 161.

Man sucht die kürzeste Entfernung zwischen zwei in einer und derselben Ebene liegenden Curven, welche durch die Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegeben sind.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass sowohl die beiden Gränzcurven als auch die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der Gränzcurve $f'(a, b) = 0$ anfangende und in einem noch zu ermittelnden Punkte der Gränzcurve $f''(\alpha, \beta) = 0$ aufhörende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (entweder durch die noch zu er-

Digitized by Google

mittelnden oder durch die ihnen nächstgelegenen übrigens nur in den Gränzcurven befindlichen Nachbarpunkte begränzten) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt also für y eine solche Function und für a und α solche Werthe, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Bei dem jetzt nöthigen gemischten Mutiren müssen sowohl a als auch α Werthänderungen erleiden. Bei der ersten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ werden die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinaten nicht vorkommen. Diese Mutationen müssen aber, wie schon (in der Einleitung zur vorigen Aufgabe) auseinander gesetzt ist, der Untersuchung unterworfen werden. Man kann also die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ diesmal nicht beachten; und desshalb stelle man nur die zweite Form her, wie hier folgt:

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = -\int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta\alpha - (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a$$

und

$$\text{III)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta^2 y + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

$$+ \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta^2 a$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$

Soll ${}_{(}\delta_{)}U = 0$ werden, so zerlegt sich II in die Hauptgleichung

$$\text{IV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{V)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta\alpha - (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a = 0$$

Aus IV folgt

$$\text{VI)}\quad y = A \cdot x + B$$

d. h. die Gleichung einer graden Linie, wie zu erwarten war. Nun ist

$$\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

und weil aus Gleichung VI folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, so ist auch

$$\text{VII)}\quad \frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx} = 0$$

Setzt man A statt p, und berücksichtigt man die Gleichungen IV und VII; so geht V über in

$$\text{VIII)}\quad \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha - A \cdot \delta y_a + (1+A^2) \cdot \vartheta\alpha - (1+A^2) \cdot \vartheta a] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ auch hätte weglassen können; und Gleichung III geht über in

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx + \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \cdot \Big[A \cdot \delta^2 y_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ (1+A^2) \cdot \vartheta^2\alpha - (1+A^2) \cdot \vartheta^2 a + 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a \Big]$$

Nun ist man soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Man sucht die absolut kürzeste Entfernung zwischen den beiden durch die Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen Curven. Da die gesuchte Grade die beiden Gränzcurven schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittspunkten die Gleichungen

$$1)\ y_a = b, \qquad \text{und} \qquad 2)\ y_\alpha = \beta$$

stattfinden. Hier sind vier verschiedene Auflösungen möglich. Man kann nemlich

1) bei den beiden Gränzcurven $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ die Abscissen a und α als die dem Werthe nach willkürlichen, und die Ordinaten b und β als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandeln; oder man kann
2) bei den beiden Gränzcurven $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ die Ordinaten b und β als die dem Werthe nach willkürlichen, und die Abscissen a und α als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandeln; oder man kann
3) bei der Gränzcurve $f'(a, b) = 0$ die Abscisse a als das dem Werthe nach willkürliche, und die Ordinate b als das dem Werthe nach abhängige Element behandeln, während man bei der Gränzcurve $f''(\alpha, \beta) = 0$ die Ordinate β als das dem Werthe nach willkürliche und die Abscisse α als das dem Werthe nach abhängige Element behandelt; oder man kann
4) bei der Gränzcurve $f'(a, b) = 0$ die Ordinate b als das dem Werthe nach willkürliche und die Abscisse a als das dem Werthe nach abhängige Element behandeln, während man bei der Gränzcurve $f''(\alpha, \beta) = 0$ die Abscisse α als das dem Werthe nach willkürliche und die Ordinate β als das dem Werthe nach abhängige Element behandelt.

Erste Auflösung. Nimmt man die zu den Gränzcurven gehörigen Abscissen a und α als die dem Werthe nach willkürlichen, und die Ordinaten b und β als die dem Werthe nach abhängigen Elemente; so muss man b und β absondern, so dass man $b = \chi'(a)$ und $\beta = \chi''(\alpha)$ bekommt. Statt der Gleichungen $y_a = b$ und $y_\alpha = \beta$ muss man also setzen

$$3)\ y_a = \chi'(a), \qquad \text{und} \qquad 4)\ y_\alpha = \chi''(\alpha)$$

oder vielmehr

$$5)\ A \cdot a + B = \chi'(a), \qquad \text{und} \qquad 6)\ A \cdot \alpha + B = \chi''(\alpha)$$

Man erkennt aber, dass sich aus den zwei letzten Gleichungen nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des a und des α ergeben, dass also dieselben keine identischen Gleichungen sind. Will man daher dem a einen andern Werth $(a + Da)$ beilegen, welcher der Gleichung 5 nicht entspricht; so muss man an die Stelle des y eine andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 3 einsetzen, d. h. man muss Gleichung 3 einer gemischten Mutation unterwerfen. Will man ebenso dem α einen andern Werth $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welcher der Gleichung 6 nicht entspricht; so muss man an die Stelle des y dieselbe andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ auch in Gleichung 4 einsetzen, d. h. man muss auch Gleichung 4 derselben gemischten Mutation unterwerfen. Dieses ist bereits (man sehe Bd. I. Seite 332 bis 338, besonders Seite 336 und 337; ferner Bd. I. Seite 161, etc.) hinlänglich auseinandergesetzt.

Aus Gleichung 3 gibt sich

$$7)\ \delta y_a + \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = \frac{d\chi'(a)}{da} \cdot \vartheta a$$

$$8)\ \delta^2 y_a + 2 \cdot \frac{d\delta y_a}{da} \cdot \vartheta a + \frac{d^2 y_a}{da^2} \cdot \vartheta a^2 + \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta^2 a = \frac{d\chi'(a)}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2\chi'(a)}{da^2} \cdot \vartheta a^2$$

etc. etc.

Digitized by Google

Aus Gleichung 4 ergibt sich ebenso

$$9)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha = \frac{d\chi''(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

$$10)\quad \delta^2 y_\alpha + 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha = \frac{d\chi''(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\chi''(\alpha)}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2$$

etc. etc.

Weil aber $y = A\cdot x + B$, so ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, etc.; es ist also auch im Besonderen $\frac{dy_a}{da} = \frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{d^2y_a}{da^2} = \frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. Ferner ist $\frac{d\chi'(a)}{da}$, $\frac{d\chi''(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{d^2\chi'(a)}{da^2}$, $\frac{d^2\chi''(\alpha)}{d\alpha^2}$, etc. bezüglich gleich zu achten mit $\frac{db}{da}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d^2b}{da^2}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, etc.
Aus den Gleichungen 7, 8, 9, 10 folgt also

$$11)\quad \delta y_a = \left(\frac{db}{da} - A\right)\cdot\vartheta a$$

$$12)\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{db}{da} - A\right)\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2}\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_a}{da}\cdot\vartheta a$$

$$13)\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta\alpha$$

$$14)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

etc. etc.

Durch Gleichung 11 ist bestimmt, wie der Werth des δy_a von dem willkürlichen Werthe des ϑa abhangt; ferner durch Gleichung 13 ist bestimmt, wie der Werth des δy_α von dem willkürlichen Werthe des $\vartheta\alpha$ abhangt. Und so fort.

Zusatz 1. Folgende Erläuterung ist vielleicht nicht überflüssig:

𝔄) Es gibt eine unendliche Menge Functionen δy von x, welche bei $x = a$ einen von ϑa abhängigen Werth, und welche zugleich bei $x = \alpha$ einen von $\vartheta\alpha$ abhängigen Werth annehmen können. Z. B. jede beliebige Function $\pi'(x, m, n)$, die mit zwei noch willkürlichen Constanten m und n versehen ist, welche so bestimmt werden können, wie es die Gleichungen

$$15)\quad \pi'(a, m, n) = \left(\frac{db}{da} - A\right)\cdot\vartheta a,\ \text{und}\ 16)\quad \pi'(\alpha, m, n) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta\alpha$$

mit sich bringen. Aendern sich nemlich ϑa und $\vartheta\alpha$, so ändern sich auch m und n, und somit auch die Werthe von $\pi'(a, m, n)$ und $\pi'(\alpha, m, n)$.

𝔅) Man nehme für $\delta^2 y$ eine andere Function $\pi''(x, g, h)$, die mit zwei noch willkürlichen Constanten g und h versehen ist. Jetzt gehen die Gleichungen 12 und 14 über in

$$17)\quad \pi''(a, g, h) = \left(\frac{db}{da} - A\right)\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2}\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot\frac{d\pi'(a, m, n)}{da}\cdot\vartheta a$$

$$18)\quad \pi''(\alpha, g, h) = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right)\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 - 2\cdot\frac{d\pi'(\alpha, m, n)}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

Die willkürlichen Werthe, welche man den Elementen ϑa und $\vartheta\alpha$ in den Gleichungen 15 und 16 beigelegt hat, muss man ihnen auch in den Gleichungen 17 und 18 beilegen. Die Werthe der Constanten m und n sind bereits aus 15 und 16 bestimmt. Somit erkennt man, wie der Werth des $\pi''(a, g, h)$, oder, was dasselbe ist, wie der Werth des $\delta^2 y_a$ von ϑa und $\vartheta^2 a$ abhangt. Ebenso erkennt man, wie der Werth des $\pi''(\alpha, g, h)$, oder, was dasselbe ist, wie der Werth des $\delta^2 y_\alpha$ von $\vartheta\alpha$ und $\vartheta^2\alpha$ abhangt.

Und so fort.

(Man vergleiche noch Bd. I. Seite 161, etc.)

Eliminirt man jetzt δy_a und δy_α aus VIII, und lässt man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$ weg; so gibt sich

$$X)\quad \left(1 + A\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha - \left(1 + A\cdot\frac{db}{da}\right)\cdot\vartheta a = 0$$

Weil aber ϑa und $\vartheta\alpha$ unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad 1 + A \cdot \frac{db}{da} = 0, \quad \text{und XII)} \quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Jetzt eliminire man $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$ aus IX, und berücksichtige die Gleichungen XI und XII; so reducirt sich IX auf

$$\text{XIII)}\quad {}_{\delta}\delta^2 U = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - \frac{d^2b}{da^2} \cdot \vartheta a^2\right) + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; dagegen das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Wenn man die Gleichungen XI und XII ebenso untersucht, wie Gleichung XIII der vorigen Aufgabe; so kommt man zu der Erkenntniss, dass die absolut kürzeste Entfernung auf beiden Gränzcurven zugleich senkrecht steht, oder, was dasselbe ist, die absolut kürzeste Entfernung und die betreffenden Normalen der beiden Gränzcurven liegen in einer und derselben graden Linie. Man hat also ein bequemes Mittel, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren.

Die sechs Stücke a, b, α, β, A, B können bestimmt werden durch die Gleichungen
$1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, $1 + A \cdot \frac{db}{da} = 0$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$, $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$.

Zusatz 2. Die theoretische Durchführung dieser ersten Auflösung hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{db}{da}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d^2b}{da^2}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$. Es ist also ganz einerlei, ob die beiden Gränzcurven durch gesonderte oder ungesonderte Functionen gegeben sind; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor b und β absondert.

1) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$\text{19)}\quad b = e \cdot a + f, \quad \text{und} \quad \text{20)}\quad \beta = g \cdot \alpha + h$$

gegebenen Graden; so ist $\frac{db}{da} = e$, $\frac{d\beta}{d\alpha} = g$, $\frac{d^2b}{da^2} = 0$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, etc. Die Gleichungen XI und XII gehen also über in

$$\text{21)}\quad 1 + A \cdot e = 0, \quad \text{und} \quad \text{22)}\quad 1 + A \cdot g = 0$$

woraus $A = -\frac{1}{e}$ und $A = -\frac{1}{g}$ folgt, so dass man $e = g$ hätte. Dieser specielle Fall ist also nur möglich, wenn $e = g$ ist, d. h. wenn die beiden gegebenen Graden parallel sind. Ist nun $e = g$, so sind die zwei Gleichungen $1 + A \cdot e = 0$ und $1 + A \cdot g = 0$ ganz eins und dasselbe, so dass man für die sechs zu bestimmenden Stücke a, b, α, β, A, B nur fünf verschiedene Gleichungen hat. Von diesen sechs Stücken ist dann jedenfalls A bestimmt, d. h. es ist $A = -\frac{1}{e} = -\frac{1}{g}$; und von den übrigen fünf Stücken bleibt eines unbestimmt, so dass man diese kürzeste Entfernung unterhalb oder oberhalb und zwar in jeder beliebigen Weite von der Abscissenaxe nehmen kann, wenn nicht noch eine fernere Bedingung hinzukommt, z. B. folgende: Die gesuchte kürzeste Entfernung soll durch einen bestimmten Punkt (n, m) gehen. Da aber hier $\frac{d^2b}{da^2} = 0$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, etc. ist, so reducirt sich Gleichung XIII auf

$$\text{XIV)}\quad {}_{\delta}\delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 3. Dass dieser für ${}_{\delta}\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck keine Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die beiden Gränzcurven diesmal grade Linien sind, zusammenhangt. Aus den Gleichungen 19 und 20 folgt nemlich $\frac{d^2b}{da^2} = 0$ und $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$; und so fallen die mit ϑa^2 und $\vartheta\alpha^2$ versehenen Theilsätze aus XIII weg. Der in XIV für ${}_{\delta}\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck liefert aber

Digitized by Google

dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann. Von der gesuchten Graden, welche auf den beiden miteinander parallelen Gränzlinien zugleich senkrecht stehen muss, kann nemlich jede dieser Gränzlinien nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, das in der ersten Gränzlinie anfängt und in der zweiten aufhört. Sowie nun von unserer Figur, sobald man an irgend einer Stelle eine auf den beiden Gränzlinien senkrechte Grade gezogen hat, nur ein einziges Stück dieser Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; ebensowenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

2) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$23)\quad (e-a)^2+(g-b)^2=r^2, \text{ und } 24)\quad (E-\alpha)^2+(G-\beta)^2=R^2$$

gegebenen Kreislinien; so bekommt man jetzt durch Differentiation

$$25)\quad (e-a)\cdot da+(g-b)\cdot db=0,\quad 26)\quad (E-\alpha)\cdot d\alpha+(G-\beta)\cdot d\beta=0$$

und

$$27)\quad -da^2-db^2+(g-b)\cdot d^2b=0,\quad 28)\quad -d\alpha^2-d\beta^2+(G-\beta)\cdot d^2\beta=0$$

Aus 25 und 26 folgt $\frac{db}{da}=-\frac{e-a}{g-b}$ und $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{E-\alpha}{G-\beta}$; und so gehen die Gleichungen XI und XII bezüglich über in

$$29)\quad g-b=A\cdot(e-a),\quad 30)\quad G-\beta=A\cdot(E-\alpha)$$

Die Gleichungen 23 und 24 gehen also über in $(e-a)^2\cdot(1+A^2)=r^2$ und $(E-\alpha)^2\cdot(1+A^2)=R^2$. Daraus folgt

$$31)\quad a=e\mp\frac{r}{\sqrt{1+A^2}},\qquad \text{und}\qquad 32)\quad \alpha=E\mp\frac{R}{\sqrt{1+A^2}}$$

Es gibt also an jeder Kreislinie zwei Punkte, welche zugleich der gesuchten Graden angehören, so dass es vier Stücke der gesuchten Graden gibt, welche noch näher betrachtet werden müssen.

Zieht man nun durch die Mittelpunkte beider Kreise eine grade Linie, so ist diese die gesuchte; sie trifft jede Kreislinie in zwei Punkten, und steht in jedem dieser Punkte auf der betreffenden Kreislinie senkrecht. Aus XI und XII folgt $db=-\frac{da}{A}$ und $d\beta=-\frac{d\alpha}{A}$; die Gleichungen 27 und 28 gehen also über in

$$-da^2-\frac{da^2}{A^2}+A\cdot(e-a)\cdot d^2b=0,\quad \text{und}\quad -d\alpha^2-\frac{d\alpha^2}{A^2}+A\cdot(E-\alpha)\cdot d^2\beta=0$$

Daraus folgt

$$33)\quad \frac{d^2b}{da^2}=\frac{1+A^2}{A^3\cdot(e-a)},\quad \text{und } 34)\quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{1+A^2}{A^3\cdot(E-\alpha)}$$

und Gleichung XIII geht über in

$$XV)\quad (\delta_t^2U=\frac{\sqrt{1+A^2}}{A^2}\cdot\left(\frac{\vartheta\alpha^2}{E-\alpha}-\frac{\vartheta a^2}{e-a}\right)+\frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten ist jederzeit positiv; es findet also ein Minimum-stand statt.

𝔄) Das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze ist positiv, wenn $\alpha < E$ und $a > e$; und in diesem Falle findet ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

𝔅) Das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze ist negativ, wenn $\alpha > E$ und $a < e$; in diesem Falle findet ein Maximumwerth eines Minimum-standes statt, welcher Zustand aber in der Aufgabe nicht verlangt ist, also auch unberücksichtigt bleiben muss.

ℭ) Das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze kann weder als negativ noch als positiv gelten,

Digitized by Google

1) wenn gleichzeitig $\alpha > E$ und $a > e$, und
2) wenn gleichzeitig $\alpha < E$ und $a < e$.

Dabei findet in secundärer Beziehung weder ein Maximum-werth noch Minimum-werth statt.

Zweite Auflösung. Nimmt man die zu den Gränzcurven gehörigen Ordinaten b und β als die dem Werthe nach willkürlichen, und die Abscissen a und α als die dem Werthe nach abhängigen Elemente an; so muss man a und α aus den Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ absondern, so dass man

$$34)\quad a = F'(b), \qquad \text{und} \qquad 35)\quad \alpha = F''(\beta)$$

bekommt. Die zu den Durchschnittspunkten, wo nemlich die gesuchte Grade in den beiden Gränzcurven einschneidet, gehörigen Gleichungen

$$36)\quad y_a = b, \qquad \text{und} \qquad 37)\quad y_\alpha = \beta$$

oder vielmehr

$$38)\quad A \cdot a + B = b, \qquad \text{und} \qquad 39)\quad A \cdot \alpha + B = \beta$$

gehen also über in

$$40)\quad A \cdot F'(b) + B = b, \qquad \text{und} \qquad 41)\quad A \cdot F''(\beta) + B = \beta$$

Man erkennt aber, dass sich aus den zwei letzten Gleichungen nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des b und des β ergeben, dass also dieselben keine identischen sind. Geht man nun auf dieselbe Weise weiter, wie bei der zweiten Auflösung im ersten Falle der vorigen Aufgabe; so erkennt man, dass man die Gleichungen 36 und 37 einer gemischten Mutation unterwerfen muss. Aus 36 folgt im Allgemeinen

$$42)\quad \delta y_a + \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = \vartheta b$$

$$43)\quad \delta^2 y_a + 2 \cdot \frac{d\delta y_a}{da} \cdot \vartheta a + \frac{d^2 y_a}{da^2} \cdot \vartheta a^2 + \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta^2 a = \vartheta^2 b$$

etc. etc.

Aus 37 folgt im Allgemeinen ebenso

$$44)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta \alpha = \vartheta \beta$$

$$45)\quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta \alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta \alpha^2 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2 \alpha = \vartheta^2 \beta$$

etc. etc.

Aus $f'(a, b) = 0$ folgt

$$46)\quad \vartheta a = \frac{da}{db} \cdot \vartheta b$$

$$47)\quad \vartheta^2 a = \frac{da}{db} \cdot \vartheta^2 b + \frac{d^2 a}{db^2} \cdot \vartheta b^2$$

etc. etc.

Aus $f''(\alpha, \beta) = 0$ folgt ferner

$$48)\quad \vartheta \alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta \beta$$

$$49)\quad \vartheta^2 \alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta^2 \beta + \frac{d^2 \alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta \beta^2$$

etc. etc.

Weil aber $y = A \cdot x + B$, so ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, etc.; es ist also auch im Besondern $\frac{dy_a}{da} = \frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{d^2 y_a}{da^2} = \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. Eliminirt man jetzt ϑa, $\vartheta \alpha$, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2 \alpha$, etc.; so bekommt man

$$50)\quad \delta y_a = \left(1 - A \cdot \frac{da}{db}\right) \cdot \vartheta b$$

$$51)\quad \delta y_\alpha = \left(1 - A \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta \beta$$

Digitized by Google

$$52)\quad \delta^2 y_a = \left(1 - A\cdot\frac{da}{db}\right)\cdot\vartheta^2 b - A\cdot\frac{d^2a}{db^2}\cdot\vartheta b^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_a}{da}\cdot\frac{da}{db}\cdot\vartheta b$$

$$53)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(1 - A\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta^2\beta - A\cdot\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta$$

etc. etc.

Eliminirt man ϑa, $\vartheta\alpha$, δy_a, δy_α aus VIII, und lässt man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$ weg; so bekommt man

$$\text{XVI)}\quad \left(A + \frac{d\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta - \left(A + \frac{da}{db}\right)\cdot\vartheta b = 0$$

Weil aber ϑb und $\vartheta\beta$ voneinander unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei

$$\text{XVII)}\quad A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{XVIII)}\quad A + \frac{da}{db} = 0$$

Jetzt eliminire man $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2\alpha$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$ aus IX, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\left(\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 - \frac{d^2a}{db^2}\cdot\vartheta b^2\right) + \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; dagegen das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Wenn man die Gleichungen XVII und XVIII ebenso untersucht, wie die Gleichung XVIII der vorigen Aufgabe; so kommt man zu der Erkenntniss, dass die absolut kürzeste Entfernung und die betreffenden Normalen der beiden Gränzcurven in einer und derselben graden Linie liegen, d. h. die absolut kürzeste Entfernung steht auf beiden Gränzcurven senkrecht. Dadurch ist ein bequemes Mittel gegeben, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren. Somit ist Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Die sechs Stücke a, b, α, β, A, B können bestimmt werden durch die Gleichungen $A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$, $A + \frac{da}{db} = 0$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$, $b = A\cdot a + B$, $\beta = A\cdot\alpha + B$.

Zusatz 4. Die theoretische Durchführung dieser zweiten Auflösung hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{da}{db}$, $\frac{d\alpha}{d\beta}$, $\frac{d^2a}{db^2}$, $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}$. Es ist also ganz einerlei, ob die beiden Gränzcurven durch gesonderte oder ungesonderte Functionen gegeben sind; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man vorher a und α absondert.

1) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$54)\quad b = e\cdot a + f, \quad \text{und} \quad 55)\quad \beta = g\cdot\alpha + h$$

gegebenen Graden; so ist $\frac{da}{db} = \frac{1}{e}$, $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{g}$, $\frac{d^2a}{db^2} = 0$, $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$, etc. Die Gleichungen XVII und XVIII gehen also über in

$$56)\quad A + \frac{1}{e} = 0, \quad \text{und} \quad 57)\quad A + \frac{1}{g} = 0$$

Daraus folgt wieder $A = -\frac{1}{e} = -\frac{1}{g}$, d. h. dieser specielle Fall ist nur möglich, wenn $e = g$, oder, was dasselbe ist, wenn die beiden gegebenen Graden parallel sind. (Man lese die unmittelbar hinter den Gleichungen 21 und 22 befindliche Erklärung.) Gleichung XIX reducirt sich jetzt auf

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Digitized by Google

Zusatz 5. Dieser Ausdruck enthält keinen Differenzcoefficienten, welche Erscheinung mit dem Umstande, dass die Gränzcurven diesmal grade Linien sind, zusammenhangt. Aus Gleichung 54 und 55 folgt nemlich $\frac{d^2a}{db^2} = 0$ und $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$; und so fallen die mit ϑb^2 und $\vartheta\beta^2$ versehenen Theilsätze aus XIX hinweg. Die nähere Erläuterung ist bereits (Zusatz 3) gegeben.

2) Sucht man aber wieder die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$58)\ (e - a)^2 + (g - b)^2 = r^2, \text{ und } 59)\ (E - \alpha)^2 + (G - \beta)^2 = R^2$$

gegebenen Kreislinien; so bekommt man jetzt durch Differentiation

$$60)\ (e - a)\cdot da + (g - b)\cdot db = 0, \qquad 61)\ (E - \alpha)\cdot d\alpha + (G - \beta)\cdot d\beta = 0$$

$$62)\ (e - a)\cdot d^2a - da^2 - db^2 = 0, \qquad 63)\ (E - \alpha)\cdot d^2\alpha - d\alpha^2 - d\beta^2 = 0$$

Aus 60 und 61 folgt $\frac{da}{db} = -\frac{g - b}{e - a}$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{G - \beta}{E - \alpha}$; und so gehen die Gleichungen XVII und XVIII bezüglich über in

$$64)\ g - b = A\cdot(e - a), \quad \text{und} \quad 65)\ G - \beta = A\cdot(E - \alpha)$$

Die Gleichungen 58 und 59 geben also jetzt über in

$$(e - a)^2\cdot(1 + A^2) = r^2, \quad \text{und} \quad (E - \alpha)^2\cdot(1 + A^2) = R^2$$

und daraus folgt

$$66)\ a = e \mp \frac{r}{\sqrt{1 + A^2}}, \quad \text{und} \quad 67)\ \alpha = E \mp \frac{R}{\sqrt{1 + A^2}}$$

welches wieder die Gleichungen 31 und 32 sind, d. h. man sieht jetzt wieder, dass es in jeder Kreislinie zwei Punkte gibt, welche der gesuchten Graden angehören, so dass es vier Stücke der gesuchten Graden gibt, welche noch näher betrachtet werden müssen.

Zieht man durch die Mittelpunkte beider Kreise eine grade Linie, so ist diese die gesuchte. Sie trifft jede Kreislinie in zwei Punkten, und steht in jedem dieser Punkte auf der betreffenden Kreislinie senkrecht.

Aus den Gleichungen XVII und XVIII folgt $d\alpha = -A\cdot d\beta$ und $da = -A\cdot db$; und somit gehen die Gleichungen 62 und 63 über in

$$(e - a)\cdot d^2a - (1 + A^2)\cdot db^2 = 0, \quad \text{und)} \quad (E - \alpha)\cdot d^2\alpha - (1 + A^2)\cdot d\beta^2 = 0$$

Daraus folgt

$$68)\ \frac{d^2a}{db^2} = \frac{1 + A^2}{e - a}, \quad \text{und} \quad 69)\ \frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = \frac{1 + A^2}{E - \alpha}$$

Gleichung XIX geht also über in

$$\text{XXI)}\ \delta^2U = (\sqrt{1 + A^2})\cdot\left(\frac{\vartheta\beta^2}{E - \alpha} - \frac{\vartheta b^2}{e - a}\right) + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Hier hat man wieder, wie beim Ausdrucke XV, zu unterscheiden

𝔄) ob $\alpha < E$ und $a > e$,

𝔅) ob $\alpha > E$ und $a < e$,

ℭ) ob gleichzeitig $\alpha > E$ und $a > e$, oder ob gleichzeitig $\alpha < E$ und $a < e$.

Dieses ist am Ende der ersten Auflösung ausführlich geschehen.

Zusatz 6. Aus den Gleichungen 46 und 48 folgt $\vartheta b = \frac{1}{\frac{da}{db}}\cdot\vartheta a$ und $\vartheta\beta = \frac{1}{\frac{d\alpha}{d\beta}}\cdot\vartheta\alpha$; und aus den Gleichungen XVII und XVIII folgt $\frac{da}{db} = -A$ und $\frac{d\alpha}{d\beta} = -A$. Somit hat man $\vartheta b = -\frac{1}{A}\cdot\vartheta a$ und $\vartheta\beta = -\frac{1}{A}\cdot\vartheta\alpha$. Eliminirt man ϑb und $\vartheta\beta$ aus XXI, so bekommt man wieder den Ausdruck XV.

Dritte Auflösung. Man behandle bei der ersten Gränzcurve $f(a, b) = 0$ die Abscisse a als das dem Werthe nach willkürliche und die Ordinate b als das dem

Werthe nach abhängige Element, während man bei der zweiten Gränzcurve die Abscisse α als das dem Werthe nach abhängige und die Ordinate β als das dem Werthe nach willkürliche Element behandelt. Man sondere hier aus $f'(a, b) = 0$ das b ab, so dass man $b = \chi'(a)$ bekommt. Für den Punkt, wo die erste Gränzcurve von der gesuchten Linie geschnitten wird, hat man die Gleichung

$$70) \quad y_a = \chi'(a)$$

und für den Punkt, wo die zweite Gränzcurve von der gesuchten Linie geschnitten wird, hat man die Gleichung

$$71) \quad y_\alpha = \beta$$

Man erkennt nun schon, dass jetzt die Gränzengleichung VIII übergeht in

$$\text{XXII)} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left[\left(A + \frac{d\alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta - \left(1 + A \cdot \frac{db}{da}\right) \cdot \vartheta a\right] = 0$$

welche sich wegen der Willkürlichkeit des ϑa und $\vartheta\beta$ zerlegt in

$$\text{XXIII)} \quad A + \frac{d\alpha}{d\beta} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{XXIV)} \quad 1 + A \cdot \frac{db}{da} = 0$$

woran man erkennt, dass die absolut kürzeste Entfernung auf beiden Gränzcurven zugleich senkrecht steht. Der Ausdruck IX geht jetzt über in

$$\text{XXV)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 - A \cdot \frac{d^2b}{da^2} \cdot \vartheta a^2\right) + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Vierte Auflösung. Man behandle bei der ersten Gränzcurve $f'(a, b) = 0$ die Abscisse a als das dem Werthe nach abhängige und die Ordinate b als das dem Werthe nach willkürliche Element, während man bei der zweiten Gränzcurve die Abscisse α als das dem Werthe nach willkürliche und die Ordinate β als das dem Werthe nach abhängige Element behandelt. Für den Punkt, wo die erste Gränzcurve von der gesuchten Linie geschnitten wird, hat man die Gleichung

$$72) \quad y_a = b$$

Nun sondere man aus $f''(\alpha, \beta) = 0$ das β ab, so dass man $\beta = \chi''(\alpha)$ bekommt; und man hat für den Punkt, wo die zweite Gränzcurve von der gesuchten Linie geschnitten wird, die Gleichung

$$73) \quad y_\alpha = \chi''(\alpha)$$

Man erkennt nun schon, dass jetzt die Gränzengleichung VIII übergeht in

$$\text{XXVI)} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left[\left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha - \left(A + \frac{da}{db}\right) \cdot \vartheta b\right] = 0$$

welche sich wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ und ϑb zerlegt in

$$\text{XXVII)} \quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{XXVIII)} \quad A + \frac{da}{db} = 0$$

woran man erkennt, dass die absolut kürzeste Entfernung auf beiden Gränzcurven zugleich senkrecht steht. Der Ausdruck IX geht jetzt über in

$$\text{XXIX)} \quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left(A \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - \frac{d^2a}{db^2} \cdot \vartheta b^2\right) + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zusatz 7. Vergleicht man diese vier Auflösungen miteinander, so gewahrt man bei der ersten und zweiten eine sehr schöne Symmetrie des Calculs, ein Vorzug, welcher der dritten und vierten Auflösung abgeht.

Zusatz 8. Folgende Unterscheidungen sind beachtenswerth:

𝔄) Die absolut kürzeste Entfernung zweier krummen Linien oder einer graden und krummen Linie, die sich nur berühren, aber niemals schneiden, ist gleich Null. Dasselbe gilt bei zwei graden Linien, welche ineinander fallen. In solchem Falle ist die Differenz $\alpha - a = 0$.

𝔅) Wenn aber zwei Linien, seien es krumme oder grade, einander schneiden, so kann

Digitized by Google

a) von einer absolut kürzesten Entfernung derselben keine Rede sein. Würde aber eine solche (eine absolut kürzeste Entfernung nemlich) dennoch gefordert werden, so müsste sich die Unstatthaftigkeit der Forderung jedesmal durch eine Erscheinung des Calculs offenbaren.

b) Ganz anders verhält es sich bei einer relativ kürzesten Entfernung, d. h. bei einer Entfernung, welche unter allen denen, die einer oder mehreren gemeinschaftlichen Bedingungen genügen, die kürzeste ist. Die Forderung einer solchen kürzesten Entfernung wird in der Regel statthaft sein, auch wenn die Gränzlinien einander schneiden; und sollte sie einmal unstatthaft sein, so wird es der Calcul ohneweiters anzeigen.

(Hier sollen einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.)

Zweiter Fall.

Man soll nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegender Linien suchen, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Abscissendifferenz $(\alpha - a)$ den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$74)\quad y_a = b,\qquad 75)\quad y_\alpha = \beta,\qquad 76)\quad \alpha - a = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Hier kann von den vier Elementen a, α, b, β nur eines dem Werthe nach willkürlich, und die drei andern müssen dem Werthe nach abhängig sein.

Man nehme α als willkürlich, so folgt aus Gleichung 76, dass $\vartheta a = \vartheta\alpha$, $\vartheta^2 a = \vartheta^2\alpha$, etc. ist. Eliminirt man jetzt ϑa, δy_a und δy_α aus VIII; so bekommt man

$$\text{XXX)}\quad A\cdot\left(\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{db}{da}\right)\cdot\vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$ weggelassen hat. Letzterer Gleichung geschieht Genüge, wenn man entweder $A = 0$ oder $\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{db}{da} = 0$ setzt.

Erstens. Will man $A = 0$ gelten lassen, so reducirt sich die Gleichung der gesuchten Graden auf

$$77)\quad y = B$$

d. h. man hat die mit der Abscissenaxe parallele Grade, und das auf ihr zu nehmende Stück hat die bestimmt vorgeschriebene Länge

$$78)\quad U'' = K$$

Die fünf Gleichungen $B = b$, $B = \beta$, $\alpha - a = K$, $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ reichen hin zur Bestimmung der fünf Stücke a, b, α, β, B. Diese fünf Gleichungen reduciren sich aber gradezu auf folgende zwei

$$79)\quad f'(a, B) = 0,\qquad \text{und}\qquad 80)\quad f''(a + K, B) = 0$$

so dass es möglich ist, $A = 0$ zu setzen, sobald diese zwei Gleichungen keinen Widerspruch enthalten, und für a und B reelle Werthe liefern.

Wegen der Gleichung $\alpha - a = K$ müssen die beiden Gränzordinaten der hier gesuchten kürzesten Entfernung um die bestimmt vorgeschriebene Länge K voneinander abstehen. Jede mit der Abscissenaxe parallele Grade steht auf beiden Gränzordinaten zugleich senkrecht, hat also auch die Länge K. Jede mit der Abscissenaxe nichtparallele Grade steht auf den beiden Gränzordinaten nicht senkrecht, ist also grösser als K. Wenn daher zwischen beiden Gränzcurven eine mit der Abscissenaxe parallele Grade von der Länge K möglich ist, so ist diese der kürzeste Abstand, welcher unter denen, die der Bedingung $\alpha - a = K$ genügen, zwischen beiden Curven gedacht werden kann.

Eliminirt man jetzt $\vartheta^2 a$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$ aus IX, so bekommt man

$$\text{XXXI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Digitized by Google

Zusatz 9. Dieser für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck enthält keinen Differenzcoefficienten, was seinen Grund darin hat, dass die gesuchte Grade mit der Abscissenaxe parallel läuft, d. h. dass $A = 0$ ist; denn eben wegen $A = 0$ fallen die mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze hinweg. Der Ausdruck XXXI liefert aber dennoch ein vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann. Man darf nemlich auf der hier gefundenen Graden nur ein Stück von der bestimmten Länge K nehmen, und jedes andere Stück, dessen Länge (sei es um einen unendlichkleinen oder um einen angebbaren Theil) von K verschieden ist, muss unbeachtet bleiben. Sowie nun von unserer Figur nur die bestimmte Länge K auf der gesuchten Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; ebensowenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

Zweitens. Will man $\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{db}{da} = 0$ gelten lassen, so hat man

$$81)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{db}{da}$$

d. h. die zu den gesuchten Punkten der gegebenen Gränzcurven gehörigen Berührenden sind miteinander parallel, oder, was dasselbe ist, der Ausfallswinkel und der Einfallswinkel, welche von der gesuchten Graden und den beiden Gränzcurven gebildet werden, ergänzen sich zu zwei Rechten.

Gleichung IX geht jetzt über in

$$\text{XXXII)}\quad \delta^2 U = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \frac{d^2 b}{da^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Die sechs Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\alpha - a = K$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$, $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{db}{da}$ reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke $a, b, \alpha, \beta, A, B$.

Zusatz 10. Man hat hier zwei verschiedene grade Linien, und jede kann einen Minimumwerth eines Minimum-standes liefern. Man erinnere sich nur daran, dass man die gefundene Grade jedesmal nur mit den ihr stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven vergleicht. Weil nemlich bei der ersten gefundenen Graden der Werth des U kleiner ist, als er von allen diesen Graden stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven gemacht werden kann; und wenn bei der zweiten gefundenen Graden der Werth des U wieder kleiner wird, als er von allen dieser Graden stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven gemacht werden kann; so ist beide Mal ein Minimumwerth eines Minimum-standes vorhanden.

Dritter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Differenz der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$82)\quad y_a = b, \qquad 83)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 84)\quad y_\alpha - y_a = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 84 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$85)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a - \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Führt man hier für δy_α und δy_a die Ausdrücke (aus Gleichung 11 und 13) ein; so geht 85 über in

$$86)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \frac{db}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen $\vartheta\alpha$ und ϑa gegeben ist. Unterwirft man Gleichung 85 abermals einer gemischten Mutation, und eliminirt man $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 12 und 14 geschieht; so bekommt man

$$87)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - \frac{db}{da} \cdot \vartheta^2 a - \frac{d^2 b}{da^2} \cdot \vartheta a^2 = 0$$

Digitized by Google

wodurch die Abhängigkeit zwischen $\vartheta^2 a$ und $\vartheta^2 \alpha$ gegeben ist. Man nehme ϑa, $\vartheta^2 a$, etc. als abhängig, und eliminire δy_a, δy_α, ϑa aus VIII; so gibt sich

$$\text{XXXIII)} \quad \left[\left(\frac{db}{da} - \frac{d\beta}{d\alpha}\right) : \frac{db}{da}\right] \cdot \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$ weggelassen hat. Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ hat man aber

$$88) \quad \frac{db}{da} - \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

welches wieder Gleichung 81 des vorigen Falles ist, d. h. auch jetzt sind die zu den gesuchten Punkten der Gränzcurven gehörigen Berührenden parallel, oder, was dasselbe ist, der Ausfallswinkel und Einfallswinkel, welche von der gesuchten Graden und den beiden Gränzcurven gebildet werden, ergänzen sich zu zwei Rechten.

Wenn man $Ax + B$ an die Stelle des y in 84 einsetzt, so gibt sich $A \cdot (\alpha - a) = K$. Es ist also $A = \frac{K}{\alpha - a}$, und für die gesuchte Linie hat man folgende Gleichung

$$89) \quad y = \frac{K}{\alpha - a} \cdot x + B$$

wo nur noch B ein unbestimmter Constanter ist.

Die sechs Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $A \cdot (\alpha - a) = K$, $\frac{db}{da} - \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$ dienen zur Bestimmung der sechs Stücke $a, b, \alpha, \beta, A, B$.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, eliminire man $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\vartheta^2 a$ aus IX, was mittelst der Gleichungen 12, 14 und 87 geschieht.

Vierter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Summe der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$90) \quad y_a = b, \qquad 91) \quad y_\alpha = \beta, \qquad 92) \quad y_a + y_\alpha = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 92 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$93) \quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \delta y_a + \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Führt man für δy_a und δy_α die Ausdrücke (aus Gleichung 11 und 13) ein; so geht 93 über in

$$94) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{db}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen ϑa und $\vartheta\alpha$ gegeben ist. Unterwirft man Gleichung 93 abermals einer gemischten Mutation, und eliminirt man $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 12 und 14 geschieht; so bekommt man

$$95) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{db}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2 b}{da^2} \cdot \vartheta a^2 = 0$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen $\vartheta^2 a$ und $\vartheta^2\alpha$ gegeben ist. Man nehme ϑa und $\vartheta^2 a$ als abhängig, und eliminire δy_a, δy_α, ϑa aus VIII; so gibt sich

$$\text{XXXIV)} \quad \left[\left(\frac{db}{da} + \frac{d\beta}{d\alpha} + 2A \cdot \frac{db}{da} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) : \frac{db}{da}\right] \cdot \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$ weggelassen hat. Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ hat man nun

Digitized by Google

$$96)\quad \frac{db}{da} + \frac{d\beta}{d\alpha} + 2A \cdot \frac{db}{da} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Führt man $(A \cdot x + B)$ statt y in Gleichung 92 ein, so bekommt man

$$97)\quad A \cdot (\alpha + a) + 2B = K$$

Die sechs Stücke a, b, α, β, A, B bestimmen sich also durch die Gleichungen 92 und 93, verbunden mit $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, eliminire man $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\vartheta^2 a$ aus IX, was mittelst der Gleichungen 12, 14 und 95 geschieht.

Fünfter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen das Product der Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$98)\quad y_a = b. \qquad 99)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 100)\quad y_a \cdot y_\alpha = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 100 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$101)\quad y_\alpha \cdot \delta y_a + y_\alpha \cdot \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a + y_a \cdot \delta y_\alpha + y_a \cdot \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta \alpha = 0$$

Man eliminire δy_a und δy_α, was mittelst der Gleichungen 11 und 13 geschieht, und setze dann $(A \cdot x + B)$ statt y; so bekommt man

$$102)\quad (A \cdot \alpha + B) \cdot \frac{db}{da} \cdot \vartheta a + (A \cdot a + B) \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta \alpha = 0$$

Durch diese Gleichung ist die Abhängigkeit zwischen ϑa und $\vartheta \alpha$ gegeben. Setzt man noch b und β bezüglich statt $(A \cdot a + B)$ und $(A \cdot \alpha + B)$; so gibt sich

$$103)\quad \vartheta a = -\left[\left(b \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) : \left(\beta \cdot \frac{db}{da}\right)\right] \cdot \vartheta \alpha$$

Eliminirt man jetzt δy_a, δy_α und ϑa aus VIII, so kommt man zu der Gleichung

$$104)\quad \beta \cdot \frac{db}{da} + b \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + A \cdot (b + \beta) \cdot \frac{db}{da} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Führt man $(Ax + B)$ statt y in 100 ein, so bekommt man

$$105)\quad (A \cdot a + B) \cdot (A \cdot \alpha + B) = K$$

Die sechs Stücke a, b, α, β, A, B bestimmen sich durch die Gleichungen 104 und 105, verbunden mit $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$.

Man unterwerfe nun Gleichung 101 einer zweiten gemischten Mutation, und eliminire δy_a, δy_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 11, 12, 13, 14 geschieht; so bekommt man

$$106)\quad y_\alpha \cdot \left(\frac{db}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2 b}{da^2} \cdot \vartheta a^2\right) + 2 \cdot \frac{db}{da} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta \alpha$$
$$+ y_a \cdot \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta^2 \alpha + \frac{d^2 \beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta \alpha^2\right) = 0$$

Durch diese Gleichung ist die Abhängigkeit zwischen $\vartheta^2 a$ und $\vartheta^2 \alpha$ bestimmt. Um das Prüfungsmittel herzustellen, eliminire man $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\vartheta^2 a$ aus IX, was mittelst der Gleichungen 103, 106, 12 und 14 geschieht.

Sechster Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der beiden Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und

Digitized by Google

2) der Unterschied der beiden Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

107) $y_a = b$, 108) $y_\alpha = \beta$, 109) $y_\alpha + y_a = K$, 110) $y_\alpha - y_a = \mathfrak{K}$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Man unterwerfe die Gleichungen 109 und 110 einer gemischten Mutation, und eliminire δy_a und δy_α; so bekommt man bezüglich

$$111)\quad \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + \frac{db}{da}\cdot\vartheta a = 0,\quad \text{und}\quad 112)\quad \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \frac{db}{da}\cdot\vartheta a = 0$$

Unterwirft man die Gleichungen 109 und 110 einer zweiten gemischten Mutation, und eliminirt man $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$; so bekommt man bezüglich

$$113)\quad \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \frac{db}{da}\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2}\cdot\vartheta a^2 = 0$$

$$114)\quad \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 - \frac{db}{da}\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2}\cdot\vartheta a^2 = 0$$

Weil die Gleichungen 111 und 112 nebeneinander bestehen müssen, so muss $\vartheta a = 0$ und $\vartheta\alpha = 0$ sein. Ebenso folgt aus 113 und 114, dass auch $\vartheta^2 a = 0$ und $\vartheta^2\alpha = 0$ ist. Und so fort. Desshalb muss auch $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. sein, so dass die Mutationen der Gränzordinaten zu Null werden, während δy, $\delta^2 y$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen.

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und für das Prüfungsmittel bekommt man

$$\text{XXXV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Dieser Ausdruck enthält keinen Differenzcoefficienten, welche Erscheinung eine Folge ist von der Menge der Gränzbedingungen. (Man sehe Zusatz 8 der vorigen Aufgabe.)

Siebenter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer Ebene liegenden Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der beiden Gränzordinaten und der zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth K,
2) der Unterschied der beiden Gränzordinaten nebst dem Unterschiede der zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$, und
3) das Product der beiden Gränzordinaten nebst dem Producte der beiden Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{H}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

115) $y_a = b$, 116) $y_\alpha = \beta$, 117) $a + \alpha + y_a + y_\alpha = \mathfrak{H}$

118) $\alpha - a + y_\alpha - y_a = \mathfrak{K}$, 119) $a\cdot\alpha + y_a\cdot y_\alpha = \mathfrak{H}$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Man unterwerfe die Gleichungen 117, 118, 119 gemischten Mutationen, und eliminire δy_a, δy_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, etc.; so bekommt man bezüglich

$$120)\quad \left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha + \left(1+\frac{db}{da}\right)\cdot\vartheta a = 0$$

$$121)\quad \left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha - \left(1+\frac{db}{da}\right)\cdot\vartheta a = 0$$

$$122)\quad \left(a + y_a\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha + \left(\alpha + y_\alpha\cdot\frac{db}{da}\right)\cdot\vartheta a = 0$$

etc. etc.

Digitized by Google

Man sieht also, dass auch hier die Mutationen der Gränzordinaten zu Null werden, während δy, $\delta^2 y$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen. Die Gränzengleichung fällt also auch jetzt wieder von selbst weg; und für das Prüfungsmittel bekommt man wieder den Ausdruck XXXV. (Man sehe noch Zusatz 8 der vorigen Aufgabe.)

Zur Bestimmung der sechs Stücke a, b, α, β, A, B hat man jetzt sieben Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $f'(a, b) = 0$, $f''(\alpha, \beta) = 0$, $(A + 1) \cdot (\alpha + a) + 2B = K$, $(A + 1) \cdot (\alpha - a) = \mathfrak{K}$, $a \cdot \alpha + (A \cdot a + B) \cdot (A \cdot \alpha + B) = \mathfrak{H}$, welche, weil eine zuviel ist, sich leicht widersprechen können; und so wird dieser siebente Fall in der Regel überbestimmt, d. h. unmöglich sein.

Schlussbemerkung. Ist ganz die nemliche, wie die der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 162.

Man sucht y als solche Function von x, dass das zwischen den nach Belieben genommenen Gränzen a und α erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha \left[4y^2 + 2my \cdot \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

grösser oder kleiner wird, als es von allen andern der gesuchten Function bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen gemacht werden kann.

Zur Bequemlichkeit setze man p statt $\frac{dy}{dx}$, und es gibt sich

$$\delta U = 2 \cdot \int_a^\alpha \left[(4y + mp) \cdot \delta y + (my - p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot dx$$

oder

$$\delta U = 2 \cdot (my - p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2 \cdot (my - p)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha \left[4y + mp - \frac{1}{dx} \cdot d(my - p)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Hier müssen die beiden identischen Gleichungen $4y + mp = 0$ und $my - p = 0$ zugleich stattfinden. Diese aber widersprechen sich, ausser es müsste schon $y = 0$, d. h. es müsste y eine identische Function von x sein.

Untersuchung der zweiten Form des δU. Hier muss stattfinden die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad 4y + mp - \frac{1}{dx} \cdot d(my - p) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{II)} \quad (my - p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (my - p)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Führt man die in I angedeutete Differentiation aus, so bleibt nur $4y + \frac{dp}{dx} = 0$; und wenn man diese Gleichung mit $\frac{dy}{dx} = p$ multiplicirt, so bekommt man $4y \cdot dy + p \cdot dp = 0$. Daraus folgt $4y^2 + p^2 = h$. Weil aber $(4y^2 + p^2)$ positiv ist, so muss auch h positiv sein; man kann also gradezu c^2 statt h setzen, und bekommt $4y^2 + p^2 = c^2$, woraus $p = \sqrt{c^2 - 4y^2}$ folgt. Indem man integrirt, bekommt man

$$x + \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} \cdot \text{arc sin} \frac{2y}{c}, \text{ oder } 2x + g = \text{arc sin} \frac{2y}{c}$$

oder

$$\text{III)} \quad y = \frac{c}{2} \cdot \sin (2x + g)$$

Digitized by Google

Diese Function muss man noch so specialisiren, dass dabei die Gränzengleichung II, welche jetzt auch dargestellt werden kann durch

$$\text{IV)}\quad \left[\frac{mc}{2}\cdot\sin(2\alpha+g) - c\cdot\cos(2\alpha+g)\right]\cdot\delta y_\alpha$$
$$-\left[\frac{mc}{2}\cdot\sin(2a+g) - c\cdot\cos(2a+g)\right]\cdot\delta y_a = 0$$

hinwegfällt; denn nur dann kann U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bleibt jetzt nur

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = 2\cdot\left[\frac{mc}{2}\cdot\sin(2\alpha+g) - c\cdot\cos(2\alpha+g)\right]\cdot\delta^2 y_\alpha$$
$$-2\cdot\left[\frac{mc}{2}\cdot\sin(2a+g) - c\cdot\cos(2a+g)\right]\cdot\delta^2 y_a$$
$$+2\cdot\int_a^\alpha\left(4\cdot\delta y^2 + 2m\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Da man hier sieht, dass (-2) der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor ist, so erkennt man (nach §. 230 und 231), dass ein Maximum-stand stattfindet, aber nur zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$, weil die Constanten c und g durch die von diesen Gränzen abhängigen Bedingungen bestimmt werden müssen, damit Gleichung IV erfüllt wird. Hierzu soll aber die nöthige Untersuchung noch besonders ausgeführt werden. Man nehme desshalb das von a bis x erstreckte Integral, und setze

$$\text{VI)}\quad \int_a^x\left(4\cdot\delta y^2 + 2m\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$
$$= \zeta(x)\cdot\delta y_x^2 - \zeta(a)\cdot\delta y_a^2 - \int_a^x\left(\frac{d\delta y}{dx} + \varkappa(x)\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

wo $\zeta(x)$ und $\varkappa(x)$ zwei noch zu bestimmende Functionen von x sind. Differentiirt man auf beiden Seiten, und bringt man Alles auf die linke Seite des Gleichheitszeichens; so kekommt man

$$\text{VII)}\quad \left[4 - \frac{d\zeta(x)}{dx} + (\varkappa(x))^2\right]\cdot\delta y_x^2 + 2\cdot[m - \zeta(x) + \varkappa(x)]\cdot\delta y_x\cdot\frac{d\delta y}{dx} = 0$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Function δy_x von x, und bei jedem beliebigen Werthe des x; sie muss also in folgende zwei identische Gleichungen zerfallen:

$$\text{VIII)}\quad 4 - \frac{d\zeta(x)}{dx} + (\varkappa(x))^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \text{IX)}\quad m - \zeta(x) + \varkappa(x) = 0$$

Aus IX folgt $\varkappa(x) = -m + \zeta(x)$, und VIII geht über in

$$4 - \frac{d\zeta(x)}{dx} + (-m + \zeta(x))^2 = 0$$

woraus $\frac{d\zeta(x)}{4 + (-m + \zeta(x))^2} = dx$ folgt, wovon man als Integralgleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{-m + \zeta(x)}{2} = x + \frac{1}{2}B$$

bekommt, so dass

$$\text{X)}\quad \zeta(x) = m + 2\cdot\operatorname{tg}(2x + B)$$

ist, wo B ein ganz willkürlicher Constanter ist, zu dessen Bestimmung durchaus keine Bedingung existirt. Ferner ist

$$\text{XI)}\quad \varkappa(x) = -m + \zeta(x) = 2\cdot\operatorname{tg}(2x + B)$$

Gleichung VI geht also jetzt über in

Digitized by Google

$$\text{XII)} \quad \int_a^x \left(4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

$$= [m + 2 \cdot tg\,(2x + B)] \cdot \delta y_x^2 - [m + 2 \cdot tg\,(2a + B)] \cdot \delta y_a^2$$

$$- \int_a^x \left(\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot tg\,(2x + B)\right)^2 \cdot dx$$

Diese Gleichung ist und bleibt eine identische, man mag dem Constanten B was immer für einen beliebigen Werth beilegen, wovon man sich rückwärts überzeugen kann, dadurch dass man auf beiden Seiten wieder differentiirt. Da nun Gleichung XII für das zwischen den Gränzen a bis zu dem noch allgemeinen x erstreckte Integral gilt, so gilt sie nothwendig auch für das zwischen den Gränzen a bis zu dem bestimmten α erstreckte Integral, d. h. es ist nothwendig auch noch

$$\text{XIII)} \quad \int_a^\alpha \left(4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

$$= [m + 2 \cdot tg\,(2\alpha + B)] \cdot \delta y_\alpha^2 - [m + 2 \cdot tg\,(2a + B)] \cdot \delta y_a^2$$

$$- \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot tg\,(2x + B)\right)^2 \cdot dx$$

bei jedem beliebigen Werthe des Constanten B. Gleichung V geht also über in

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin\,(2\alpha + g) - \cos\,(2\alpha + g)\right] \cdot \delta^2 y_\alpha$$

$$+ 2 \cdot [m + 2 \cdot tg\,(2\alpha + B)] \cdot \delta y_\alpha^2 - 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin\,(2a + g) - \cos\,(2a + g)\right] \cdot \delta^2 y_a$$

$$- 2 \cdot [m + 2 \cdot tg\,(2a + B)] \cdot \delta y_a^2 - 2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot tg\,(2x + B)\right)^2 \cdot dx$$

Was man auch immer dem Constanten B für einen beliebigen Werth beilegen mag, so hat doch jedesmal der in XIV für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck den gleichen Werth, wie der in V für $\delta^2 U$ hergestellte; und man hat das in der That höchst bemerkenswerthe Ergebniss, dass der Werth des in XIV für $\delta^2 U$ aufgestellten Ausdruckes ganz unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe des Constanten B. Man hat dabei weiter nichts zu beachten, als dass man dem unter dem Integralzeichen befindlichen B jedesmal den nemlichen willkürlichen Werth beilegt, den man dem ausserhalb des Integralzeichens befindlichen B beilegt.

Vielleicht ist es für Manchen nicht überflüssig, wenn man ihn noch auf folgendem Wege zu der Erkenntniss führt, dass der Werth des in XIV für $\delta^2 U$ aufgestellten Ausdruckes von dem willkürlichen Werthe des Constanten B ganz unabhängig ist. Gleichung XIV lässt sich zunächst umformen in

$$\text{XV)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin\,(2\alpha + g) - \cos\,(2\alpha + g)\right] \cdot \delta^2 y_\alpha$$

$$+ 2 \cdot [m + 2 \cdot tg\,(2\alpha + B)] \cdot \delta y_\alpha^2 - 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin\,(2a + g) - \cos\,(2a + g)\right] \cdot \delta^2 y_a$$

$$- 2 \cdot [m + 2 \cdot tg\,(2a + B)] \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \int_a^\alpha \left[\left(4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - 2\,[m + 2 \cdot tg\,(2x + B)] \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - 4 \cdot [1 + tg\,(2x + B)^2] \cdot \delta y^2\right] \cdot dx$$

Nun ist $2 \cdot [m + 2 \cdot tg\,(2x + B)] \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 4 \cdot [1 + tg\,(2x + B)^2] \cdot \delta y^2 = \frac{1}{dx} \cdot d\,[(m + 2 \cdot tg\,(2x + B)) \cdot \delta y^2]$, und somit geht Gleichung XV über in

Digitized by Google

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin(2\alpha + g) - \cos(2\alpha + g)\right] \cdot \delta^2 y_\alpha$$

$$+ 2 \cdot [m + 2 \cdot \operatorname{tg}(2\alpha + B)] \cdot \delta y_\alpha^2 - 2 \cdot \left[\frac{mc}{2} \cdot \sin(2a + g) - \cos(2a + g)\right] \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ 2 \cdot [m + 2 \cdot \operatorname{tg}(2a + B)] \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \int_a^\alpha \left[4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{dx} \cdot d\left[(m + 2 \cdot \operatorname{tg}(2x + B)) \cdot \delta y^2\right]\right] \cdot dx$$

Derjenige unter dem Integralzeichen befindliche Theilsatz, welcher ein vollständiges Differential ist, lässt sich ohneweiters integriren; und thut man dieses, so reducirt sich Gleichung XVI gradezu auf V, wo der Constante B nicht weiter vorkommt. Da nun Gleichung XVI und XIV ganz die nemlichen sind, so ist vollkommen erwiesen, dass der willkürliche Werth des Constanten B keinen Einfluss hat auf den Werth des $\delta^2 U$.

Was auch für Umstände eintreten mögen, so kann man doch immer dem B einen solchen Werth beilegen, dass in XIV die ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze alle wegfallen; und somit ist erwiesen, dass $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ bleibt, d. h. ein Maximum-stand stattfindet.

Erster Fall. Soll bei $x = a$ die gesuchte Function y den bestimmt gegebenen Werth b haben, so dass $y_a = b$ ist; und soll ferner bei $x = \alpha$ die gesuchte Function y den bestimmt gegebenen Werth β haben, so dass $y_\alpha = \beta$ ist; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung IV fällt also von selbst weg, und die Constanten c und g bestimmen sich durch die Gleichungen

$$b = \frac{c}{2} \cdot \sin(2a + g), \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{c}{2} \cdot \sin(2\alpha + g)$$

Gleichung V reducirt sich dabei auf

$$\text{XVII)}\quad \delta^2 U = + 2 \cdot \int_a^\alpha \left[4 \cdot \delta y^2 + 2m \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

und Gleichung XIV reducirt sich auf

$$\text{XVIII)}\quad \delta^2 U = - 2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot \operatorname{tg}(2x + B)\right)^2 \cdot dx$$

Diese beiden für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrücke haben völlig einerlei Werth, wovon man sich überzeugt, wenn man Gleichung XVI zu Hilfe nimmt, integrirt, und dann beachtet, dass $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. ist. An dem in XVIII aufgestellten Ausdrucke erkennt man gradezu, dass er negativ ist; also ist auch der in XVII aufgestellte Ausdruck negativ.

Zweiter Fall. Ist weder der Werth von y_α noch von y_a gegeben; so wird die Gränzengleichung IV nur erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{mc}{2} \cdot \sin(2\alpha + g) - c \cdot \cos(2\alpha + g) = 0$$

und

$$\frac{mc}{2} \cdot \sin(2a + g) - c \cdot \cos(2a + g) = 0$$

stattfinden. Aus der ersten folgt $m \cdot \operatorname{tg}(2\alpha + g) = 2$, und aus der zweiten folgt $m \cdot \operatorname{tg}(2a + g) = 2$, so dass $\operatorname{tg}(2\alpha + g) = \operatorname{tg}(2a + g)$ sein müsste, was zu der weitern Gleichung $2\alpha + g = a \cdot \pi + 2a + g$ führen würde, wo a entweder Null oder irgend eine positive ganze Zahl bedeutet. Aus letzterer Gleichung würde $\alpha - a = \frac{a}{2} \cdot \pi$ folgen, und diese Gleichung zeigt an, dass die Differenz $(\alpha - a)$ bedingt sein müsste, was der Voraussetzung entgegen ist, weil a und α nach Belieben sollen genommen werden können. Dieser zweite Fall darf also nicht berücksichtigt werden.

Digitized by Google

Aufgabe 163.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha (\sqrt[3]{(px - m)^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical ist dreiförmig. Um bequem calculiren zu können, schreibe man lieber $(\sqrt[3]{1}) \cdot (px - m)^{\frac{2}{3}}$, und behandle nur $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt der gegebenen Gleichung bekommt man also

$$\text{II)}\quad U = (\sqrt[3]{1}) \cdot \int_a^\alpha (px - m)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle und dann seine beiden imaginären Formen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung.

Man lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine reelle Bedeutung bei, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha (px - m)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\delta U = \frac{2}{3} \cdot \int_a^\alpha \frac{x}{\sqrt[3]{px - m}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

und wenn man die gehörigen Umformungen ausführt, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$- \frac{2}{3} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Bei dieser Form kann nur der Nenner des zu $\frac{d\delta y}{dx}$ gehörigen Factors zu Null werden, d. h. man bekommt nur die Gleichung $px - m = 0$, woraus $y = E + m \cdot \lg \text{nat}\, x$ folgt. Dabei ist $U' = 0$. Für das Prüfungsmittel bekommt man denselben Ausdruck, welcher in Gleichung XIX aufgestellt werden wird. Man erkennt also, dass $U' = 0$ in der That ein Minimum-stand ist, und zwar bei jedem beliebigen Werthe des Constanten E. Aber eben weil dieser Constante von den Gränzen a und α nicht abhängig ist, so liefert die Function $y = E + m \cdot \lg \text{nat}\, x$ auch noch zwischen allen andern Gränzen $x = a'$ bis $x = \alpha'$ einen Minimum-stand, so lange $\alpha' > a'$.

Untersuchung der zweiten Form des δU.

Erstens. Soll $\delta U = 0$ werden, so hat man die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\quad \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Digitized by Google

Aus V folgt zunächst $\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}} = \sqrt[3]{A}$, und daraus folgt ferner $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{A} + \frac{m}{x}$. Die gesuchte Function ist also

$$\text{VII)} \quad y = \frac{x^3}{3A} + B + m \cdot \lg \text{nat } x$$

Gleichung VI geht nun über in

$$\text{VIII)} \quad \sqrt[3]{A} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

Mutirt man noch einmal, so bleibt in Folge alles Vorhergehenden nur

$$\delta^2 U = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{A} \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) - \frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{A^4} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Das Radical $\sqrt[3]{A}$ darf (hier in dieser ersten Abtheilung) nur als reell genommen werden. Da der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor $\left(-\frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{A^4} \cdot \frac{1}{x^2}\right)$ bei jedem Werthe des x negativ bleibt, so bleibt auch $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ, und es findet ein Maximumstand statt, aber nur zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$, weil die Constanten A und B durch die von diesen Gränzen abhängigen Bedingungen bestimmt werden müssen, damit Gleichung VIII erfüllt wird.

Erster Fall. Haben y_a und y_α bezüglich die festen Werthe b und β, so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Gleichung VIII fällt also jetzt von selbst weg, und die Constanten A und B bestimmen sich durch die beiden Gleichungen

$$\beta = \frac{\alpha^3}{3A} + B + m \cdot \lg \text{nat } \alpha, \text{ und } b = \frac{a^3}{3A} + B + m \cdot \lg \text{nat } a$$

Zweiter Fall. Wenn weder y_a und y_α feste Werthe haben, noch irgend eine Abhängigkeit zwischen ihnen stattfindet; so wird (nach §. 92) der Gleichung VIII nur genügt, wenn $A = 0$ ist. Dabei ist dann $y = \frac{x^3}{0} + B + m \cdot \lg \text{nat } x$. Da das Integral jetzt Null in den Nenner bekommt, so hat man eine Anzeige, dass man für diesen speciellen Fall die Integration noch einmal von Anfange an vornehmen, und dabei $A = 0$ berücksichtigen müsse. Aus Gleichung V folgt aber für den hiesigen Fall, dass auch $\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}} = 0$, oder, was dasselbe ist, dass $x \cdot \sqrt[3]{\frac{dx}{y \cdot dy - m \cdot dx}} = 0$ sein muss. Nun ist das x noch ganz allgemein; und so kann aus letzterer Gleichung nur $dx = 0$ folgen. Daraus gibt sich $x = C$, d. h. constant, was z. B. die Gleichung einer auf die Abscissenaxe senkrechten Graden ist. Für y lässt sich also nichts ermitteln, und somit kann dieser zweite Fall nicht weiter berücksichtigt werden.

Dritter Fall. Wenn zwar y_a und y_α ihrem Werthe nach nicht gegeben sind, dagegen zwischen ihnen die Gleichung

$$\text{IX)} \quad a \cdot y_\alpha + \alpha \cdot y_a = y_a \cdot y_\alpha$$

stattfindet; so folgt daraus $\delta y_\alpha = -\frac{\alpha - y_\alpha}{a - y_a} \cdot \delta y_a$, und $\delta^2 y_\alpha = -\frac{\alpha - y_\alpha}{a - y_a} \cdot \delta^2 y_a - 2 \cdot \frac{\alpha - y_\alpha}{(a - y_a)^2} \cdot \delta y_a^2$. Gleichung VIII geht also jetzt über in

$$\text{X)} \quad -\sqrt[3]{A} \cdot \frac{a + \alpha - y_a - y_\alpha}{a - y_a} \cdot \delta y_a = 0$$

d. h. es ist $a + \alpha = y_a + y_\alpha$, welche Gleichung in Verbindung mit IX und mit $y_a = \frac{a^3}{3A} + B + m \cdot \lg \text{nat } a$ und mit $y_\alpha = \frac{\alpha^3}{3A} + B + m \cdot \lg \text{nat } \alpha$ hinreicht, die vier Stücke A, B, y_a, y_α zu bestimmen. Zugleich wird jetzt

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = -\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{A}\cdot\frac{\alpha - y_\alpha}{(a - y_a)^2}\cdot\delta y_a^2 - \frac{2}{9}\cdot\sqrt[3]{A^4}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Um sich zu überzeugen, dass dieser für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck unter allen Umständen negativ ist, führe man die gewöhnliche Umformung aus, und man bekommt zunächst

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{A}\cdot\left[2\cdot\frac{\alpha - y_\alpha}{(a - y_a)^2}\cdot\delta y_a^2 + \frac{A}{3c+\alpha^3}\cdot\delta y_\alpha^2 - \frac{A}{3c+a^3}\cdot\delta y_a^2\right]$$
$$-\frac{2}{9}\cdot\sqrt[3]{A^4}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{3x}{3c+x^3}\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

Daraus eliminire man δy_α, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = -\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{A}\cdot\left[2\cdot\frac{\alpha - y_\alpha}{(a - y_a)^2} + \frac{A}{3c+\alpha^3}\cdot\left(\frac{\alpha - y_\alpha}{a - y_a}\right)^2 - \frac{A}{3c+a^3}\right]\cdot\delta y_a^2$$
$$-\frac{2}{9}\cdot\sqrt[3]{A^4}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{3x}{3c+x^3}\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

Nun ist bekannt, dass der Werth des $\delta^2 U$ unabhängig ist von dem willkürlichen Werthe des Constanten c. Man gebe also dem c einen solchen Werth, dass der ausserhalb des Integralzeichens befindliche Theilsatz zu Null wird, d. h. dass die Gleichung

$$\text{XIV)}\quad 2\cdot\frac{\alpha - y_\alpha}{(a - y_a)^2} + \frac{A}{3c+\alpha^3}\cdot\left(\frac{\alpha - y_\alpha}{a - y_a}\right)^2 - \frac{A}{3c+a^3} = 0$$

stattfindet. Daraus ergeben sich zwei Werthe für c, und jeder macht, dass Gleichung XIII sich auf

$$\text{XV)}\quad \delta^2 U = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt[3]{A^4}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{3x}{3c+x^3}\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

zurückzieht, wo man aber dem c einen aus XIV sich ergebenden Werth beigelegt denken muss. An dem Ausdrucke XV erkennt man gradezu, dass er negativ ist; es ist also auch der mit ihm gleichbedeutende Ausdruck XI negativ. Somit findet ein Maximum-stand statt.

Zweitens. Lässt man in Gleichung IV den Nenner des zu dem unter dem Integralzeichen stehenden δy gehörigen Factors zu Null werden, so bekommt man zunächst die Hauptgleichung

$$\text{XVI)}\quad px - m = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XVII)}\quad y = E + m\cdot \lg\text{nat}\, x$$

Die in Gleichung IV ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze nehmen bei jedem Werthe des Constanten E jetzt folgende Form

$$\text{XVIII)}\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha}{0}\cdot\delta y_\alpha - \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{0}\cdot\delta y_a$$

an. Daran erkennt man, dass die Bedingung, wodurch der Constante E bestimmt wird, nicht nothwendig von den Gränzen a und α abhängig zu sein braucht. Hier ist $U' = 0$ ganz unabhängig von den Werthen a und α. Aus Gleichung XVI folgt $p = \frac{m}{x}$; und man bekommt das Prüfungsmittel, indem man ΔU an die Stelle des U, und $\left(\frac{m}{x} + \varkappa\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{m}{x} + \varkappa\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ statt p in Gleichung III überall einsetzt, d. h. man bekommt

$$\Delta U = \int_a^\alpha\left(\varkappa\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} dx = \varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot dx$$

oder

$$\text{XIX)}\quad \Delta U = \varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa}{1.2}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2.3}\cdot\frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}}\cdot dx$$

Digitized by Google

Daran erkennt man, dass in der That ein Minimum-stand stattfindet, und zwar bei jedem beliebigen Werthe des Constanten E. Aber eben weil dieser Constante von den Gränzen a und α nicht abhängig zu sein braucht, so liefert die Function $y = E + m \cdot \lg nat\, x$ auch noch zwischen jeder andern Gränze $x = a'$ bis $x = \alpha'$ einen Minimum-stand, so lange $\alpha' > a'$.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\overset{3}{\sqrt{1}})$ seine beiden imaginären Formen bei. Man bekommt dann zuerst

$$\delta U = \frac{2}{3} \cdot (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \int_a^\alpha \frac{x}{\sqrt[3]{px - m}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

und nach gehöriger Umformung bekommt man

$$\delta U = \frac{2}{3} \cdot (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{2}{3} \cdot (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \frac{2}{3} \cdot (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Hier kann man, wie schon in der ersten Abtheilung, nur $px - m = 0$ setzen. Daraus folgt $y = E + m \cdot \lg nat\, x$. Dabei ist $U' = 0$, und

$$\text{XX)} \quad \Delta U = (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{x}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

woran man erkennt, dass $U' = 0$ ein Einzel-stand ist.

Untersuchung der zweiten Form des δU.

Erstens. Aus $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x}{\sqrt[3]{px - m}}\right) = 0$ folgt $y = \frac{x^3}{3A} + B + m \cdot \lg nat\, x$. Als Gränzengleichung hat man

$$(\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \sqrt[3]{A} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

wobei man auch den gemeinschaftlichen Factor $(\overset{3}{\sqrt{1}})$ weglassen kann, so dass man genau wieder Gleichung VIII hat, und die Constanten A und B ebenso bestimmen kann, wie in der ersten Abtheilung. Ferner ist $U' = (\overset{3}{\sqrt{1}}) \cdot \frac{\alpha^3 - a^3}{3A^2}$ imaginär, also dieser Fall nicht weiter zu beachten.

Zweitens. Setzt man $px - m = 0$, so ist $y = E + m \cdot \lg nat\, x$. Ferner ist $U' = 0$, und für das Prüfungsmittel bekommt man den bereits in XX aufgestellten Ausdruck. Man erkennt also, dass auch jetzt das $U' = 0$ ein Einzel-stand ist.

Aufgabe 164.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \left(A + m^2 \cdot (\sqrt[3]{x - py})^2\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical $(\sqrt[3]{x - py})^2$ ist dreiförmig. Um bequem calculiren zu können, schreibe

Digitized by Google

man lieber $(\sqrt[3]{1})^2 \cdot (x - py)^{\frac{2}{3}}$, und behandle nur $(\sqrt[3]{1})^2$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man jetzt

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \left(A + m^2 \cdot (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (x - py)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx$$

Um die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem $(\sqrt[3]{1})^2$ zuerst seine reelle, und dann seine beiden imaginären Bedeutungen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $(\sqrt[3]{1})^2$ nur seine reelle Bedeutung beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(A + m^2 \cdot (x - py)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx$$

Daraus folgt, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, für die zweite folgender Ausdruck

$$\text{IV)}\quad \delta U = -\frac{2m^2}{3} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x - py}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \frac{2m^2}{3} \cdot \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x - py}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \frac{2m^2}{9} \cdot \int_a^\alpha \frac{1 - p^2 - y \cdot \frac{dp}{dx}}{(x - py)^{\frac{4}{3}}} \cdot y \cdot \delta y \cdot dx$$

Erstens. Soll $\delta U = 0$ werden, so hat man die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad \left(1 - p^2 - y \cdot \frac{dp}{dx}\right) \cdot y = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\quad \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x - py}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x - py}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

A) Die Gleichung V wird erfüllt, wenn $y = 0$, d. h. wenn y eine identische Function von x ist. Dabei wird aber auch die Gränzengleichung VI erfüllt, unabhängig von jedem Werthe des x, also auch unabhängig von den grade dem a und α beigelegten Werthen. Hierbei ist

$$\delta^2 U = -\frac{4 \cdot m^2}{3} \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

woran man erkennt, dass $U' = A \cdot (\alpha - a) + \frac{3 \cdot m^2}{5} \cdot (\alpha^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}})$ weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist.

B) Die Gleichung V wird aber auch erfüllt, wenn

$$\text{VII)}\quad 1 - p^2 - y \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

gesetzt wird. Diese Gleichung geht zunächst über in $\frac{d(py)}{dx} = 1$, und daraus folgt $y \cdot p = x + \frac{1}{2} C$; also ist

$$\text{VIII)}\quad y^2 = x^2 + Cx + E$$

Gleichung VI geht über in

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{C}} \left[(\sqrt[3]{\alpha^2 + C \cdot \alpha + E}) \cdot \delta y_\alpha - (\sqrt[3]{a^2 + C \cdot a + E}) \cdot \delta y_a\right] = 0$$

In Folge alles Vorhergehenden ist aber jetzt

Digitized by Google

$$\delta^2 U = -\frac{2 \cdot m^2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3 \cdot \sqrt[3]{C}} \cdot [(\sqrt{\alpha^2 + C\alpha + E}) \cdot \delta^2 y_\alpha - (\sqrt{a^2 + C \cdot a + E}) \cdot \delta^2 y_a]$$

$$-\frac{4 \cdot m^2 \cdot \sqrt[3]{2}}{9 \cdot \sqrt[3]{C^4}} \cdot \int_a^\alpha \left[p^2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (3x - 2py) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + y^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Da der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor $\left(-\frac{4m^2 \cdot \sqrt[3]{2}}{9 \cdot \sqrt[3]{C^4}} \; y^2\right)$ bei jedem Werthe des x negativ bleibt, so ist unter allen Umständen auch $\delta^2 U$ negativ, und findet ein Maximum-stand statt, aber nur zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$, weil die Constanten C und E durch die von diesen Gränzen abhängigen Bedingungen bestimmt werden müssen, damit Gleichung IX erfüllt wird.

Erster Fall. Haben y_a und y_α die festen Werthe b und β, so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst weg, und die Constanten bestimmen sich durch die Gleichungen

$$\beta^2 = \alpha^2 + C \cdot \alpha + E \quad \text{und} \quad b^2 = a^2 + C \cdot a + E$$

Zweiter Fall. Haben y_a und y_α keine festen Werthe, so sind δy_a und δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. (Man sehe §. 92.) Gleichung IX zerfällt also jetzt in folgende zwei:

$$\alpha^2 + C \cdot \alpha + E = 0, \quad \text{und} \quad a^2 + C \cdot a + E = 0$$

wodurch die beiden Constanten bestimmt werden können.

Zweitens. Lässt man in Gleichung IV den Nenner des zu dem unter dem Integralzeichen stehenden δy gehörigen Factors zu Null werden, so bekommt man zunächst die Hauptgleichung

$$\text{X)} \quad x - y \cdot p = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XI)} \quad y^2 = x^2 + F$$

Die in Gleichung IV ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze nehmen bei jedem Werthe des Constanten F jetzt folgende Form

$$\text{XII)} \quad -\frac{2 \cdot m^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + F}}{0} \cdot \delta y_\alpha + \frac{2 \cdot m^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + F}}{0} \cdot \delta y_a$$

an. Daran erkennt man, dass die Bedingung, wodurch der Constante F bestimmt wird, nicht nothwendig von den Gränzen a und α abhängig zu sein braucht. Hier ist $U' = A \cdot (\alpha - a)$. Zur Gewinnung des Prüfungsmittels setze man

$\left((\sqrt{x^2 + F}) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y \, \ldots \ldots\right)$ oder kurzweg $((\sqrt{x^2 + F}) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y

und

$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + F}} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + F}} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ statt p

in Gleichung III ein, und man bekommt

$$\text{XIII)} \quad \Delta U = m^2 \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{(x^2 + F) \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + x \cdot \mathfrak{P}}{\sqrt{x^2 + F}} - x \cdot \mathfrak{P} \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

Daran erkennt man, dass in der That bei jedem beliebigen Werthe des Constanten F ein Minimum-stand stattfindet.

Aber eben, weil der Constante F von den Gränzen a und α nicht abhängig zu sein braucht, so liefert die Function $y^2 = x^2 + F$ auch noch zwischen jeder andern Gränze $x = a'$ bis $x = \alpha'$ einen Minimum-stand, wenn nur $\alpha' > a'$ ist.

Digitized by Google

Zweite Abtheilung.

Nun kehre man wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})^2$ seine beiden imaginären Formen bei. Man bekommt dann, wenn man die erste Form des δU nicht weiter beachten will, für die zweite folgenden Ausdruck

$$\delta U = -\frac{2\cdot m^2}{3}\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x-py}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha + \frac{2m^2}{3}\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x-py}}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$-\frac{2\cdot m^2}{9}\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\int_a^\alpha\frac{1-p^2-y\cdot\frac{dp}{dx}}{(x-py)^{\frac{4}{3}}}\cdot y\cdot\delta y\cdot dx$$

Erstens. A) Setzt man $y = 0$, so ist $U' = A\cdot(\alpha - a) + \frac{3m^2}{5}\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot(\alpha^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}})$ imaginär, also dieser Zustand nicht weiter zu beachten.

B) Setzt man $1 - p^2 - y\cdot\frac{dp}{dx} = 0$, so bekommt man $y^2 = x^2 + Cx + E$; und als Gränzengleichung hat man

$$-\frac{2\cdot m^2}{3}\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{C}}\cdot\left[(\sqrt{\alpha^2 + C\cdot\alpha + E})\cdot\delta y_\alpha - (\sqrt{a^2 + Ca + E})\cdot\delta y_a\right] = 0$$

wobei man auch den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2m^2}{3}\cdot(\sqrt[3]{1})^2$ weglassen kann, so dass man genau wieder Gleichung IX hat, und die Constanten C und E ebenso bestimmen kann, wie in der ersten Abtheilung. Ferner ist

$$U' = \left[A + m^2\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot C\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot(\alpha - a)$$

imaginär; also auch dieser Fall nicht weiter zu beachten.

Zweitens. Setzt man $x - yp = 0$, so bekommt man $y^2 = x^2 + F$. Ferner ist $U' = A\cdot(\alpha - a)$, und

$$\Delta U = m^2\cdot(\sqrt[3]{1})^2\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{(x^2+F)\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{dx} + x\cdot\mathfrak{P}}{\sqrt{x^2+F}} - x\cdot\mathfrak{P}\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot dx$$

woran man erkennt, dass jetzt ein Einzel-stand stattfindet.

Aufgabe 165.

Man sucht y als solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha\left(A - m^2\cdot\sqrt[3]{(y+px)^4}\right)\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical $\sqrt[3]{(y+px)^4}$ ist dreiförmig. Um bequem calculiren zu können, schreibe man lieber $(\sqrt[3]{1})\cdot(y+px)^{\frac{4}{3}}$, und behandle nur $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man jetzt

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha\left(A - m^2\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot(y+px)^{\frac{4}{3}}\right)\cdot dx$$

Um die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle,

Digitized by Google

und dann seine beiden imaginären Bedeutungen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $(\sqrt[3]{1})$ nur seine reelle Bedeutung beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(A - m^2 \cdot (y + px)^{\frac{4}{3}}\right) \cdot dx$$

Daraus folgt, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, für die zweite folgender Ausdruck:

$$\text{IV)}\quad \delta U = -\frac{4m^2}{3} \cdot \left(x \cdot \sqrt[3]{y + px}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \frac{4m^2}{3} \cdot \left(x \cdot \sqrt[3]{y + px}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$-\frac{4m^2}{9} \cdot \int_a^\alpha \frac{x \cdot \left(2p + x \cdot \frac{dp}{dx}\right)}{(y + px)^{\frac{2}{3}}} \cdot \delta y \cdot dx$$

Erstens. Soll $\delta U = 0$ werden, so hat man die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad 2p + x \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\quad \left(x \cdot \sqrt[3]{y + px}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(x \cdot \sqrt[3]{y + px}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Aus V folgt zunächst $p + \frac{d(px)}{dx} = 0$, und daraus folgt weiter $y + px = B$, so dass

$$\text{VII)}\quad xy = Bx + C$$

die gesuchte Function ist. Gleichung VI geht nun über in

$$\text{VIII)}\quad \sqrt[3]{B} \cdot (\alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a) = 0$$

In Folge alles Vorhergehenden bekommt man ferner

$$\delta^2 U = -\frac{4m^2}{3} \cdot \sqrt[3]{B} \cdot (\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - a \cdot \delta^2 y_a) - \left(\frac{2m}{3 \cdot \sqrt[3]{B}}\right)^2 \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Nun können noch einzelne Fälle für die Gränzengleichung aufgestellt werden, was aber hier unterbleibt.

Zweitens. Lässt man in Gleichung IV den Nenner des zu dem unter dem Integralzeichen stehenden δy gehörigen Factors zu Null werden, so bekommt man zunächst die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad y + px = 0$$

und somit ist jetzt

$$\text{X)}\quad xy = E$$

Die in Gleichung IV ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze nehmen bei jedem Werthe des Constanten E jetzt folgende Form

$$\text{XI)}\quad -0 \cdot \delta y_\alpha + 0 \cdot \delta y_a$$

an. Daran erkennt man, dass die Bedingung, wodurch der Constante E bestimmt wird, nicht nothwendig von den Gränzen a und α abhängig zu sein braucht. Hier ist $U' = A \cdot (\alpha - a)$. Zur Gewinnung des Prüfungsmittels setze man

$$\left(\frac{E}{x} + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{E}{x} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt } y$$

und

$$\left(-\frac{E}{x^2} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(-\frac{E}{x^2} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right) \text{ statt } p$$

Digitized by Google

in Gleichung III überall ein. Dann bekommt man

$$\text{XII)}\quad \varDelta U = -m^2 \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot \int_a^{\alpha} \left(\mathfrak{P} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} \cdot x\right)^{\frac{4}{3}} \cdot dx$$

Daran erkennt man, dass in der That bei jedem beliebigen Werthe des Constanten E ein Maximum-stand stattfindet.

Aber eben, weil der Constante E von den Gränzen a und α nicht abhängig zu sein braucht, so liefert die Function $x \cdot y = E$ auch noch zwischen jeder Gränze $x = a'$ bis $x = \alpha'$ einen Maximum-stand, wenn nur $\alpha' > a'$.

Man hat hier zwei verschiedene Functionen y von x. Die erste liefert zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ einen Maximum-stand, die andere liefert sogar zwischen jeden beliebigen Gränzen einen Maximum-stand. Es ist aber nicht überflüssig, hier noch einmal darauf aufmerksam zu machen, dass man die gesuchte Function jedesmal nur mit den ihr stetsfort nächstanliegenden (d. h. nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden) Nachbarfunctionen vergleicht. Insoferne also in obigen beiden Fällen die primären Zustände des U grösser sind, als bei den (der für y gefundenen Function stetsfort nächstanliegenden) Nachbarfunctionen; insoferne ist auch in beiden Fällen ein Maximum-stand vorhanden.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine imaginären Bedeutungen bei. Man bekommt dann, wenn man die erste Form des δU nicht weiter beachten will, für die zweite folgenden Ausdruck:

$$\delta U = -\frac{4 \cdot m^2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot (x \cdot \sqrt[3]{y + px})_{\alpha} \cdot \delta y_{\alpha} + \frac{4 \cdot m^2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot (x \cdot \sqrt[3]{y + px})_a \cdot \delta y_a$$

$$-\frac{4m^2}{9} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \int_a^{\alpha} \frac{x \cdot \left(2p + x \cdot \frac{dp}{dx}\right)}{(y + px)^{\frac{2}{3}}} \cdot \delta y \cdot dx$$

Erstens. Aus $2p + x \cdot \frac{dp}{dx} = 0$ folgt $xy = Bx + C$, und als Gränzengleichung hat man

$$(\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{B} \cdot (\alpha \cdot \delta y_{\alpha} - a \cdot \delta y_a) = 0$$

wobei man auch den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt[3]{1}$ weglassen kann, so dass man genau wieder Gleichung VIII hat, und die Constanten B und C ebenso bestimmen kann, wie in der ersten Abtheilung. Ferner ist $U' = \left[A - m^2 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt[3]{B^4}\right] \cdot (\alpha - a)$ imaginär, also dieser Fall nicht weiter zu beachten.

Zweitens. Setzt man $y + px = 0$, so bekommt man $xy = E$. Ferner ist $U' = A \cdot (\alpha - a)$, und

$$\varDelta U = -m^2 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot x^{\frac{4}{3}} \cdot \int_a^{\alpha} \left(\mathfrak{P} + \frac{d\mathfrak{P}}{dx} \cdot x\right)^{\frac{4}{3}} \cdot dx$$

woran man erkennt, dass $U' = A \cdot (\alpha - a)$ ein Einzel-stand ist.

Aufgabe 166.

Man sucht für y eine solche Function von x, und für a und α solche Werthe, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^{\alpha} (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2) \cdot dx$$

wo g nur als positiv gelten soll, ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Digitized by Google

Durch gemischtes Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$
$$- (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \left((4y - 4x - 2px) \cdot \delta y + 2x \cdot (px - y) \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right) \cdot dx$$

Durch die gewöhnliche Umformung bekommt man

$$\text{III)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$
$$- (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ 2\alpha \cdot (px - y)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2a \cdot (px - y)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left(4y - 4x - 2px - \frac{d(2x \cdot (px - y))}{dx} \right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Untersuchung der ersten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. Man lasse sowohl den bei δy als auch den bei $\frac{d\delta y}{dx}$ befindlichen Factor zu Null werden, d. h. man setze folgende zwei identische Gleichungen:

$$\text{IV)} \quad 4y - 4x - 2px = 0, \text{ und V)} \quad px - y = 0$$

Integrirt man Gleichung V, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad y = A \cdot x$$

wo A ein noch zu bestimmender Constanter ist. Führt man jetzt Ax statt y, und A statt p in IV ein; so gibt sich $A = 2$, so dass

$$\text{VII)} \quad y = 2x$$

eine Function ist, welche den beiden Gleichungen IV und V zugleich genügt, und, eben weil sie keinen willkürlichen Constanten mehr enthält, von den Gränzen a und α ganz unabhängig ist. (Man sehe Bd. I. S. 284.) Die in Gleichung II ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze gehen jetzt über in

$$\text{VIII)} \quad (\alpha^2 - 6g \cdot \alpha - 16 \cdot g^2) \cdot \vartheta\alpha - (a^2 - 6g \cdot a - 16 \cdot g^2) \cdot \vartheta a = 0$$

Da hier zwischen $\vartheta\alpha$ und ϑa durchaus keine Abhängigkeit stattfindet, so zerlegt sich diese Gleichung in folgende zwei:

$$\text{IX)} \quad \alpha^2 - 6g\alpha - 16 \cdot g^2 = 0, \text{ und X)} \quad a^2 - 6g \cdot a - 16 \cdot g^2 = 0$$

Daraus folgt

$$\alpha = 3g \pm 5g, \qquad \text{und} \qquad a = 3g \pm 5g$$

Weil aber $\alpha > a$ sein muss, so kann man nur

$$\alpha = 8g \qquad \text{und} \qquad a = -2g$$

nehmen. Unterwirft man Gleichung II noch einmal einer gemischten Mutation, und führt man alle Abkürzungen aus; so gibt sich zuletzt

$$\text{XI)} \quad {}_{(}\delta^2_{)}U = 10g \cdot (\vartheta\alpha^2 + \vartheta a^2) + 2 \cdot \int_a^\alpha \left(\left(x \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \delta y \right)^2 + \delta y^2 \right) \cdot dx$$

Da nun g nur als positiv gelten soll, so erkennt man, dass jetzt ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfindet.

Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{XII)} \quad 4y - 4x - 2px - \frac{d(2x \cdot (px - y))}{dx} = 0$$

Da die Gleichung V, d. h. die Gleichung $px - y = 0$ durch die Function $y = 2x$ identisch wird; so wird auch der totale Differentialquotient $\frac{d(2x \cdot (px - y))}{dx}$ durch $y = 2x$ identisch. Gleichung XII reducirt sich also auf $4y - 4x - 2px = 0$, welches wiederum

Digitized by Google

Gleichung IV ist, und, wie man bereits gesehen hat, ebenfalls durch $y = 2x$ identisch gemacht wird. Es ist also $y = 2x$ ein Integral zu Gleichung XII, welche, wenn man die angezeigte Differentiation ausführt, auf folgende Form

$$\text{XIII)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^2} \cdot y = -\frac{2}{x}$$

gebracht werden kann. Dieses ist eine vollständige lineäre Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und führt zu einem allgemeinen Integral mit zwei willkürlichen Constanten. Da nun $y = 2x$ der Gleichung XII, mithin auch der Gleichung XIII genügt; so versuche man, ob ihr allgemeines Integral folgende Form

$$\text{XIV)} \quad y = 2x + A \cdot x^m + B \cdot x^n$$

wo A und B zwei willkürliche Constanten sind, haben kann. Aus letzterer Gleichung folgt

$$p = 2 + m \cdot A \cdot x^{m-1} + nB \cdot x^{n-1}$$

$$q = m(m-1) \cdot A \cdot x^{m-2} + n(n-1) \cdot B \cdot x^{n-2}$$

Substituirt man diese Ausdrücke für y, p, q in XIII; so bekommt man

$$\text{XV)} \quad -(m^2 + m - 3) \cdot A \cdot x^{m-2} - (n^2 + n - 3) \cdot B \cdot x^{n-2} = 0$$

Diese Gleichung soll bei jedem Werthe des x erfüllt werden, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet

$$m^2 + m - 3 = 0, \quad \text{und} \quad n^2 + n - 3 = 0$$

Daraus folgt $m = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13})$, und $n = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13})$; und wenn man bei m das obere und bei n das untere Zeichen gelten lässt, so geht Gleichung XIV über in

$$\text{XVI)} \quad y = 2x + A \cdot x^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} + B \cdot x^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}$$

wodurch, eben weil A und B zwei noch willkürliche Constanten sind, in der That das allgemeine Integral von Gleichung XIII dargestellt ist.

Nun ist man so weit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Schreibt man für die Gränzen durchaus keine Bedingung vor, so sind die vier Elemente ϑa, $\vartheta \alpha$, δy_a, δy_α ganz unabhängig voneinander. Sie fallen also nur dadurch aus Gleichung III weg, dass man ihre Coefficienten zu Null werden lässt, d. h. dass man einzeln

$$\text{XVII)} \quad (px - y)_\alpha = 0, \qquad \text{XVIII)} \quad (px - y)_a = 0$$

$$\text{XIX)} \quad (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_\alpha = 0$$

$$\text{XX)} \quad (5 \cdot x^2 - 6gx - 16 \cdot g^2 + y^2 - 4xy + (px - y)^2)_a = 0$$

setzt. Führt man jetzt für y und p die Ausdrücke in XVII und XVIII ein, so gehen sie bezüglich über in

$$(m-1) \cdot A \cdot \alpha^m + (n-1) \cdot B \cdot \alpha^n = 0$$

$$(m-1) \cdot A \cdot a^m + (n-1) \cdot B \cdot a^n = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt $A = 0$ und $B = 0$, so dass hier, wo keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sind, nur das besondere Integral

$$\text{XXI)} \quad y = 2x$$

genommen werden darf. Die Gleichungen XIX und XX reduciren sich jetzt auf

$$\alpha^2 - 6g \cdot \alpha - 16 \cdot g^2 = 0, \quad \text{und} \quad a^2 - 6g \cdot a - 16 \cdot g^2 = 0$$

Die zweite Form des $(\delta)U$ liefert also hier, wo keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sind, ganz die nemlichen Resultate, die sich aus der ersten Form des $(\delta)U$ ergeben haben.

Andere Fälle, wo Gränzbedingungen vorkommen, kann man sich nach Belieben aufstellen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist besonders desshalb beachtenswerth, weil sie ein schönes Beispiel liefert, dass auch schon aus der ersten Form des $(\delta)U$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes folgen

Digitized by Google

kann. Grade die erste Form ist bisher von allen andern Schriftstellern unbeachtet geblieben; und dennoch trifft es sich häufig, dass die zwei allgemeinen Gleichungen, auf die sie führt, einander nicht widersprechen, sondern von einer und derselben Function erfüllt werden.

Aufgabe 167.

Man soll diejenige ebene Curve suchen, deren zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckter Bogen, wenn er um die Abscissenaxe rotirt, die kleinste Oberfläche erzeugt.

Hier wird verlangt, dass die von der gesuchten Curve erzeugte Fläche durch eine Function der Abscisse ausgedrückt, und hierauf von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt werde. Da nun die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist, so muss (wie aus der Theorie der Complanation bekannt) die erste Ableitung der Fläche bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein. Man kennt aber die gesuchte Curve noch nicht; desshalb weiss man auch noch nicht, ob y bei den zwischen a und α liegenden Werthen des x positiv ist. Man ist also auch nicht befugt, für die erste Ableitung der Fläche den eindeutigen Ausdruck $2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ zu setzen, sondern man ist gezwungen, vorläufig den zweideutigen Ausdruck $2\pi \cdot y \cdot \mathbb{W}\overline{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ zu behalten; und wenn man die gesuchte Curve gefunden hat, dann wird man dem Radical diejenige Bedeutung beilegen, bei welcher die erste Ableitung der Fläche für jeden zwischen a und α liegenden Werth des x positiv wird. Die Aufgabe ist also: Man sucht y als solche Function von x, dass

$$U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot y \cdot (\mathbb{W}\overline{1 + p^2}) \cdot dx$$

kleiner wird, als bei jeder andern der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurve der Fall sein kann.

Man erkennt gradezu, dass man die erste Form des δU nicht beachten kann; für die zweite Form bekommt man aber folgenden Ausdruck

$$\delta U = 2\pi \cdot \left(\frac{p \cdot y}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2\pi \cdot \left(\frac{p \cdot y}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left(\mathbb{W}\overline{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{py}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Soll $\delta U = 0$ werden, so hat man die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad \mathbb{W}\overline{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{py}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{II)} \quad \left(\frac{py}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{py}{\mathbb{W}\overline{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Führt man die in I angedeutete Differentiation aus, und berücksichtigt man, dass $dy = p \cdot dx$; so gibt sich $\frac{dx}{y} = \frac{dp}{1 + p^2}$. Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{dy}{dx} = p$, so bekommt man $\frac{dy}{y} = \frac{p \cdot dp}{1 + p^2}$; also ist $\lg \text{nat} \frac{y}{c} = \lg \text{nat} \mathbb{W}\overline{1 + p^2}$, und daraus folgt

$$dx = \frac{c \cdot dy}{\mathbb{W}\overline{y^2 - c^2}}$$

Die gesuchte Gleichung ist daher

$$\text{III)} \quad x = c \cdot \lg \text{nat} \frac{y + \mathbb{W}\overline{y^2 - c^2}}{g}$$

Digitized by Google

wo c und g die noch zu bestimmenden Constanten sind. Die Gränzengleichung geht nun über in

$$\text{IV)}\quad \left(\sqrt{y_\alpha^2 - c^2}\right)\cdot \delta y_\alpha - \left(\sqrt{y_a^2 - c^2}\right)\cdot \delta y_a = 0$$

Aus III folgt zunächst $e^{\frac{x}{c}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{g}$, und daraus folgt weiter $\left(g \cdot e^{\frac{x}{c}} - y\right)^2 = y^2 - c^2$; und somit ist

$$\text{V)}\quad y = \frac{1}{2g}\cdot\left(g^2 \cdot e^{\frac{x}{c}} + c^2 \cdot e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

Da e als Basis des natürlichen Logarithmensystems eine positive Zahl ist, so erkennt man an letzterer Gleichung, dass y mit g dasselbe unveränderliche Zeichen behält. Alle Ordinaten der gesuchten Curve liegen also auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe. Die Curve selbst ist die gemeine Kettenlinie, welche der Abscissenaxe ihre erhabene Seite zukehrt. Es ist nemlich $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{c^2}$; und somit erkennt man, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ und y einerlei Zeichen haben, in welchem Falle jede Curve ihre erhabene Seite der Abscissenaxe zukehrt. Die Gränzengleichung II oder IV kann auch dargestellt werden durch

$$\text{VI)}\quad \left(g^2 \cdot e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{c}}\right)\cdot \delta y_\alpha - \left(g^2 \cdot e^{\frac{a}{c}} - c^2 \cdot e^{-\frac{a}{c}}\right)\cdot \delta y_a = 0$$

In Folge alles Vorhergehenden bekommt man ferner

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = 2\pi\cdot\left(\sqrt{y_\alpha^2 - c^2}\right)\cdot \delta^2 y_\alpha - 2\pi\cdot\left(\sqrt{y_a^2 - c^2}\right)\cdot \delta^2 y_a$$
$$+ 2\pi\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot \delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{y}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor ist $\frac{y}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ oder $\frac{1}{(1+p^2)^2}\cdot y\cdot\sqrt{1+p^2}$, also positiv, eben weil nur desshalb das zweideutige Radical $\sqrt{1+p^2}$ gesetzt worden ist, um ihm die Eigenschaft beilegen zu können, durch welche das Product $y\cdot\sqrt{1+p^2}$ positiv wird. Alle diejenigen Kettenlinien, bei denen die Gränzengleichung (siehe II oder IV oder VI) erfüllt wird, liefern also einen Minimum-stand.

Erster Fall. Sind zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, so ist (nach §. 87) $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Dabei fällt die Gränzengleichung von selbst weg, und die Constanten bestimmen sich durch die Gleichungen

$$1)\quad b = \frac{1}{2g}\cdot\left(g^2\cdot e^{\frac{a}{c}} + c^2\cdot e^{-\frac{a}{c}}\right) \text{ und } 2)\quad \beta = \frac{1}{2g}\cdot\left(g^2\cdot e^{\frac{\alpha}{c}} + c^2\cdot e^{-\frac{\alpha}{c}}\right)$$

so dass hiermit die Aufgabe vollständig bestimmt ist.

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Curve von dem festen Punkte (a, b) bis zu der zur Abscisse α gehörigen senkrechten Graden genommen werden; so ist auch jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc., dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. sind willkürlich. Es folgt also aus der Gränzengleichung

$$g^2\cdot e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2\cdot e^{-\frac{\alpha}{c}} = 0,\ \text{d. h. } g = c\cdot e^{-\frac{\alpha}{c}}$$

Führt man diesen Ausdruck in die Gleichungen 1 und 2 des vorigen Falles ein, so ergibt sich der Werth des c und des β. Namentlich ist $\beta = c$, so dass in diesem Falle der Endpunkt der Curve so tief als möglich liegt.

Dritter Fall. Ist weiter nichts vorgeschrieben, als dass die Curve zwischen zwei auf der Abscissenaxe senkrechten (unbestimmt verlängerten) Graden genommen werden soll; so muss Gleichung VI sich in folgende zwei zerlegen:

Digitized by Google

$$g^2 \cdot e^{\frac{\alpha}{c}} - c^2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{c}} = 0 \text{ und } g^2 \cdot e^{\frac{a}{c}} - c^2 \cdot e^{-\frac{a}{c}} = 0$$

Daraus folgt $g = c \cdot e^{-\frac{\alpha}{c}}$ und $g = c \cdot e^{-\frac{a}{c}}$, so dass $a = \alpha$ sein müsste. Da nun dieses den Bedingungen der Aufgabe zuwider ist, so erkennt man, dass die hier der Aufgabe gelassene Uneingeschränktheit zu keinem Resultate führt.

Vierter Fall. Wenn die Gränzordinaten selbst nicht gegeben sind, dagegen deren Differenz bestimmt ist, so dass beständig $y_\alpha - y_a = K$ constant bleibt; so ist $\delta y_a = \delta y_\alpha$, $\delta^2 y_a = \delta^2 y_\alpha$, etc. Die Gränzengleichung geht also über in

$$g^2 \cdot \left(e^{\frac{\alpha}{c}} - e^{\frac{a}{c}}\right) - c^2 \cdot \left(e^{-\frac{\alpha}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right) = 0$$

welche in Verbindung mit $y_\alpha - y_a = K$ oder vielmehr mit $\beta - b = K$ und mit den Gleichungen 1 und 2 des ersten Falles zur Bestimmung der vier Stücke b, β, c, g ausreicht.

Dergleichen auf Gränzbedingungen sich beziehenden Fälle kann man beliebig viele aufstellen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, findet sich in sehr vielen Schriften, ist aber überall mangelhaft behandelt. Gewöhnlich findet man sie nur bis zu Gleichung VI fortgeführt. Uebrigens ist sie ein specieller Fall der nächsten Aufgabe, welche von Euler herstammt.

Aufgabe 168.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Integral

$$U = \int_a^\alpha K \cdot y^n \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während K einen constanten Factor vorstellt.

Durch Mutiren bekommt man, wenn man die erste Form des δU nicht berücksichtigen will, für die zweite folgenden Ausdruck

$$\delta U = K \cdot \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ K \cdot \int_a^\alpha \left(n \cdot y^{n-1} \cdot \sqrt{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt, wenn man zugleich die angedeutete Differentiation ausführt, die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - n \cdot (1 + p^2) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{II)} \quad \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Da $\frac{dy}{dx} = p$, so ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{p \cdot dp}{dy}$; und Gleichung I geht über in

$$\text{III)} \quad \frac{p \cdot dp}{1 + p^2} = \frac{n \cdot dy}{y}$$

Daraus folgt $\lg \text{nat} \sqrt{1 + p^2} = \lg \text{nat} \frac{y^n}{c^n}$, und sonach ist

$$\text{IV)} \quad dx = \frac{c^n \cdot dy}{\sqrt{y^{2n} - c^{2n}}}$$


Digitized by Google

Im Allgemeinen ist hier zu bemerken, dass kein Werth des y zwischen (— c) und (+ c) liegen darf, weil dabei der Quotient $\frac{dy}{dx}$ imaginär werden würde. In Folge alles Vorhergehenden ist nun

$$\delta^2 U = K \cdot \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p \cdot y^n}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ K \cdot \int_a^\alpha \left[n(n-1) \cdot y^{n-2} \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot \delta y^2 + \frac{2np \cdot y^{n-1}}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right.$$

$$\left. + \frac{y^n}{(1+p^2)\cdot\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx$$

Um beurtheilen zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, hat man (nach §. 230 und 231) nur den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Factor zu untersuchen. Dieser ist folgender:

$$\frac{K \cdot y^n}{(1+p^2)\cdot\sqrt{1+p^2}} \text{ oder } \frac{1}{(1+p^2)^2} \cdot K \cdot y^n \cdot \sqrt{1+p^2}$$

Also zweideutig wegen des Radicals. Man entscheidet sich daher (nach Bd. I., S. 170, §. 114) auf folgende Weise:

A) Hat das Radical diejenige Bedeutung, dass bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen des x der Ausdruck $K \cdot y^n \cdot \sqrt{1+p^2}$ positiv bleibt; so ist auch U' positiv, und ein Minimum-stand.

B) Hat das Radical diejenige Bedeutung, dass bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen des x der Ausdruck $K \cdot y^n \cdot \sqrt{1+p^2}$ negativ bleibt; so ist auch U' negativ, und ein Maximum-stand, jedoch in dem Sinne, dass ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi, etc. S. 50), wo sie aber nur ausgeführt ist bis zu der hier mit IV bezeichneten Gleichung. Alles Weitere ist von mir hinzugefügt.

Aufgabe 169.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Integral

$$U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{(x^2+y^2)\cdot(1+p^2)}\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Wenn man die erste Form des δU nicht berücksichtigen will, so bekommt man für die zweite folgenden Ausdruck

$$\delta U = \left(p \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(p \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[y \cdot \sqrt{\frac{1+p^2}{x^2+y^2}} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(p \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+p^2}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, hat man die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad y \cdot \sqrt{\frac{1+p^2}{x^2+y^2}} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(p \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+p^2}}\right) = 0$$

und wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, und soviel als möglich vereinfacht, so bleibt

$$\frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{x^2+y^2} = \frac{dp}{1+p^2}$$

Daraus folgt


Digitized by Google

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} = \operatorname{arc\,tg} p + \operatorname{arc\,tg} A = \operatorname{arc\,tg}\frac{p + A}{1 - Ap}$$

also ist

$$\frac{x}{y} = \frac{p + A}{1 - Ap}$$

Daraus folgt weiter $x \cdot dx - y \cdot dy = A \cdot (y \cdot dx + x \cdot dy)$, und es ist

$$\text{II)} \quad x^2 - y^2 = 2Axy + B$$

Diese Gleichung gehört der Hyperbel an, wo A und B die noch zu bestimmenden Constanten sind; und da $\frac{dy}{dx} = \frac{x - Ay}{y + Ax}$ ist, so bekommt man als Gränzengleichung

$$\text{III)} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot [(\alpha - A \cdot y_\alpha) \cdot \delta y_\alpha - (a - A \cdot y_a) \cdot \delta y_a] = 0$$

Um beurtheilen zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde; hat man (nach §. 230 und 231) nur den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Factor zu untersuchen. Dieser ist folgender:

$$\frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2) \cdot (1 + p^2)}$$

Er ist zwar zweideutig wegen des Radicals, aber er kann kein von den verschiedenen Werthen des x abhängiges Zeichen haben. Man entscheidet sich also (nach §. 114, Bd. I., S. 170) auf folgende Weise:

A) Hat das Radical seine positive Bedeutung, so sind U' und $\delta^2 U$ zugleich positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

B) Hat das Radical seine negative Bedeutung, so sind U' und $\delta^2 U$ zugleich negativ; und es findet ein Maximum-stand statt, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Erster Fall. Wenn $y_a = b$ und $y_\alpha = \beta$ gegeben sind, so wird die Gränzengleichung von selbst erfüllt, und die beiden Constanten bestimmen sich durch die Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 2A \cdot ab + B, \text{ und } \alpha^2 - \beta^2 = 2A \cdot \alpha\beta + B$$

Zweiter Fall. Wenn nur $y_a = b$ gegeben, dagegen $y_\alpha = \beta$ nicht bestimmt ist, so reducirt sich die Gränzengleichung auf $\alpha - A \cdot y_\alpha = 0$, welche in Verbindung mit $a^2 - b^2 = 2A \cdot ab + B$ und mit $\alpha^2 - y_\alpha^2 = 2A\alpha \cdot y_\alpha + B$ zur Bestimmung der drei Stücke y_α, A, B hinreicht.

Dritter Fall. Sind y_a und y_α zugleich unbestimmt, so zerlegt sich die Gränzengleichung in $a - A \cdot y_a = 0$ und $\alpha - A \cdot y_\alpha = 0$, und daraus folgt $a : \alpha = y_a : y_\alpha$, d. h. die Aufgabe ist jetzt nur möglich, wenn letztere Proportion stattfindet.

Vierter Fall. Soll die Differenz $y_\alpha - y_a$ den beständigen Werth K haben, d. h. soll $y_\alpha - y_a = K$ sein; so ist $\delta y_\alpha = \delta y_a$. Die Gränzengleichung III gibt also jetzt $\alpha - a - A \cdot K = 0$, welche, in Verbindung mit $y_\alpha - y_a = K$, $a^2 - y_a^2 = 2A \cdot a \cdot y_a + B$, und $\alpha^2 - y_\alpha^2 = 2A\alpha \cdot y_\alpha + B$, zur Bestimmung der vier Stücke A, B, y_a, y_α hinreicht.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt eigentlich schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi, etc., S. 53 und 54); denn sie ist ein specieller Fall der jetzt folgenden 170sten. Das Prüfungsmittel sowie die vier Gränzfälle habe ich hinzugesetzt.

Aufgabe 170.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Integral

$$U = \int_a^\alpha (x^2 + y^2)^n \cdot \left(\sqrt{1 + p^2}\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Digitized by Google

Aus der Hauptgleichung, die sich ergibt, wenn man nur die zweite Form des δU berücksichtigt, folgt zunächst

$$\frac{2n(y \cdot dx - x \cdot dy)}{x^2 + y^2} = \frac{dp}{1 + p^2}$$

Also ist

$$\text{I)} \quad 2n \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{A} + p}{1 - \mathfrak{A}p}$$

Mittelst des Satzes $\operatorname{arc\,tg} \varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{1 + \varphi \cdot \sqrt{-1}}{1 - \varphi \cdot \sqrt{-1}}$ verwandelt sich Gleichung I in folgende

$$2n \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{y + x \cdot \sqrt{-1}}{y - x \cdot \sqrt{-1}} = \lg \operatorname{nat} \frac{1 - \mathfrak{A}p + (\mathfrak{A} + p) \cdot \sqrt{-1}}{1 - \mathfrak{A}p - (\mathfrak{A} + p) \cdot \sqrt{-1}}$$

oder

$$\left(\frac{y - x \cdot \sqrt{-1}}{y + x \cdot \sqrt{-1}}\right)^{2n} = \frac{1 - \mathfrak{A}p + (\mathfrak{A} + p) \cdot \sqrt{-1}}{1 - \mathfrak{A}p - (\mathfrak{A} + p) \cdot \sqrt{-1}}$$

Wenn man nun $\frac{dy}{dx}$ statt p wieder einsetzt, so wird aus letzterer Gleichung folgende

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(y + x \cdot \sqrt{-1})^{2n} \cdot (dy + dx \cdot \sqrt{-1}) - \mathfrak{A}(y - x \cdot \sqrt{-1})^{2n} \cdot (dy - dx \cdot \sqrt{-1}) \\ + (y + x \cdot \sqrt{-1})^{2n} \cdot (dy + dx \cdot \sqrt{-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} \\ + (y - x \cdot \sqrt{-1})^{2n} \cdot (dy - dx \cdot \sqrt{-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}} = 0 \end{aligned}$$

Und wenn man integrirt, so bekommt man

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad \mathfrak{A} \cdot [(y + x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1} - (y - x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1}] \\ + [(y + x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1} + (y - x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1}] \frac{1}{\sqrt{-1}} + \mathfrak{B}^{2n+1} = 0 \end{aligned}$$

oder mit Veränderung des Constanten

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad (y + x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1} \cdot (1 + \mathfrak{A} \cdot \sqrt{-1}) \\ + (y - x \cdot \sqrt{-1})^{2n+1} \cdot (1 - \mathfrak{A} \cdot \sqrt{-1}) + \mathfrak{C}^{2n+1} = 0 \end{aligned}$$

Um beurtheilen zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, hat man (nach §. 230 und 231) nur den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Factor zu untersuchen. Dieser aber ist

$$\frac{(x^2 + y^2)^n}{(1 + p^2) \cdot \sqrt[4]{1 + p^2}} \text{ oder } \frac{1}{(1 + p^2)^2} \cdot (x^2 + y^2)^n \cdot \sqrt[4]{1 + p^2}$$

Er ist zwar zweideutig wegen des Radicals, aber er kann kein von den verschiedenen Werthen des x abhängiges Zeichen haben.

Man entscheidet sich also hier ganz, wie in der vorigen Aufgabe.

Sobald 2n eine ganze Zahl ist, gibt sich jedesmal eine geschlossene Gleichung zwischen x und y.

1) Ist $n = \frac{1}{2}$, so ist $2n = 1$; und Gleichung III geht über in

$$2y^2 - 2x^2 - 4\mathfrak{A}xy + \mathfrak{C}^2 = 0$$

Setzt man $-$ A statt $\mathfrak{A}$, und 2B statt $\mathfrak{C}^2$; so geht letztere Gleichung in Gleichung II der vorigen Aufgabe über.

2) Ist $n = 1$, so ist $2n = 2$; und Gleichung III geht über in

Digitized by Google

$$y^3 + 3\mathfrak{A} \cdot y^2 \cdot x - 3 \cdot y \cdot x^2 - \mathfrak{A} \cdot x^3 + \mathfrak{C}^3 = 0$$

3) Ist $n = \frac{3}{2}$, so ist $2n = 3$; und Gleichung III geht über in

$$y^4 + 4\mathfrak{A} \cdot y^3 \cdot x - 6 \cdot y^2 \cdot x^2 - 4\mathfrak{A} \cdot y \cdot x^3 + x^4 + \mathfrak{C}^4 = 0$$

Und so fort.

Man kann jetzt Gränzfälle aufstellen, wie bei voriger Aufgabe.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi, etc., Seite 53 und 54).

Aufgabe 171.

Man sucht eine solche ebene Curve, dass dabei der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \left[F^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^n\right] \cdot dx$$

wo F einen constanten Werth hat, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = -n \cdot \int_a^\alpha q^{n-1} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) \cdot dx$$

oder wenn man die gehörige Umformung ausführt

$$\text{II)} \quad \delta U = -n \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^2(q^{n-1})}{dx^2}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$- n \cdot \left[(q^{n-1})_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{d(q^{n-1})}{dx}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha \right.$$

$$\left. - (q^{n-1})_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{d(q^{n-1})}{dx}\right)_a \cdot \delta y_a \right]$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Hier unterscheide man:

1) Es sei $(n - 1)$ eine positive Zahl. Dabei hat man die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, woraus $y = A \cdot x + B$ folgt. Auf diese Function haben die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, nicht den mindesten Einfluss. Ist n eine ganze Zahl, so ist auch $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, etc., und zuletzt ist $\delta^n U = - n^{n|-1} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^n \cdot dx$, welcher Ausdruck unter allen Umständen negativ bleibt, wenn n eine ganze grade Zahl ist. Ist aber n ein Bruch, so muss man directe Reihenentwickelung zu Hilfe nehmen; und man bekommt

$$\Delta U = -x^n \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{x}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \ldots\ldots\right)^n \cdot dx$$

welcher Ausdruck unter allen Umständen negativ bleibt, wenn n ein auf seine kleinste Form reducirter Bruch mit gradem Zähler und ungradem Nenner ist; und dabei ist, wie man an den für δU und ΔU hergestellten Ausdrücken erkennt, nicht allein das zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen allen andern Gränzen $x = a'$ bis $x = \alpha'$ erstreckte Integral U ein Maximum-stand, wenn nur jedesmal $\alpha' > a'$.

2) Wenn $n = 1$, also $n - 1 = 0$ ist, so kann dieser Fall nicht beachtet werden; denn aus $U = \int_a^\alpha \left(F^2 - \frac{d^2y}{dx^2}\right) \cdot dx$ würde $\delta U = \int_a^\alpha (-1) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot dx$ folgen, d. h. der zu $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ gehörige Factor (-1) ist eine bestimmte Zahl, kann also weder Null werden, noch Null in den Nenner bekommen.

Digitized by Google

3) Wenn $(n - 1)$ eine negative Zahl ist, so kann nur die Gleichung $q^{n-1} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ stattfinden; und daraus folgt abermals die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Hier ist man aber gezwungen, directe Reihenentwickelung anzuwenden, wenn man das Kennzeichen des Maximum-standes oder Minimum-standes herstellen will. Auch hier bekommt man $y = A \cdot x + B$, auf welche Function die Gränzen a und α nicht den mindesten Einfluss haben.

Untersuchung der zweiten Form des δU. Setzt man $\delta U = 0$, so erkennt man an dieser zweiten Form des δU, dass es auch eine von den Gränzen a und α abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen diesen Gränzen erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht, eben weil jetzt auch nur das zwischen diesen Gränzen erstreckte δU zu Null wird. Man hat nun hier die Hauptgleichung

$$\text{III)} \quad \frac{d^2(q^{n-1})}{dx^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IV)} \quad (q^{n-1})_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{d(q^{n-1})}{dx}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha$$
$$- (q^{n-1})_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{d(q^{n-1})}{dx}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Aus der Hauptgleichung folgt durch zweimalige Integration

$$\text{V)} \quad q^{n-1} = A \cdot x + B$$

also

$$\text{VI)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (A \cdot x + B)^{\frac{1}{n-1}}$$

Sonach bekommt man

$$\text{VII)} \quad y = \frac{(n-1)^2}{n \cdot (2n-1) \cdot A^2} \cdot (A \cdot x + B)^{\frac{2n-1}{n-1}} + Cx + E$$

wo A, B, C, E vier noch zu bestimmende willkürliche Constanten sind. In Folge der Gleichung V geht nun die Gränzengleichung über in

$$\text{VIII)} \quad (A \cdot \alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - A \cdot \delta y_\alpha - (A \cdot a + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + A \cdot \delta y_a = 0$$

Mutirt man nochmals, und berücksichtigt man die Hauptgleichung, so bekommt man

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = -(A \cdot \alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha + A \cdot \delta^2 y_\alpha + (A \cdot a + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a - A \cdot \delta^2 y_a$$
$$- n \cdot (n-1) \cdot \int_a^\alpha (Ax + B)^{\frac{n-2}{n-1}} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

so dass es (nach §. 235 und 236) zunächst von n abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Besondere Berücksichtigung verdienen die drei Fälle, wo $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$, und $A = 0$ ist.

1) Ist $n = \frac{1}{2}$, so wird der Nenner des gefundenen Integrals zu Null; und dieses ist ein Zeichen, dass man die Integration für diesen Fall besonders vornehmen muss. Gleichung VI geht also jetzt über in $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(A \cdot x + B)^2}$; und daraus folgt

$$\text{X)} \quad y = C \cdot x - \frac{1}{A^2} \cdot \log \operatorname{nat} \frac{A \cdot x + B}{E}$$

2) Ist $n = 1$, so gehört dieser Fall nicht hieher; denn aus $U = \int_a^\alpha \left(F^2 - \frac{d^2y}{dx^2}\right) \cdot dx$ folgt

Digitized by Google

$$\delta U = -\int_a^\alpha \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot dx = -\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

so dass keine Hauptgleichung stattfindet, also auch keine Function y von x aufgesucht werden kann.

3) Wenn sich bei Bestimmung der Constanten ergibt, dass $A = 0$ ist; so wird wieder der Nenner des in Gleichung VII stehenden Integrals zu Null. Man muss also auch für diesen Fall die Integration besonders vornehmen. Da nun jetzt $\frac{d^2y}{dx^2} = B^{\frac{1}{n-1}}$, so wird

$$\text{XI)} \quad y = \frac{1}{2} \cdot B^{\frac{1}{n-1}} \cdot x^2 + Cx + E$$

Erster Fall. Wenn $y_a = b$ und $y_\alpha = \beta$ gegeben sind, so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc.; und die Gränzengleichung reducirt sich jetzt auf

$$(A\alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - (Aa + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Daraus folgt $A = 0$ und $B = 0$. Gleichung XI reducirt sich also auf $y = Cx + E$; und die beiden Constanten bestimmen sich aus den Gleichungen $b = Ca + E$ und $\beta = C\alpha + E$.

Zweiter Fall. Soll $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ den festen Werth g haben, so darf die gesuchte Curve nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden Nachbarcurven gewählt werden, welche alle bei der Abscisse a parallele Tangenten haben. Zwischen der gesuchten und allen in Betracht zu ziehenden Curven besteht also folgende Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a + \varkappa \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d\delta^3 y}{dx}\right)_a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Es ist also jetzt $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a = 0$, etc. Soll ebenso $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ den festen Werth h haben, so haben alle Curven, unter denen die Wahl getroffen werden darf, auch bei der Abscisse α parallele Tangenten. Es ist also jetzt auch $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha = 0$, etc. (Man sehe §. 87.) Um nun der Gränzengleichung zu genügen, ist $A = 0$ zu setzen; und Gleichung XI ist jetzt die, durch welche die Aufgabe erfüllt wird. Zugleich ist $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = g = B^{\frac{1}{n-1}} \cdot a + C$, und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = h = B^{\frac{1}{n-1}} \cdot \alpha + C$, wodurch die Constanten B und C bestimmt werden können. E ist willkürlich, so lange nicht noch eine neue Bedingung hinzukommt.

Dritter Fall. Ist zu gleicher Zeit $y_a = b$, $y_\alpha = \beta$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = g$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = h$ gegeben, d. h. sind nicht nur die Gränzpunkte der gesuchten Curve, sondern auch die Neigung der zu den Gränzpunkten gehörigen Tangenten vorgeschrieben; so fällt die Gränzengleichung von selbst weg, und man hat zur Bestimmung der vier Constanten folgende vier Gleichungen:

$$1) \quad b = \frac{(n-1)^2}{n(2n-1) \cdot A^2} \cdot (Aa + B)^{\frac{2n-1}{n-1}} + Ca + E$$

$$2) \quad \beta = \frac{(n-1)^2}{n(2n-1) \cdot A^2} \cdot (A\alpha + B)^{\frac{2n-1}{n-1}} + C\alpha + E$$

$$3) \quad g = \frac{n-1}{nA} \cdot (Aa + B)^{\frac{n}{n-1}} + C$$

Digitized by Google

$$4)\quad h = \frac{n-1}{nA}\cdot(A\alpha + B)^{\frac{n}{n-1}} + C$$

Vierter Fall. Sind zwar nicht die Gränzpunkte der Curve bestimmt, ist aber vorgeschrieben, dass bei allen Curven die zur Abscisse a gehörige Tangente die Länge j, und die zur Abscisse α gehörige Tangente die Länge k habe; so ist jetzt $\left(\frac{y}{p}\cdot\sqrt{1+p^2}\right)_a = j$ und $\left(\frac{y}{p}\sqrt{1+p^2}\right)_\alpha = k$. Mutirt man diese Gleichungen, so bekommt man

$$\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = \frac{j^2}{(j^2 - y_a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\delta y_a$$

$$\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a = \frac{j^2}{(j^2 - y_a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\delta^2 y_a + \frac{3y_a}{j^2 - y_a^2}\cdot\delta y_a^2\right)$$

Ganz gleichförmige Ausdrücke bekommt man für $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha$.

Eliminirt man nun $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$ aus VIII, so bekommt man

$$\frac{(A\alpha + B)\cdot k^2 - A\cdot(k^2 - y_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{(k^2 - y_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\delta y_\alpha - \frac{(Aa + B)\cdot j^2 - A\cdot(j^2 - y_a^2)^{\frac{3}{2}}}{(j^2 - y_a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\delta y_a = 0$$

und es zerfällt (nach §. 92) diese Gleichung in folgende zwei

$$(A\alpha + B)\cdot k^2 - A\cdot(k^2 - y_\alpha^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$(Aa + B)\cdot j^2 - A\cdot(j^2 - y_a^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

welche in Verbindung mit den zwei ersten Gleichungen des dritten Falles und mit den zwei für die Länge der Tangenten gegebenen Ausdrücken hinreichen, um die sechs Stücke A, B, C, E, $y_a = b$, $y_\alpha = \beta$ zu bestimmen.

Fünfter Fall. Soll der Unterschied der Gränzordinaten immer derselbe, d. h. soll immer $y_\alpha - y_a = K$ constant sein; sollen ferner die durch die Gränzpunkte gehenden Tangenten sich immer unter dem gleichen Winkel schneiden, d. h. soll auch immer $\dfrac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_a} = L$ constant sein; so ist $\delta y_\alpha = \delta y_a$, $\delta^2 y_\alpha = \delta^2 y_a$, etc.; und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = \dfrac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. Aus der Gränzengleichung folgt aber jetzt

$$A(\alpha - a) + (A\alpha + B)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha^2 - (Aa + B)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_a^2 = 0$$

Man hat also zwei Gleichungen zwischen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, aus welchen man den Werth von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = g$ und von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = h$ bestimmen kann; und indem man die vier Gleichungen des dritten Falles zu Hilfe nimmt, gelangt man zu den Werthen der vier Constanten, A, B, C, E. Zu dem Ausdrucke $\dfrac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_a} = L$ ist man aber

Digitized by Google

auf folgende Weise gelangt: Es seien (fig. 35) die Linien WP und WQ zwei in den Punkten R und T berührende Graden. Diese sollen bei jeder wählbaren Curve immer einen gleichgrossen Winkel ω einschliessen. Es ist aber

$$\text{Winkel } \omega = \text{Winkel } w - \text{Winkel } u$$

Also hat man

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg}(w - u) = \frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} w \cdot \operatorname{tg} u}$$

Da nun $\operatorname{tg} w = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ und $\operatorname{tg} u = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a$; so ist jetzt ersichtlich, wie man zu obigem Ausdrucke für L gelangt ist.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi, etc., S. 69 und 70). Sie wurde später von vielen Schriftstellern, welche über den (von Euler sogenannten) Variationscalcul schrieben, aufgenommen, aber immer nur sehr mangelhaft behandelt.

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man:

1) Die Untersuchung der ersten Form des δU.
2) Die verschiedenen Gränzfälle, welche sich bei der Untersuchung der zweiten Form des δU befinden.

Aufgabe 172.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(y + x \cdot p - \sqrt[3]{(gx - h \cdot q)^2}\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Hier ist $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, wie gewöhnlich. Das Radical $\sqrt[3]{(gx - hq)^2}$ ist dreiförmig; um jedoch bequem calculiren zu können, schreibe man lieber $(\sqrt[3]{1}) \cdot (gx - hq)^{\frac{2}{3}}$, und behandle nur $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also jetzt

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \left(y + xp - (\sqrt[3]{1}) \cdot (gx - h \cdot q)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx$$

Um die Aufgabe weiter durchführen zu können, lege man dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle, und dann seine beiden imaginären Formen bei, und bringe die Aufgabe in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung.

Man lege dem $(\sqrt[3]{1})$ nur seine reelle Bedeutung bei, und Gleichung II geht über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(y + xp - (gx - h \cdot q)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(\delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) \cdot dx$$

oder

$$\text{IV)}\quad \delta U = +\frac{2}{3} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$
$$+ \left(x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha -$$

Digitized by Google

$$-\left(x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right)\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Man erkennt gradezu, dass die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigt werden kann; man mache sich also ohneweiters an die zweite Form.

Erstens. Soll $\delta U = 0$ werden, so hat man zunächst die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}}\right) = 0$$

Daraus folgt

$$\text{VI)} \quad \frac{h}{\sqrt[3]{gx - h \cdot q}} = A \cdot x + B$$

oder

$$q = \frac{gx}{h} - \frac{h^2}{(A \cdot x + B)^3}$$

Daraus folgt weiter

$$p = \frac{g \cdot x^2}{2h} + \frac{h^2}{2A \cdot (Ax + B)^2} + C$$

Also ist

$$\text{VII)} \quad y = \frac{g \cdot x^3}{6h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (Ax + B)} + Cx + E$$

Als Gränzengleichung hat man nun

$$\text{VIII)} \quad \left(\alpha - \frac{2}{3}A\right) \cdot \delta y_\alpha - \left(a - \frac{2}{3}A\right) \cdot \delta y_a + \frac{2}{3}(A\alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \frac{2}{3}(Aa + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Erster Fall. Haben y_α, y_a, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ bezüglich die festen Werthe β, b, γ, c; so ist $\delta y_\alpha = 0$, $\delta y_a = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$ und Gleichung VIII fällt von selbst weg. Die vier Constanten A, B, C, E bestimmen sich also durch folgende Gleichungen

$$b = \frac{g \cdot a^3}{6 \cdot h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (Aa + B)} + C \cdot a + E$$

$$\beta = \frac{g \cdot \alpha^3}{6h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (A\alpha + B)} + C \cdot \alpha + E$$

$$c = \frac{g \cdot a^2}{2h} + \frac{h^2}{2A \cdot (Aa + B)^2} + C$$

$$\gamma = \frac{g \cdot \alpha^2}{2h} + \frac{h^2}{2A \cdot (A\alpha + B)^2} + C$$

Zweiter Fall. Haben wieder y_a und y_α die festen Werthe b und β, sind dagegen die Werthe von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ unbestimmt, so sind zwar $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, etc., dagegen $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$ sind, wenn sie gleich einerlei Form haben, doch dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. (Man sehe §. 92.) Der Gleichung VIII wird also nur genügt, wenn $Aa + B = 0$ und $A\alpha + B = 0$, aus welchen Gleichungen folgt, dass sowohl $A = 0$ als auch $B = 0$ sein muss. Dabei bekommt aber Gleichung VII Null in den Nenner, welches eine Anzeige ist, dass man die Integration für diesen Fall

Digitized by Google

noch einmal von Anfange an vorzunehmen hat. Man bekommt also statt Gleichung VI jetzt $\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}} = 0$, oder, was dasselbe ist, $h \cdot \sqrt[3]{\frac{dx^2}{gx \cdot dx^2 - h \cdot d^2y}} = 0$. Letztere Gleichung ist aber nur möglich, wenn $dx = 0$, also $x = K$, d. h. constant ist, was z. B. die Gleichung einer auf die Abscissenaxe senkrechten Graden vorstellt. Für y lässt sich also nichts ermitteln, und somit kann dieser zweite Fall nicht weiter berücksichtigt werden.

Dritter Fall. Haben $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ bestimmte Werthe, und sind die Werthe von y_a und y_α unbestimmt; so sind zwar $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$, dagegen δy_a und δy_α sind (nach §. 92) dem Werthe nach ganz unabhängig, und können im Allgemeinen nicht zu Null werden. Der Gleichung VIII wird also nur genügt, wenn $\alpha - \frac{2}{3} A = 0$ und $a - \frac{2}{3} A = 0$. Da aber diese beiden Gleichungen einander widersprechen, so ist dieser dritte Fall gar nicht zulässig.

Vierter Fall. Hat man die zwei Gleichungen

$$y_\alpha + \alpha \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = K \text{ und } y_a + a \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \mathfrak{K}$$

so bekommt man daraus

$$\delta y_\alpha = - \alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \text{ und } \delta y_a = - a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Gleichung VIII geht nun über in

$$\left(- \alpha^2 + \frac{4}{3} \cdot A \cdot \alpha + \frac{2}{3} \cdot B\right) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(- a^2 + \frac{4}{3} \cdot A \cdot a + \frac{2}{3} \cdot B\right) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dy}\right)_a = 0$$

Daraus folgt gradezu

$$3\alpha^2 - 4A\alpha - 2B = 0 \text{ und } 3a^2 - 4Aa - 2B = 0$$

also ist $A = \frac{3}{4} \cdot (\alpha + a)$, und $B = - \frac{3}{2} \cdot a \cdot \alpha$.

Da nun A und B bereits bestimmt sind, so reichen die sechs Gleichungen

$$y_a + a \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \mathfrak{K}$$

$$y_\alpha + \alpha \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = K$$

$$y_a = \frac{g \cdot a^3}{6h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (Aa + B)} + C \cdot a + E$$

$$y_\alpha = \frac{g \cdot \alpha^3}{6h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (A\alpha + B)} + C \cdot \alpha + E$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \frac{g \cdot a^2}{2h} + \frac{h^2}{2A \cdot (Aa + B)^2} + C$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = \frac{g \cdot \alpha^2}{2h} + \frac{h^2}{2A \cdot (A\alpha + B)^2} + C$$

hin zur Bestimmung der noch übrigen sechs Stücke C, E, y_a, y_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$.

Dergleichen Fälle lassen sich in beliebiger Menge aufstellen. Für das Prüfungsmittel bekommt man im Allgemeinen

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \left(\alpha - \frac{2}{3} A\right) \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(a - \frac{2}{3} \cdot A\right) \cdot \delta^2 y_a + \frac{2}{3}(A\alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- \frac{2}{3}(Aa + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a + \frac{2}{9h^2} \cdot \int_a^\alpha (Ax + B)^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet. (Man sehe §. 235 und 236.)

Zweitens. Lässt man in Gleichung IV den Nenner des zu dem unter dem Integralzeichen stehenden δy gehörigen Factors zu Null werden; so bekommt man zunächst

$$\text{IX)} \quad gx - hq = 0$$

und somit ist jetzt

$$\text{X)} \quad y = \frac{g \cdot x^3}{6h} + F \cdot x + G$$

Die in Gleichung IV befindlichen und vom Integralzeichen freien Theilsätze nehmen nun, wenn man zuvor die angezeigte Differentiation noch ausführt, bei jedem Werthe der Constanten F und G folgende Form

$$\text{XI)} \quad \left(\alpha + \frac{2h}{9} \cdot \frac{0}{0}\right) \cdot \delta y_\alpha - \left(a + \frac{2h}{9} \cdot \frac{0}{0}\right) \cdot \delta y_a + \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{0} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{0} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

an. Daran erkennt man, dass die Bedingungen, wodurch die Constanten F und G bestimmt werden, nicht nothwendig von den Gränzen a und α abhängig zu sein brauchen. Hier ist

$$U' = \frac{g}{6h} \cdot (\alpha^4 - a^4) + F \cdot (\alpha^2 - a^2) + G \cdot (\alpha - a)$$

Um das Prüfungsmittel herzustellen, setze man

$$\left(\frac{g \cdot x^3}{6 \cdot h} + F \cdot x + G + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right) \text{ statt } y$$

$$\left(\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot h} + F + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots\right) \text{ statt } p$$

und

$$\left(\frac{gx}{h} + \varkappa \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \ldots\ldots\right) \text{ statt } q$$

in Gleichung III überall ein; so bekommt man

$$\text{XII)} \quad \Delta U = - \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$+ \varkappa \cdot \int_a^\alpha \left[\left(\delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + x \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \ldots\ldots\right] \cdot dx$$

Denkt man sich nun $\varkappa$ im Momente des Verschwindens, so ist ΔU negativ, mit Ausnahme des einzigen Falles, wo der Ausdruck $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x zu Null wird. In allen andern unendlichvielen Fällen findet in der That ein Maximum-stand statt, und zwar bei jedem beliebigen Werthe des Constanten F und des Constanten G.

Aber eben weil die Constanten F und G von den Gränzen a und α nicht abhängig zu sein brauchen, so liefert die Function $y = \frac{g \cdot x^3}{6 \cdot h} + F \cdot x + G$ auch noch zwischen jeder andern Gränze $x = a'$ bis $x = \alpha'$ einen Maximum-stand, wenn nur $\alpha' > a'$ ist.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine imaginären Bedeutungen bei. Man bekommt dann

Digitized by Google

$$\delta U = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ \left(x - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha$$

$$- \left(x - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right)\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Erstens. Aus $\frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{h}{\sqrt[3]{gx - hq}}\right) = 0$ folgt $y = \frac{g \cdot x^3}{6h} - \frac{h^2}{2A^2 \cdot (Ax + B)} +$ $Cx + E$. Dabei ist aber U' imaginär, also dieser Zustand nicht weiter zu beachten.

Zweitens. Aus $gx - hq = 0$ folgt $y = \frac{g \cdot x^3}{6 \cdot h} + F \cdot x + G$. Dabei ist aber

$$\varDelta U = - (\sqrt[3]{1}) \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \ldots\right)^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$+ \varkappa \cdot \int_a^\alpha \left[\left(\delta y + x \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + x \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \ldots\right] \cdot dx$$

$\varDelta U$ ist also imaginär, mit Ausnahme des einzigen Falles, wo alle die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^3 y}{dx^2}$, etc. bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x zu Null werden. In allen andern unendlichvielen Fällen ist

$$U' = \frac{g}{6 \cdot h} \cdot (\alpha^4 - a^4) + F \cdot (\alpha^2 - a^2) + G \cdot (\alpha - a)$$

ein Einzelstand.

Aufgabe 173.

Man soll die ebene Curve finden, deren von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckter Bogen mit seiner Evolute und den zu den Gränzpunkten gehörigen Krümmungshalbmessern die kleinste Fläche einschliesst. Das Coordinatensystem sei das rechtwinkelige.

Die so begränzte Fläche ist bekanntlich gegeben durch

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \frac{(1 + p^2)^2}{q} \cdot dx$$

wo man, wie gewöhnlich, p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt hat. Durch Mutiren bekommt man, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, nach der gehörigen Umformung als zweite Form

$$\delta U = - \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2\right)\right]_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha -$$

Digitized by Google

$$-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4p\cdot(1+p^2)}{q}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2\right)\right]_a\cdot\delta y_a+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+p^2}{q}\right)_a^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Aus der Hauptgleichung folgt durch einmalige Integration

$$\text{I)}\quad \frac{4p\cdot(1+p^2)}{q}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2\right)=E$$

Wenn man hier die angedeutete Differentiation ausführt, und dann dp statt $q\cdot dx$ setzt; so gibt sich

$$\frac{8p\cdot(1+p^2)\cdot dp}{q^2}-\frac{2\cdot(1+p^2)^2\cdot dq}{q^3}=E\cdot dx$$

oder

$$\frac{8p\cdot(1+p^2)\cdot dp}{q}-\frac{2\cdot(1+p^2)^2\cdot dq}{q^2}=E\cdot q\cdot dx=E\cdot dp$$

Daraus folgt

$$\text{II)}\quad \frac{2\cdot(1+p^2)^2}{q}=E\cdot p+F$$

Aus dieser Gleichung folgt $2\cdot(1+p^2)^2=E\cdot pq+F\cdot q$, und sonach ist

$$\text{III)}\quad dx=\frac{Ep\cdot dp+F\cdot dp}{2\cdot(1+p^2)^2}$$

Also ist

$$\text{IV)}\quad x=H+\frac{Fp-E}{4\cdot(1+p^2)}+\frac{F}{4}\cdot\operatorname{arc}\operatorname{tg}p$$

Da $y=\int p\cdot dx$, so hat man nur aus III für dx den Ausdruck zu substituiren, und dann zu integriren. Dadurch bekommt man

$$\text{V)}\quad y=K+\frac{p\cdot(F\cdot p-E)}{4\cdot(1+p^2)}+\frac{E}{4}\cdot\operatorname{arc}\operatorname{tg}p$$

Die gesuchte Curve ist nun durch zwei Gleichungen gegeben, wo E, F, H, K vier noch zu bestimmende Constanten sind; sie ist die Cycloide. Eliminirt man arc tg p aus IV und V, so bekommt man

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{F\cdot p-E}{2\cdot\sqrt{F\cdot y-E\cdot x+E\cdot H-F\cdot K}}$$

Setzt man $\frac{dy}{dx}$ statt p, und ds statt $\sqrt{dx^2+dy^2}$; so bekommt man

$$ds=\frac{F\cdot dy-E\cdot dx}{2\cdot\sqrt{F\cdot y-E\cdot x+E\cdot H-F\cdot K}}$$

und daraus folgt

$$\text{VI)}\quad s=N+\sqrt{F\cdot y-E\cdot x+E\cdot H-F\cdot K}$$

Die Gränzengleichung reducirt sich nun auf

$$\text{VII)}\quad E\cdot\delta y_\alpha-\left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha-E\cdot\delta y_a+\left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a=0$$

In Folge alles Vorhergehenden bekommt man ferner

$$\delta^2U=\frac{1}{2}\cdot E\cdot\delta^2y_\alpha-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta^2y}{dx}\right)_\alpha$$
$$-\frac{1}{2}\cdot E\cdot\delta^2y_a+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta^2y}{dx}\right)_a$$
$$+\int_a^\alpha\frac{1}{q}\cdot\left[2\cdot(1+p^2)\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(2p\cdot\frac{d\delta y}{dx}-\frac{1+p^2}{q}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\right]\cdot dx$$

Erster Fall. Sind nur zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, durch welche die gesuchte Curve begränzt wird; so ist $\delta y_a=0$, $\delta y_\alpha=0$, $\delta^2y_a=0$, $\delta^2y_\alpha=0$, etc. Die Gränzengleichung reducirt sich daher auf

Digitized by Google

$$\left(\frac{E \cdot p + F}{2q}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{Ep + F}{2q}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Man bekommt (nach §. 92) also $\left(\frac{Ep + F}{2q}\right)_\alpha = 0$ und $\left(\frac{Ep + F}{2q}\right)_a = 0$, so dass alle vier Constanten bestimmt werden können.

Zweiter Fall. Sind die Gränzpunkte (a, b) und (α, β) nicht bestimmt, sollen aber bei der Abscisse a alle hier zu vergleichenden Curven parallele Tangenten haben, und soll das nemliche auch bei der Abscisse α gelten; so ist $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$; dagegen δy_a und δy_α sind (nach §. 92) dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und können im Allgemeinen nicht zu Null werden. Es folgt also aus der Gränzengleichung, dass $E = 0$ ist. Geht man nun zu der Gleichung III zurück, so bekommt man $dx = \frac{F \cdot dp}{2 \cdot (1 + p^2)^2}$, und $dy = p \cdot dx = \frac{F \cdot p \cdot dp}{2 \cdot (1 + p^2)^2}$. Daraus folgt $y = B - \frac{F}{4 \cdot (1 + p^2)}$. Wenn man 4C statt (F — 4B) setzt, so bekommt man aus der letzten Gleichung

$$dx = dy \cdot \sqrt{\frac{B - y}{C + y}} = \frac{(B - y) \cdot dy}{\sqrt{BC + (B - C) \cdot y - y^2}}$$

also ist

$$x = A + \sqrt{BC + (B - C) \cdot y - y^2} + \frac{B + C}{2} \cdot \text{arc sin} \frac{C - B + 2y}{B + C}$$

Da hier $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ gegeben sind, so lassen sich die Constanten B und C bestimmen; dagegen A bleibt unbestimmt, wenn nicht noch eine dritte Bedingung hinzukommt, z. B. die, dass die Curve durch irgend einen Punkt gehen soll, welcher entweder zur Abscisse a, oder zur Abscisse α, oder zu irgend einer andern Abscisse gehören mag, denn in jedem dieser drei Fälle bleibt $E = 0$.

Dritter Fall. Sollen alle hier zu vergleichenden Curven die nemlichen Gränzpunkte, und in den Gränzpunkten einerlei Tangenten haben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$; $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$, etc.; und die vier Constanten werden alsdann durch die für y_a, y_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ sich ergebenden Gleichungen bestimmt.

Vierter Fall. Sind sowohl die beiden Gränzpunkte als auch noch zwei andere Punkte gegeben, durch welche die gesuchte Curve gehen soll, d. h. soll die gesuchte Curve durch vier bestimmte Punkte gehen; so werden dadurch allerdings die vier Constanten bestimmt, allein von der Gränzengleichung bleibt noch übrig

$$\left(\frac{Ep + F}{2q}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{Ep + F}{2q}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Die vier Constanten sind schon bestimmt, sie lassen sich also nicht mehr so einrichten, dass $\left(\frac{E \cdot p + F}{2q}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{E \cdot p + F}{2q}\right)_a$ nothwendig zu Null werden müssen.

Dergleichen auf Gränzbedingungen sich beziehende Fälle kann man beliebig viele aufstellen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi etc., Seite 64 und 65). Sie wurde später von fast allen Schriftstellern, welche über Variationscalcul schrieben, aufgenommen, aber immer nur sehr mangelhaft behandelt. Gewöhnlich findet man sie nur bis zu Gleichung VII fortgeführt. Alles Weitere habe ich hinzugefügt.

Digitized by Google

Aufgabe 174.

Man sucht y als solche Function von x, dass

$$U = \int_a^\alpha \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^n \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Setzt man r statt $\frac{d^3y}{dx^3}$, so bekommt man, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, nach den gehörigen Umformungen als zweite Form

$$\delta U = n \cdot \left[(r^{n-1})_\alpha \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha - \left(\frac{d(r^{n-1})}{dx}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d^2(r^{n-1})}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha\right]$$

$$- n \cdot \left[(r^{n-1})_a \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a - \left(\frac{d(r^{n-1})}{dx}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{d^2(r^{n-1})}{dx^2}\right)_a \cdot \delta y_a\right]$$

$$- n \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d^3(r^{n-1})}{dx^3}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung $\frac{d^3(r^{n-1})}{dx^3} = 0$; also ist

$$\text{I)} \quad r^{n-1} = \frac{A}{2} \cdot x^2 + Bx + C$$

und

$$\text{II)} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{A}{2} \cdot x^2 + Bx + C\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ob sich daraus ein algebraisches oder transcendentes Integral ableiten lässt, hangt zunächst vom Werthe des n ab. In Folge der Gleichung I bekommt man als Gränzengleichung

$$\text{III)} \quad \left(\frac{A}{2} \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + C\right) \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha - (A\alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + A \cdot \delta y_\alpha$$

$$- \left(\frac{A}{2} \cdot a^2 + B \cdot a + C\right) \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a + (Aa + B) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - A \cdot \delta y_a = 0$$

Mutirt man nochmals, und berücksichtigt man die Hauptgleichung; so ergibt sich

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{A}{2} \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + C\right) \cdot \left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_\alpha - (A\alpha + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha + A \cdot \delta^2 y_\alpha$$

$$- \left(\frac{A}{2} \cdot a^2 + B \cdot a + C\right) \cdot \left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_a + (Aa + B) \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a - A \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ n(n-1) \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{A}{2} \cdot x^2 + Bx + C\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \cdot \left(\frac{d^3\delta y}{dx^3}\right)^2 \cdot dx$$

so dass es zunächst von n abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. (Man sehe §. 237.)

Wenn $n = +1$, so gehört der Fall nicht hieher, denn aus $U = \int_a^\alpha r \cdot dx$ folgt

$$\delta U = \int_a^\alpha \frac{d^3\delta y}{dx^3} \cdot dx = \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha - \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a$$

so dass hier keine Hauptgleichung stattfindet, also von einer aufzusuchenden Function keine Rede sein kann.

Erster Fall. Soll die Wahl unter allen den Curven getroffen werden, welche

1) die nemlichen Gränzpunkte (a, b) und (α, β) haben, wo also $y_a = b$ und $y_\alpha = \beta$ bestimmt sind; welche ferner
2) in den Punkten (a, b) und (α, β) alle einerlei Berührungslinien haben, wo

Digitized by Google

also auch die Werthe von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = g$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = h$ gegeben sind; und welche

3) in den Punkten (a, b) und (α, β) auch noch alle einerlei Krümmungshalbmesser haben, wo also auch die Werthe von $\left(\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\right)_a = j$ und $\left(\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\right)_\alpha = k$ gegeben sind, so dass sich gradezu $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a = \frac{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}{j}$ und $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_\alpha = \frac{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}}{k}$ ergibt;

so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc.;

$$\text{ferner } \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0,\ \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha = 0, \text{ etc.}$$

$$\text{und } \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha = 0,\ \left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_\alpha = 0, \text{ etc.}$$

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und Gleichung IV reducirt sich auf

$$\delta^2 U = n(n-1)\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{A}{2}x^2 + Bx + C\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\cdot\left(\frac{d^3\delta y}{dx^3}\right)^2\cdot dx$$

ist $n = 2$, so ist

$$y = \frac{A}{1.2.3.4.5}\cdot x^5 + \frac{B}{1.2.3.4}\cdot x^4 + \frac{C}{1.2.3}\cdot x^3 + \frac{E}{1.2}\cdot x^2 + Fx + G$$

und

$$\delta^2 U = 2\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d^3\delta y}{dx^3}\right)^2\cdot dx$$

so dass jetzt ein Minimum-stand stattfindet; und zur Bestimmung der sechs Constanten hat man

$$b = \frac{A}{1.2.3.4.5}\cdot a^5 + \frac{B}{1.2.3.4}\cdot a^4 + \frac{C}{1.2.3}\cdot a^3 + \frac{E}{1.2}\cdot a^2 + F\cdot a + G$$

$$\beta = \frac{A}{1.2.3.4.5}\cdot \alpha^5 + \frac{B}{1.2.3.4}\cdot \alpha^4 + \frac{C}{1.2.3}\cdot \alpha^3 + \frac{E}{1.2}\cdot \alpha^2 + F\cdot \alpha + G$$

$$g = \frac{A}{1.2.3.4}\cdot a^4 + \frac{B}{1.2.3}\cdot a^3 + \frac{C}{1.2}\cdot a^2 + E\cdot a + F$$

$$h = \frac{A}{1.2.3.4}\cdot \alpha^4 + \frac{B}{1.2.3}\cdot \alpha^3 + \frac{C}{1.2}\cdot \alpha^2 + E\cdot \alpha + F$$

$$\frac{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}{j} = \frac{A}{1.2.3}\cdot a^3 + \frac{B}{1.2}\cdot a^2 + C\cdot a + E$$

$$\frac{(1+h^2)^{\frac{3}{2}}}{k} = \frac{A}{1.2.3}\cdot \alpha^3 + \frac{B}{1.2}\cdot \alpha^2 + C\cdot \alpha + E$$

Zweiter Fall. Soll die Wahl unter allen denjenigen Curven getroffen werden, welche

1) alle durch die nemlichen zwei Punkte (a, b) und (α, β) gehen, wo also $y_a = b$ und $y_\alpha = \beta$ gegeben sind; und welche

2) in den Punkten (a, b) und (α, β) auch noch alle einerlei Krümmungshalb-

Digitized by Google

messer haben, wo also auch die Werthe von $\left(\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\right)_a = j$ und von $\left(\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\right)_\alpha = k$ gegeben sind;

so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Aus der Gleichung für den Krümmungshalbmesser des Punktes (a, b) folgt nun nach und nach

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a = \frac{1}{j} \cdot (1+p^2)_a^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a = \frac{3}{j} \cdot (p \cdot \sqrt{1+p^2})_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

$$\left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_a = \frac{3}{j} \cdot (p\sqrt{1+p^2})_a \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a + \frac{3}{j} \cdot \left(\frac{1+2p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a^2$$

Ganz gleichförmige Ausdrücke bekommt man für $\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right)_\alpha$. Gleichung III geht also jetzt über in

$$\left[\frac{3}{k} \cdot \left(\frac{A}{2} \cdot \alpha^2 + B\alpha + C\right) \cdot (p \cdot \sqrt{1+p^2})_\alpha - (A\alpha + B)\right] \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$
$$- \left[\frac{3}{j} \cdot \left(\frac{A}{2} \cdot a^2 + Ba + C\right) \cdot (p \cdot \sqrt{1+p^2})_a - (Aa + B)\right] \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Man kann nun diese Gleichung in zwei einzelne zerlegen, und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ bestimmen; hierauf bekommt man noch sechs Gleichungen, mittelst deren man die sechs durch die Integration eingegangenen Constanten gleichfalls bestimmen kann.

Und so fort.

Aufgabe 175.

Man sucht diejenige räumliche Curve, welche zwischen zwei (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzebenen die kürzeste ist.

Die hiesige Aufgabe verlangt, dass der Bogen der gesuchten Curve durch eine Function der Abscisse ausgedrückt, und dann von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt werde. Da nun die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist, so muss (wie aus der Theorie der Rectification bekannt) die erste Ableitung des Bogens bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein. Man darf daher für des Bogens erste Ableitung nur den eindeutigen positiven Ausdruck $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ und durchaus nicht den zweideutigen $\sqrt[W]{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ setzen. Die Aufgabe ist also:

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass das zwischen den Gränzen von a bis α erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

kleiner wird, als es von allen andern den gesuchten Functionen bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen gemacht werden kann. Mutirt man nun, und setzt man zur Abkürzung p anstatt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ anstatt $\frac{dz}{dx}$; so bekommt man

Digitized by Google

$$\delta U = \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx$$

und wenn man umformt, so bekommt man

$$\delta U = \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Untersuchung der ersten Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn die beiden identischen Gleichungen $p = 0$ und $\mathfrak{p} = 0$ stattfinden. Integrirt man sie, so gibt sich

$$y = B, \quad \text{und} \quad z = F$$

wo B und F zwei willkürliche Constanten sind. Durch diese beiden Gleichungen ist aber die mit der Abscissenaxe X parallele Grade dargestellt. Die Gränzen a und α, welche sie auch sein mögen, haben durchaus keinen Einfluss auf die hier gefundenen Functionen $y = B$ und $z = F$; und bei ihr wird nicht allein die erste, sondern auch die zweite Form des δU zu Null. Ferner ist jetzt

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen positiv, und es ist nicht nöthig, ihn noch umzuformen. Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss auf die Functionen $y = B$ und $z = F$ haben, so machen sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte Integral U zu einem Minimum-stande.

Untersuchung der zweiten Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch von den Gränzen a und α abhängige Functionen gibt, die aber nur das zwischen diesen Gränzen erstreckte Integral U zu einem Minimum-stande machen. Damit nun $\delta U = 0$ werde, hat man die beiden Hauptgleichungen

$$\text{I)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0, \quad \text{und II)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{III)} \quad \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a = 0$$

Aus den Gleichungen I und II folgt zunächst

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = h, \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = g$$

Daraus gibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2 - g^2}} = A, \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{g}{\sqrt{1 - h^2 - g^2}} = E$$

Also ist

$$\text{IV)} \quad y = A \cdot x + B, \quad \text{und} \quad \text{V)} \quad z = E \cdot x + F$$

wo A, B, E, F vier noch zu bestimmende Constanten sind. Die grade Linie im Raume genügt also der Aufgabe, aber nicht jede grade Linie im Raume, sondern nur diejenigen, welche solchen Gränzbedingungen unterworfen sind, dass die Gränzengleichung III, welche jetzt folgende Form

$$\text{VI)} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot (A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - E \cdot \delta z_a) = 0$$

annimmt, hinwegfällt; und diese graden Linien machen das zwischen den Gränzen a und α erstreckte Integral $U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + A^2 + E^2}$ und kein zwischen andern Gränzen erstrecktes Integral zu einem Minimum-stande. In Folge alles Vorhergehenden bleibt für $\delta^2 U$ jetzt nur

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot (A \cdot \delta^2 y_\alpha + E \cdot \delta^2 z_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a - E \cdot \delta^2 z_a)$$

$$+ \frac{1}{(1 + A^2 + E^2) \cdot \sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(A \cdot \frac{d\delta z}{dx} - E \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist für jeden beliebigen Werth des x beständig positiv, also ist das Integral selbst beständig positiv; und somit findet ein Minimum-stand statt. (Man sehe §. 239 und 240.)

Erster Fall. Ist der Anfangspunkt und Endpunkt der gesuchten Linie fest, und ersterer gegeben durch $x = a$, $y_a = b$, $z_a = c$, der zweite aber durch $x = \alpha$, $y_\alpha = \beta$, $z_\alpha = \gamma$; so ist hier (nach §. 87) $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und man hat für Anfangspunkt und Endpunkt der gesuchten Linie folgende vier Gleichungen $b = Aa + B$, $c = Ea + F$, $\beta = A\alpha + B$, $\gamma = E\alpha + F$, woraus sich die vier Constanten A, B, E, F bestimmen lassen, so dass durch die beiden Gleichungen

$$y = \frac{\beta - b}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha - a} \quad \text{und} \quad z = \frac{\gamma - c}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha - a}$$

die gesuchte Grade im Raume völlig bestimmt ist. Ferner ist

$$U' = \int_a^\alpha V \cdot dx = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2}$$

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Linie von einem festen Punkte bis zu einer (z. B. auf der Coordinatenebene XZ) senkrechten unendlichen Graden gezogen werden; und ist der feste Punkt gegeben durch $x = a$, $y_a = b$, $z_a = c$; so ist dann die senkrechte Grade gegeben durch $x = \alpha$ und $z_\alpha = \gamma$. Es ist also auch hier $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.; dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. sind willkürlich. Die Gränzengleichung VI reducirt sich daher jetzt auf $\frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \delta y_\alpha = 0$, d. h. $A = 0$. Die Gleichungen der gesuchten Graden sind also jetzt

$$y = B = b, \quad \text{und} \quad z = \frac{\gamma - c}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha - a}$$

d. h. die gesuchte Grade geht durch den Punkt (a, b, c), ist mit der Coordinatenebene XZ parallel, und steht senkrecht auf der gegebenen Gränzlinie. Dabei ist

$$U' = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\gamma - c)^2}$$

Dritter Fall. Sucht man die kürzeste Linie im Raume, welche zwischen zwei unendlichen Graden gezogen werden kann, die miteinander parallel sind, und auf einer der Coordinatenebenen (z. B. auf XZ) senkrecht stehen; und sind diese Senkrechten gegeben durch $x = a$, $z_a = c$, und durch $x = \alpha$, $z_\alpha = \gamma$; so ist $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.; dagegen δy_a und δy_α sind (nach §. 92) dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und können im Allgemeinen nicht zu Null werden. Die Gränzengleichung VI reducirt sich also auf $\frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$, d. h. es ist $A = 0$; und die beiden Gleichungen der gesuchten Linie sind

$$y = B, \quad \text{und} \quad z = \frac{\gamma - c}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha c - a\gamma}{\alpha - a}$$

Da B nicht bestimmt werden kann, so läuft die gesuchte Grade in jeder beliebigen Entfernung mit der Coordinatenebene XZ parallel, und steht auf den beiden Gränzlinien senkrecht. Auch hier ist

$$U' = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\gamma - c)^2}$$

Digitized by Google

Vierter Fall. Sucht man die kürzeste Linie im Raume, welche zwischen zwei auf verschiedenen Coordinatenebenen (z. B. auf XZ und auf XY) senkrechten unendlichen Graden gezogen werden kann; und ist die auf XZ senkrechte Grade bestimmt durch $x = a$ und $z_a = c$, dagegen die auf XY senkrechte Grade durch $x = \alpha$ und $y_\alpha = \beta$; so ist jetzt $\delta z_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc.; aber δy_a, δz_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_\alpha$, etc. sind im Allgemeinen nicht Null. Die Gränzengleichung VI reducirt sich also auf $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot (E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a) = 0$, d. h. es ist $A = 0$ und $E = 0$. Die beiden Gleichungen der gesuchten Linie sind also jetzt

$$y = \beta \text{ und } z = c$$

d. h. sie läuft mit der Coordinatenebene XZ in der Entfernung β, und mit der Coordinatenebene XY in der Entfernung c parallel, und steht auf beiden Gränzlinien zugleich senkrecht. Hier ist $U' = \alpha - a$.

Fünfter Fall. Sucht man die kürzeste Entfernung zwischen zwei auf der Coordinatenebene XY senkrechten Graden, während kein fester Punkt in ihnen gegeben, jedoch die Bedingung gestellt ist, dass dieselben um die beständige Differenz K verschieden sein sollen; so ist jetzt $z_\alpha - z_a = K$. Daraus folgt $\delta z_\alpha = \delta z_a$, $\delta^2 z_\alpha = \delta^2 z_a$, etc. Die hier in Rede stehenden Senkrechten sind gegeben durch $x = a$, $y_a = b$, und durch $x = \alpha$, $y_\alpha = \beta$; und dabei ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Der Gränzengleichung wird also von selbst genügt, und die Gleichungen der gesuchten Linie sind

$$y = \frac{\beta - b}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha \cdot b - a \cdot \beta}{\alpha - a}, \text{ und } z = \frac{K}{\alpha - a} \cdot x + F$$

wo F beliebig ist. Endlich ist $U' = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + K^2}$.

Sechster Fall. Soll die Summe der Gränzordinaten z_a und z_α beständig dieselbe bleiben, d. h. soll immer $z_a + z_\alpha = K$ sein; so ist $\delta z_\alpha = - \delta z_a$, $\delta^2 z_\alpha = - \delta^2 z_a$, etc.; und es folgt $E = 0$. Daher sind die Gleichungen der gesuchten Linie

$$y = \frac{\beta - b}{\alpha - a} \cdot x + \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha - a}, \text{ und } z = \frac{K}{2}$$

Sie läuft also in der Entfernung $\frac{K}{2}$ mit der Coordinatenebene XY parallel. Dabei ist $U' = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2}$.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, befindet sich in Lagrange's Werke „Leçons sur le Calcul des Fonctions" (und zwar im zweiten Beispiele der 22sten Vorlesung). Sie wurde später von fast allen Schriftstellern, welche über Variationscalcul schrieben, aufgenommen, aber immer sehr mangelhaft behandelt.

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man:

1) Die Untersuchung der ersten Form des δU.
2) Die verschiedenen Gränzfälle, welche sich bei der zweiten Form des δU befinden.

Aufgabe 176.

Man sucht die kürzeste Entfernung von einer im Endpunkte der Abscisse $x = a$ auf der Abscissenaxe senkrechten Ebene bis zu der durch die Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen räumlichen Curve.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass sowohl die zur Abscisse $x = a$ gehörige Ebene als auch die durch die Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebene Gränzcurve, sowie die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der Gränzcurve sich endigende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der

Digitized by Google

gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (entweder in dem noch zu ermittelnden Punkte, oder in den ihm nächstgelegenen übrigens nur in der Gränzcurve befindlichen Nachbarpunkten, sich endigenden) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt also für y und z solche Functionen von x, und für α einen solchen Werth, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Bei dem jetzt nöthigen Mutiren muss a constant bleiben, und nur α darf Werthänderungen erleiden. Bei der ersten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ werden die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinate nicht vorkommen. Diese Mutationen müssen aber, wie schon (in der Einleitung zur 160sten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, der Untersuchung unterworfen werden. Man kann also die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ diesmal nicht beachten; und desshalb stelle man nur die zweite Form her, welche, wenn man noch zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$ und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt, folgende ist;

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = -\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$
$$+ \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)_a + \left(\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

Soll nun ${}_{(}\delta_{)}U = 0$ werden, so bekommt man die beiden Hauptgleichungen

$$\text{III)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right) = 0, \text{ und IV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

woraus sich ergibt

$$\text{V)}\quad y = A \cdot x + B, \text{ und VI)}\quad z = E \cdot x + F$$

welches die Gleichungen einer graden Linie im Raume sind, wie zu erwarten war. Als Gränzengleichung bekommt man jetzt

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - E \cdot \delta z_a + (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}}$ auch hätte weglassen können. Mutirt man noch einmal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \int_a^\alpha \delta^2V \cdot dx + 2 \cdot \delta V_\alpha \cdot \vartheta\alpha + V_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2$$

Nun ist $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right)$; und weil aus den Gleichungen V und VI folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ ist, so ist auch

$$\text{IX)}\quad \frac{dV}{dx} = 0$$

Nimmt man jetzt mit VIII die gehörige Umformung vor, und berücksichtigt man dann die Gleichungen III, IV und IX; so bleibt nur

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}} \cdot \left[A \cdot \delta^2 y_\alpha + E \cdot \delta^2 z_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a - E \cdot \delta^2 z_a\right.$$
$$\left. + 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2\alpha\right]$$

Digitized by Google

Nun ist man soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b, c) bis zu einer durch die Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen räumlichen Curve; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, etc. Die Gränzengleichung VII reducirt sich also auf

$$\text{XI)} \quad A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha + (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat.

Da die gegebene Gränzcurve von der gesuchten Graden geschnitten wird, so muss bei diesem Durchschnittspunkte

$$1) \quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 2) \quad z_\alpha = \gamma$$

sein; und man kann diesen ersten Fall von hier an auf dreierlei Weise durchführen, je nachdem man von den drei Coordinaten der Gränzcurve entweder α oder β oder γ als das dem Werthe nach willkürliche Element behandelt. Die Durchführung dieses ersten Falles wird aber am einfachsten, und der Calcul selbst nimmt die meiste Symmetrie an, wenn man die Abscisse α als das dem Werthe nach willkürliche Element, dagegen die Ordinaten β und γ als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandelt. Man sondere daher β und γ aus den beiden Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ab, so dass man $\beta = \chi(\alpha)$ und $y = \xi(\alpha)$ bekommt. Statt der Gleichungen $y_\alpha = \beta$ und $z_\alpha = \gamma$ muss man also setzen

$$3) \quad y_\alpha = \chi(\alpha), \qquad \text{und} \qquad 4) \quad z_\alpha = \xi(\alpha)$$

oder vielmehr

$$5) \quad A \cdot \alpha + B = \chi(\alpha), \qquad \text{und} \qquad 6) \quad E \cdot \alpha + F = \xi(\alpha)$$

Man erkennt aber, dass sich aus diesen beiden Gleichungen nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des α ergeben, und dass von diesen Werthen des α nur diejenigen beachtet werden können, welche den beiden Gleichungen 5 und 6 zugleich genügen. Sie sind also keine identischen Gleichungen. Will man daher dem α einen Werth $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welcher den Gleichungen 5 und 6 nicht entspricht; so muss man an die Stelle des y und des z auch andere Functionen $y + \Delta y = Ax + B + \Delta y$ und $z + \Delta z = Ex + F + \Delta z$ in die Gleichungen 3 und 4 einführen. Man muss also, wie schon (im ersten Falle der 160sten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, die Gleichungen 3 und 4 einer gemischten Mutation unterwerfen; und wenn man wie dort verfährt, so bekommt man

$$7) \quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right) \cdot \vartheta\alpha$$

$$8) \quad \delta z_\alpha - \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - E\right) \cdot \vartheta\alpha$$

$$9) \quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right) \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

$$10) \quad \delta^2 z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - E\right) \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

etc. etc.

Führt man die hier für δy_α und δz_α aufgestellten Ausdrücke in XI ein, so bekommt man als Gränzengleichung

$$\text{XII)} \quad \left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\alpha$ folgt aus dieser Gleichung

Digitized by Google

$$\text{XIII)}\quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Eliminirt man jetzt $\delta^2 y_\alpha$ und $\delta^2 z_\alpha$ aus X, und beachtet man dabei Gleichung XIII, sowie dass $\delta^2 y_a = 0$ und $\delta^2 z_a = 0$ ist; so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left(A \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + E \cdot \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2$$

Der Theilsatz mit den Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimum-stand stattfindet; dagegen der mit dem Differenzcoefficienten versehene Theilsatz wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Nun sind a, b und c gegeben. Die sieben Stücke α, β, γ, A, B, E, F können also bestimmt werden durch die Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$.

Was Gleichung XIII anbelangt, so beachte man Folgendes: Die Gleichungen der die Gränzcurve berührenden Graden sind

$$\beta' = \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \alpha' + g, \quad \text{und} \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{d\alpha} \cdot \alpha' + h$$

wo unter α', β', γ' die veränderlichen Coordinaten dieser Berührenden vorgestellt sind. Da ferner $y = Ax + B$ und $z = Ex + F$ die Gleichungen der gesuchten Graden sind; so schneiden sich diese beiden Graden unter einem Winkel, dessen Cosinus bekanntlich

$$= \frac{1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}}{(\sqrt{1 + A^2 + E^2}) \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2}\right)}$$

ist. Da nun (nach Gleichung XIII) der Zähler dieses Bruches Null ist; so schneiden sich diese beiden Graden unter einem rechten Winkel, d. h. die gesuchte Grade steht auf der gegebenen Gränzcurve senkrecht.

Zusatz 1. Die theoretische Durchführung dieses ersten Falles hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}$. Es ist also ganz einerlei, ob die Gränzcurve durch gesonderte oder ungesonderte Gleichungen gegeben ist, und ob in diesen Gleichungen alle drei Coordinaten oder nur zwei enthalten sind; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor β und γ absondert.

Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b, c) bis zu einer durch die Gleichungen

$$11)\quad \beta = G \cdot \alpha + H, \qquad \text{und} \qquad 12)\quad \gamma = K \cdot \alpha + L$$

gegebenen Graden; so ist jetzt $\frac{d\beta}{d\alpha} = G$, $\frac{d\gamma}{d\alpha} = K$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} = 0$, etc. Gleichung XIV reducirt sich also jetzt auf

$$\text{XV)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Zusatz 2. Dass dieser für ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die Gränzcurve diesmal eine grade Linie ist, zusammenhangt. Aus Gleichung 11 und 12 folgt nemlich $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$ und $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} = 0$; und so fällt der mit $\vartheta\alpha^2$ versehene Theilsatz aus XIV hinweg. Der in XV für ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ hergestellte Ausdruck liefert aber dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann.

Digitized by Google

Von der gesuchten Graden kann nemlich die gegebene Grade nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, welches im festen Punkte (a, b, c) anfängt, und in der gegebenen Graden aufhört. Sowie nun von unserer Figur nur ein einziges Stück der gesuchten Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; eben so wenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

Zweiter Fall.

Der Punkt (a, b, c) sei nicht fest, sondern es sei nur gesagt, dass er in einer mit der Axe Z parallelen Gränzordinate liege, welche zu dem festen Punkte (a, b) gehört; und man sucht die absolut kürzeste Entfernung von dieser Gränzordinate bis zu der gegebenen räumlichen Curve.

Die zu dem festen Punkte (a, b) gehörige Gränzordinate z_a liegt ganz in der Ebene, welche am Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Weil ferner $y_a = b$ einen fest vorgeschriebenen Werth hat, so ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Gleichung VII reducirt sich also zunächst auf

$$\text{XVI)}\quad A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - E \cdot \delta z_a + (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\dfrac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Aus letzterer Gleichung kann aber das willkürliche Element δz_a nur dadurch wegfallen, dass sein Coefficient zu Null wird, d. h. dass $E = 0$ ist. Die Gleichungen der gesuchten Linie sind also

$$13)\quad y = A \cdot x + B, \qquad \text{und} \qquad 14)\quad z = F$$

Weil $E = 0$, so reducirt sich Gleichung XVI auf

$$\text{XVII)}\quad A \cdot \delta y_\alpha + (1 + A^2) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

und wenn man δy_α eliminirt, so bekommt man

$$\text{XVIII)}\quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Aus den Gleichungen 14 und XVIII folgt bezüglich

1) Die gesuchte Grade läuft mit der Coordinatenebene XY parallel.

2) Die in der Coordinatenebene XY liegende Projection der gesuchten Graden steht auf der in der Coordinatenebene XY liegenden Projection der Gränzcurve senkrecht.

Gleichung X geht jetzt über in

$$\text{XIX)}\quad (\delta)^2 U =$$

$$\frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{1}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[(1 + A^2) \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Die Werthe von a und b sind gegeben. Ferner ist $E = 0$. Die sieben Stücke c, α, β, γ, A, B, F bestimmen sich also durch die Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$.

Dritter Fall.

Der Punkt (a, b, c) sei wieder nicht fest, sondern es sei nur überhaupt gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse $x = a$ auf der Abscissenaxe senkrecht steht; und man sucht die absolut kürzeste Entfernung von dieser Ebene bis zur gegebenen räumlichen Curve.

Jetzt sind die Elemente δy_a, δz_a, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, etc. willkürlich, und durchaus von nichts abhängig. Es können also δy_a und δz_a nur dadurch aus Gleichung VII wegfallen, dass ihre Coefficienten zu Null werden; d. h. dass man

$$15)\quad A = 0, \qquad \text{und} \qquad 16)\quad E = 0$$

setzt. Dabei reducirt sich VII auf

Digitized by Google

$$17)\quad \vartheta\alpha = 0$$

woran man erkennt, dass in diesem dritten Falle der Differenzcoefficient $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf. Aus den Gleichungen der Gränzcurve kann man sich bilden

$$18)\quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta,\quad 19)\quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma,\ \text{und}\quad 20)\quad \vartheta\beta = \frac{d\beta}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma$$

Von den drei Coordinaten α, β, γ der Gränzcurve kann nur eine willkürlich sein, die beiden andern sind abhängig. Man nehme γ, also auch $\vartheta\gamma$, $\vartheta^2\gamma$, etc. als willkürlich. Soll nun $\vartheta\alpha = 0$ werden, so folgt (wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\gamma$) aus Gleichung 19, dass

$$21)\quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = 0$$

sein muss. Nun hangt $\vartheta\beta$ von dem willkürlichen $\vartheta\gamma$ ab, wie durch Gleichung 20 dargestellt ist. Es kann also bei jeder möglichen Abhängigkeit des $\vartheta\beta$ von $\vartheta\gamma$ nur dann das in Gleichung 18 befindliche $\vartheta\alpha$ zu Null werden, wenn auch

$$22)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

ist. Die Gleichung 22 ist also, wie man sieht, eine nothwendige Folge von 21; und sonach erkennt man, dass aus beiden zusammen nicht mehr und nicht weniger gefolgert werden kann, als was aus einer allein. Davon kann man sich auch durch folgende geometrische Betrachtung überzeugen:

„Durch Gleichung 21 ist angezeigt, dass die in der Coordinatenebene XZ liegende „Projection der Berührungslinie, welche zum gesuchten Punkte (α, β, γ) der gegebe-„nen Gränzcurve gehört, auf der Axe X senkrecht steht. Desshalb muss auch die in „der Coordinatenebene XY liegende Projection dieser Berührungslinie auf der Axe X „senkrecht stehen, d. h. es muss auch Gleichung 22 stattfinden."

Weil $A = 0$ und $E = 0$ und der Werth des a gegeben ist; so lassen sich die sieben Stücke b, c, B, F, α, β, γ durch folgende acht Gleichungen $B = b$, $B = \beta$, $F = c$, $F = \gamma$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$, $\frac{d\alpha}{d\gamma} = 0$ bestimmen. Da aber von beiden letzten Gleichungen die eine eine nothwendige Folge der andern ist; so hat man eigentlich doch nur sieben Gleichungen für die sieben zu bestimmenden Stücke.

Weil $A = 0$ und $E = 0$, so reducirt sich Gleichung X auf

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = \vartheta^2\alpha + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

wo man noch $\frac{d^2\alpha}{d\gamma^2}\cdot\vartheta\gamma^2$ an die Stelle des $\vartheta^2\alpha$ einzusetzen hat.

Zusatz 3. Die Gleichung 17 ist sehr merkwürdig; denn durch sie ist ein Beispiel gegeben, dass es oft erst im Verlaufe der Untersuchung sich zeigen kann, welches Element man als abhängig nehmen muss, d. h. dass es Fälle geben kann, wo wir nicht schon im Voraus sagen dürfen, dieses Element wollen wir als abhängig, und jenes wollen wir als unabhängig behandeln. Man hat also hiermit eine thatsächliche Rechtfertigung für mein Verfahren, nach welchem ich für die Werthänderungen aller nichtmutablen Veränderlichen, sie mögen abhängig oder unabhängig sein, unaufhörliche Reihen setze. Ist die Untersuchung bis auf einen gewissen Punkt gediehen, dann kann man noch immer entscheiden, bei welcher Werthänderung das erste Glied der Reihe genügt, und bei welcher Werthänderung auch noch höhere Glieder der Reihe nöthig sind. (Man vergleiche Bd. I. S. 117; besonders Zusatz 7 in Aufgabe 160, und Zusatz 4 in Aufgabe 178.)

Zusatz 4. Wenn die zur Abscisse a gehörige senkrechte Ebene von der Gränzlinie nur berührt, aber niemals geschnitten wird; so ist die absolut kürzeste Entfernung gleich Null. Dasselbe gilt, wenn die Gränzlinie eine Grade ist, und in besagte Ebene hineinfällt. Wenn aber diese Ebene von der Gränzlinie geschnitten wird, so kann von einer absolut kürzesten Entfernung keine Rede sein; dagegen eine relativ kürzeste Entfernung kann allerdings gefordert werden. Alles dieses ist bereits (Aufgabe 160, Zusatz 6) hinlänglich erläutert.

Es sollen nun einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.

Digitized by Google

Vierter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen der Unterschied der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 23) & y_\alpha = \beta \\ 24) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \quad \text{und} \quad 25) \quad z_a - y_a = \mathfrak{K}$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Weil a constant ist, so kann man Gleichung 25 nur einer reinen Mutation unterwerfen. Man bekommt also

$$26) \quad \delta z_a - \delta y_a = 0, \qquad \text{und} \qquad 27) \quad \delta^2 z_a - \delta^2 y_a = 0$$

Durch diese Gleichungen ist angezeigt, dass zwischen δy_a und δz_a, dass zwischen $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 z_a$, etc. eine Abhängigkeit stattfindet. Man nehme δz_a und $\delta^2 z_a$ als abhängig; so bekommt man

$$28) \quad \delta z_a = \delta y_a, \qquad 29) \quad \delta^2 z_a = \delta^2 y_a$$

Eliminirt man δy_a, δy_α, δz_α aus VII, so gibt sich

$$30) \quad \left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha - (A + E) \cdot \delta y_a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Letztere Gleichung zerlegt sich ohneweiters in

$$31) \quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0, \quad \text{und} \quad 32) \quad A + E = 0$$

Gleichung 25 geht über in

$$33) \quad (E - A) \cdot a + F - B = \mathfrak{K}$$

Nun ist a gegeben. Die neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich also durch die Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $A + E = 0$, $1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, $(E - A) \cdot a + F - B = \mathfrak{K}$.

Stellt man jetzt den Ausdruck für das Prüfungsmittel her, und beachtet man, dass $E = -A$; so bekommt man

$$\text{XXI)} \quad \delta^2 U = \frac{A}{\sqrt{1 + 2 \cdot A^2}} \cdot \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2$$
$$+ \frac{1}{(1 + 2 \cdot A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[A^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Fünfter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Summe der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

Digitized by Google

$$34)\ y_\alpha = \beta \quad 35)\ z_\alpha = \gamma \Big\},\ \text{und}\ 36)\ z_\alpha + z_a = K$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 36 einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man bekommt also

$$37)\ \delta z_\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \delta z_a = 0$$

$$38)\ \delta^2 z_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d^2 z_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \delta^2 z_a = 0$$

etc. etc.

Eliminirt man δz_α und $\delta^2 z_\alpha$ aus diesen Gleichungen, so bekommt man bezüglich

$$39)\ \frac{d\gamma}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \delta z_a = 0\ .$$

$$40)\ \frac{d\gamma}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \delta^2 z_a = 0$$

etc. etc.

Eliminirt man δz_a, δy_α, δz_α aus VII; so bekommt man

$$41)\ \left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha - A \cdot \delta y_a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Weil δy_a dem Werthe nach ganz willkürlich ist; so fällt es nur dadurch weg, dass man seinen Coefficient zu Null werden lässt. Es ist also zunächst

$$42)\ A = 0$$

Somit reducirt sich der bei dem willkürlichen $\vartheta\alpha$ befindliche Factor auf

$$43)\ 1 + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Die Gleichungen der gesuchten Graden sind also

$$44)\ y = B, \quad \text{und} \quad 45)\ z = E \cdot x + F$$

Gleichung 36 geht über in

$$46)\ E \cdot (\alpha + a) + 2F = K$$

Nun ist a gegeben. Die acht Stücke b, c, α, β, γ, B, E, F bestimmen sich also durch die Gleichungen $B = b$, $B = \beta$, $c = E \cdot a + F$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $1 + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, $E \cdot (\alpha + a) + 2F = K$.

Eliminirt man $\delta^2 z_a$ und $\delta^2 z_\alpha$ aus X, und beachtet man noch Gleichung 43; so bekommt man

$$\text{XXII)}\ (\delta)^2 U =$$

$$\frac{2E}{\sqrt{1 + E^2}} \cdot \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{1}{(1 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[(1 + E^2) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Sechster Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der mit der Axe Y parallelen Ordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$, und

2) die Summe der mit der Axe Z parallelen Ordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 47) & y_\alpha = \beta \\ 48) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{ll} 49) & y_a + y_\alpha = \mathfrak{K} \\ 50) & z_a + z_\alpha = K \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, welche von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Hier folgt aus der Gränzengleichung

$$51)\quad 1 + 2A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Nun ist a gegeben. Die neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich also durch die neun Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = Ea + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $A \cdot (a + \alpha) + 2B = \mathfrak{K}$, $E \cdot (a + \alpha) + 2F = K$, $1 + 2A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$.

Für das Prüfungsmittel bekommt man

$$\text{XXIII)}\quad (\delta)^2 U = \frac{2}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left(A \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + E \cdot \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2$$

$$+ \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Siebenter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der beiden mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten nebst der Summe der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$, und

2) die Summe der beiden mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten nebst der Summe der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 52) & y_\alpha = \beta \\ 53) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 54) & a + \alpha + y_a + y_\alpha = \mathfrak{K} \\ 55) & a + \alpha + z_a + z_\alpha = K \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Aus der Gränzengleichung folgt diesmal

$$56)\quad 1 + A + E + 2A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + 2E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Nun ist a gegeben. Man hat also zur Bestimmung der neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F auch neun Gleichungen.

Das Prüfungsmittel hat dieselbe Form, wie Gleichung XXIII.

Achter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) der Unterschied der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K,

2) der Unterschied der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$,

3) das Product der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten nebst dem Producte der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt gegebenen Werth H, und

4) das Product der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten nebst dem Producte der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt gegebenen Werth $\mathfrak{H}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} 57) & y_\alpha = \beta \\ 58) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} 59) & z_a - y_a = K \\ 60) & z_\alpha - y_\alpha = \mathfrak{K} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} 61) & y_a \cdot y_\alpha + a \cdot \alpha = H \\ 62) & z_a \cdot z_\alpha + a \cdot \alpha = \mathfrak{H} \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzcurve möglich ist.

Unterwirft man diese Gleichungen einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man wird aber ohneweiters erkennen, dass wegen der Menge der Gränzbedingungen keine Mutation der Gränzordinaten, weder eine reine noch gemischte, stattfinden kann, während δy, δz, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null werden.

Nun ist a gegeben. Zur Bestimmung der neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F hat man die zehn Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $(E - A) \cdot a + F - B = K$, $(E - A) \cdot \alpha + F - B = \mathfrak{K}$, $(A \cdot a + B) \cdot (A \cdot \alpha + B) + a \cdot \alpha = H$, $(E \cdot a + F) \cdot (E \cdot \alpha + F) + a \cdot \alpha = \mathfrak{H}$. Diese zehn Gleichungen können, weil eine zuviel ist, einander leicht widersprechen; dann ist die Aufgabe überbestimmt, d. h. unmöglich. (Man vergleiche den siebenten Fall der 160sten Aufgabe.)

Wenn man den Ausdruck für ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ herstellt, so wird derselbe keinen Differenzcoefficienten enthalten. Der Grund davon ist bereits auseinandergesetzt. (Man sehe Zusatz 8 in Aufgabe 160.)

Schaut man auf den achten Fall der 178sten Aufgabe, wo nicht eine Gränzcurve, sondern eine Gränzfläche gegeben ist; so erkennt man, dass bei ganz gleichen Gränzbedingungen die Aufgabe noch keine überbestimmte ist, d. h. dass man zur Bestimmung der neun Stücke nur neun Gleichungen hat.

Schlussbemerkung. Aufgaben dieser Art konnten erst gelöst werden, nachdem Lagrange seinen Variationscalcul erfunden hatte. In der zweiundzwanzigsten Vorlesung seines Werkes „Leçons sur le Calcul des fonctions" theilt er Beispiele mit; und in dem zweiten derselben wird die absolut kürzeste Entfernung zweier räumlichen Curven verlangt. (Die nemliche Forderung wird im ersten Falle der nächsten Aufgabe gestellt werden.)

Was die Methode, womit ich dergleichen Aufgaben auflöse, und was die andern Beiträge, die ich zu diesen Aufgaben selbst hinzugefügt habe, betrifft; darüber vergleiche man die Schlussbemerkung zu Aufgabe 160.

Aufgabe 177.

Man sucht die kürzeste Entfernung zwischen zwei räumlichen Curven, deren erste durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f'(a, b, c) = 0$, und deren zweite durch die Gleichungen $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegeben ist.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass sowohl die beiden Gränzcurven als auch die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der ersten Gränzcurve anfangende und in einem noch zu ermittelnden Punkte der zweiten Gränzcurve aufhörende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (und entweder durch die noch zu ermittelnden oder durch die ihnen nächstgelegenen übrigens nur in den Gränzcurven befindlichen Nachbarpunkte begränzten) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt


Digitized by Google

also für y und z solche Functionen von x, und für a und α solche Werthe, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Bei dem jetzt nöthigen gemischten Mutiren müssen sowohl a als auch α Werthänderungen erleiden. Bei der ersten Form des $_{(}\delta_{)}U$ werden die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinaten nicht vorkommen. Diese Mutationen müssen aber, wie schon (in der Einleitung zur 160sten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, der Untersuchung unterworfen werden. Man kann also die erste Form des $_{(}\delta_{)}U$ diesmal nicht beachten; und desshalb stelle man nur die zweite Form her, welche, wenn man noch zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$ und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt, folgende ist:

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U =$$

$$-\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

$$+ \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a + \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta a - \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_a \cdot \vartheta a$$

Soll $_{(}\delta_{)}U = 0$ werden, so bekommt man die beiden Hauptgleichungen

$$\text{III)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0, \text{ und IV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

woraus sich

$$\text{V)}\quad y = A \cdot x + B, \qquad \text{VI)}\quad z = E \cdot x + F$$

ergibt, welches die Gleichungen einer graden Linie im Raume sind, wie zu erwarten war. Als Gränzengleichung bekommt man jetzt

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - E \cdot \delta z_a$$
$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta a] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ auch hätte weglassen können. Mutirt man noch einmal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta^2{}_{)}U = \int_a^\alpha \delta^2 V \cdot dx + 2 \cdot \delta V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \delta V_a \cdot \vartheta a$$
$$+ V_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - V_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$

Nun ist $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right)$; und weil aus den Gleichungen V und VI folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, so ist auch

$$\text{IX)}\quad \frac{dV}{dx} = 0$$

Nimmt man jetzt mit VIII die gehörige Umformung vor, und berücksichtigt man die Gleichungen III, IV und IX; so bleibt nur

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta^2{}_{)}U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left[A \cdot \delta^2 y_\alpha + E \cdot \delta^2 z_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a - E \cdot \delta^2 z_a + \right.$$

$$+ 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2 a \Big]$$

Man ist nun soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Man sucht die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei räumlichen Curven, deren eine durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f'(a, b, c) = 0$, und deren andere durch die Gleichungen $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegeben ist. Da die gegebene Gränzcurve von der gesuchten Graden geschnitten werden, so muss bei diesen Durchschnittspunkten

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y_a = b \\ 2) & z_a = c \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 3) & y_\alpha = \beta \\ 4) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right.$$

sein; und man kann diesen ersten Fall von hier an auf verschiedene Weise durchführen, weil man von den Coordinaten der ersten Gränzcurve entweder a oder b oder c als das dem Werthe nach willkürliche Element, und weil man ebenso von den Coordinaten der zweiten Gränzcurve entweder α oder β oder γ als das dem Werthe nach willkürliche Element behandeln kann. Die Durchführung dieses ersten Falles wird aber am einfachsten, und der Calcul selbst nimmt die meiste Symmetrie an, wenn man die Abscissen a und α als die dem Werthe nach willkürlichen, dagegen die Ordinaten b, c, β, γ als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandelt. Man sondere also b und c aus den beiden Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f'(a, b, c) = 0$ ab, so dass man

$$5) \quad b = \chi'(a), \qquad \text{und} \qquad 6) \quad c = \xi'(a)$$

bekommt. Ebenso sondere man β und γ aus den beiden Gleichungen $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ab, so dass man

$$7) \quad \beta = \chi''(\alpha), \qquad \text{und} \qquad 8) \quad \gamma = \xi''(\alpha)$$

bekommt. Die Gleichungen 1, 2, 3, 4 gehen also bezüglich über in

$$\left.\begin{array}{ll} 9) & y_a = \chi'(a) \\ 10) & z_a = \xi'(a) \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 11) & y_\alpha = \chi''(\alpha) \\ 12) & z_\alpha = \xi''(\alpha) \end{array}\right.$$

und wenn man hier $A \cdot x + B$ und $E \cdot x + F$ statt y und z einsetzt, so gehen diese Gleichungen über in

$$\left.\begin{array}{ll} 13) & A \cdot a + B = \chi'(a) \\ 14) & E \cdot a + F = \xi'(a) \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 15) & A \cdot \alpha + B = \chi''(\alpha) \\ 16) & E \cdot \alpha + B = \xi''(\alpha) \end{array}\right.$$

Man erkennt aber, dass sich aus den Gleichungen 13 und 14 nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des a ergeben, und dass von diesen Werthen des a nur diejenigen beachtet werden dürfen, welche den beiden Gleichungen 13 und 14 zugleich genügen. Sie sind also keine identischen Gleichungen.

Ebenso erkennt man, dass sich aus den Gleichungen 15 und 16 nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des α ergeben, und dass von diesen Werthen des α nur diejenigen beachtet werden dürfen, welche den beiden Gleichungen 15 und 16 zugleich genügen. Sie sind also gleichfalls keine identischen Gleichungen.

Will man also dem a einen Werth (a + Da) beilegen, welcher den beiden Gleichungen 13 und 14 nicht entspricht; will man ebenso dem α einen Werth $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welcher den beiden Gleichungen 15 und 16 nicht entspricht; so muss man an die Stelle des y eine andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 9 und 11 einsetzen, und an die Stelle des z muss man eine andere Function $z + \Delta z = E \cdot x + F + \Delta z$ in Gleichung 10 und 12 einsetzen. Man muss also die Gleichungen 9, 10, 11, 12 einer gemischten Mutation unterwerfen, wie schon früher (im ersten Falle der vorigen und der 160[ten] Aufgabe) auseinandergesetzt ist. Weil nun $y = Ax + B$, und $z = E \cdot x + F$; so ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{dz}{dx} = E$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

Digitized by Google

$\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, etc. Es ist also auch im Besonderen $\frac{dy_a}{da} = \frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{dz_a}{da} = \frac{dz_\alpha}{d\alpha} = E$, $\frac{d^2y_a}{da^2} = \frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2z_a}{da^2} = \frac{d^2z_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. Wenn man daher wie früher (im ersten Falle der 160sten Aufgabe) verfährt, so bekommt man

$$17)\quad \delta y_a = \left(\frac{db}{da} - A\right) \cdot \vartheta a$$

$$18)\quad \delta z_a = \left(\frac{dc}{da} - E\right) \cdot \vartheta a$$

$$19)\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right) \cdot \vartheta\alpha$$

$$20)\quad \delta z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - E\right) \cdot \vartheta\alpha$$

$$21)\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{db}{da} - A\right) \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \frac{d\delta y_a}{da} \cdot \vartheta a$$

$$22)\quad \delta^2 z_a = \left(\frac{dc}{da} - E\right) \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2c}{da^2} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \frac{d\delta z_a}{da} \cdot \vartheta a$$

$$23)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - A\right) \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

$$24)\quad \delta^2 z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - E\right) \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 - 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

etc. etc.

Eliminirt man δy_a, δz_a, δy_α, δz_α aus VII, so gibt sich

$$\text{XI)}\quad \left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha - \left(1 + A \cdot \frac{db}{da} + E \cdot \frac{dc}{da}\right) \cdot \vartheta a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Wegen der Willkürlichkeit des ϑa und $\vartheta\alpha$ zerlegt sich diese Gleichung in folgende zwei:

$$\text{XII)}\quad 1 + A \cdot \frac{db}{da} + E \cdot \frac{dc}{da} = 0, \quad \text{und XIII)}\quad 1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + F \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$$

Eliminirt man $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$ aus X, und beachtet man die beiden Gleichungen XII und XIII; so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left[\left(A \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + E \cdot \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(A \cdot \frac{d^2b}{da^2} + E \cdot \frac{d^2c}{da^2}\right) \cdot \vartheta a^2\right]$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; dagegen das mit Differenzcoefficienten versehene Aggregat wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Die zehn Stücke a, b, c, α. β, γ, A, B, E, F werden bestimmt durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$, $f'(a, b, c) = 0$, $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $A \cdot a + B = b$, $E \cdot a + F = c$, $A \cdot \alpha + B = \beta$, $E \cdot \alpha + F = \gamma$, $1 + A \cdot \frac{db}{da} + E \cdot \frac{dc}{da} = 0$, und $1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$.

Wenn man mit den beiden Gleichungen XII und XIII ebenso verfährt, wie in voriger Aufgabe mit der Gleichung XIII geschehen ist; so gelangt man zu der Erkenntniss, dass die absolut kürzeste Entfernung auf beiden Gränzcurven zugleich senkrecht steht, d. h. der Durchschnitt zweier Normalebenen ist

Digitized by Google

Zusatz 1. Die theoretische Durchführung dieses ersten Falles hat nur Gebrauch gemacht von den totalen Differentialquotienten $\frac{db}{da}, \frac{dc}{da}, \frac{d\beta}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{d\alpha}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^2c}{da^2}, \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}, \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}$. Es ist also ganz einerlei, ob die beiden Gränzcurven durch gesonderte oder ungesonderte Gleichungen gegeben sind, und ob in diesen Gleichungen alle drei Coordinaten oder nur zwei vorkommen; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen ohne dass man zuvor b, c, β und γ absondert.

Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 25) & b = \mathfrak{G} \cdot a + \mathfrak{H} \\ 26) & c = \mathfrak{K} \cdot a + \mathfrak{M} \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 27) & \beta = G \cdot \alpha + H \\ 28) & \gamma = K \cdot \alpha + M \end{array}\right.$$

gegebenen Graden im Raume; so ist $\frac{db}{da} = \mathfrak{G}$, $\frac{dc}{da} = \mathfrak{K}$, $\frac{d\beta}{d\alpha} = G$, $\frac{d\gamma}{d\alpha} = K$, $\frac{d^2b}{da^2} = 0$, $\frac{d^2c}{da^2} = 0$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} = 0$, etc. Die Gleichungen XII und XIII gehen also jetzt über in

$$29) \quad 1 + A \cdot G + E \cdot K = 0, \text{ und } 30) \quad 1 + A \cdot \mathfrak{G} + E \cdot \mathfrak{K} = 0$$

Daraus folgt

$$31) \quad A = \frac{K - \mathfrak{K}}{G \cdot \mathfrak{K} - \mathfrak{G} \cdot K}, \text{ und } 32) \quad E = -\frac{G - \mathfrak{G}}{G \cdot \mathfrak{K} - \mathfrak{G} \cdot K}$$

so dass die Gleichungen der absolut kürzesten Entfernung jetzt sind

$$33) \quad y = \frac{K - \mathfrak{K}}{G \cdot \mathfrak{K} - \mathfrak{G} \cdot K} \cdot x + B$$

und

$$34) \quad z = -\frac{G - \mathfrak{G}}{G \cdot \mathfrak{K} - \mathfrak{G} \cdot K} \cdot x + F$$

wo aber B und F noch bestimmt werden müssen. Aus der 161sten Aufgabe weiss man, dass zwei grade Linien in *einer* Ebene nur dann eine absolut kürzeste Entfernung haben, wenn sie parallel sind. Diese Einschränkung findet bei graden Linien im Raume, welche *nicht* in *einer* Ebene liegen, *nicht* statt, sondern diese haben jederzeit eine absolut kürzeste Entfernung. Wenn es sich also bei zwei graden Linien im Raume einmal trifft, dass sie in *einer* Ebene liegen, ohne parallel zu sein; so muss sich in den Gleichungen 29 und 30 ein Widerspruch zeigen, aus welchem die Unmöglichkeit der Aufgabe gefolgert wird. Gleichung XIV reducirt sich jetzt auf

$$\text{XV)} \quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = \frac{1}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Zusatz 2. Dass dieser für ${}_{(}\delta_{)}^{2}U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die Gränzcurven diesmal grade Linien sind, zusammenhangt. Aus den Gleichungen 25, 26, 27, 28 folgt nemlich $\frac{d^2b}{da^2} = 0$, $\frac{d^2c}{da^2} = 0$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} = 0$; und so fallen die mit ϑa^2 und $\vartheta\alpha^2$ versehenen Theilsätze aus XIV hinweg. Der in XV für ${}_{(}\delta_{)}^{2}U$ hergestellte Ausdruck liefert aber dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann. Von der gesuchten Graden kann nemlich jede der Gränzlinien nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, das in der ersten Gränzlinie anfängt und in der zweiten aufhört. Sowie nun von unserer Figur nur ein einziges Stück der gesuchten Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; ebensowenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

Zusatz 3. Wenn die beiden Gränzcurven einander nur berühren, aber sich niemals schneiden, so ist ihre absolut kürzeste Entfernung gleich Null. Dasselbe gilt, wenn beide Gränzcurven grade Linien sind, und ganz ineinander fallen. Wenn aber die beiden Gränzcurven einander schneiden, so kann von einer absolut kürzesten Entfernung keine Rede sein; dagegen eine relativ kürzeste Entfernung kann allerdings gefordert werden. Alles dieses ist bereits (Aufgabe 161, Zusatz 8) hinlänglich erläutert.

Es sollen nun einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.

Digitized by Google

Zweiter Fall.

Man sucht nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier räumlicher Curven, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Abscissendifferenz $\alpha - a$ den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 35) & y_a = b \\ 36) & z_a = c \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{ll} 37) & y_\alpha = \beta \\ 38) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\} \text{ und } 39)\quad \alpha - a = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Desshalb kann von den sechs Elementen a, α, b, β, c, γ nur eines dem Werthe nach willkürlich, und die fünf andern müssen dem Werthe nach abhängig sein.

Man nehme α als willkürlich, so folgt aus Gleichung 39, dass $\vartheta a = \vartheta\alpha$, $\vartheta^2 a = \vartheta^2\alpha$, etc. Eliminirt man jetzt δy_a, δz_a, δy_α, δz_α, ϑa aus VII; so bekommt man

$$\text{XVI)}\quad A \cdot \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{db}{da}\right) + E \cdot \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - \frac{dc}{da}\right) = 0$$

Auf dieselbe Weise geht Gleichung X über in

$$\text{XVII)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left[A \cdot \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \frac{d^2b}{da^2}\right) + E \cdot \left(\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} - \frac{d^2c}{da^2}\right)\right] \cdot \vartheta\alpha^2$$

Dritter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier räumlichen Curven, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Differenz der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 40) & y_a = b \\ 41) & z_a = c \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{ll} 42) & y_\alpha = \beta \\ 43) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\} \text{ und } 44)\quad y_\alpha - y_a = K$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Auch jetzt kann von den sechs Elementen a, b, c, α, β, γ nur eines dem Werthe nach willkürlich sein. Man nehme α als willkürlich. Unterwirft man Gleichung 44 einer gemischten Mutation, so bekommt man zunächst

$$45)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a - \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Wenn man δy_α und δy_a aus dieser Gleichung eliminirt, so gibt sich

$$46)\quad \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \frac{db}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Hierdurch ist die zwischen ϑa und $\vartheta\alpha$ stattfindende Abhängigkeit gegeben. Eliminirt man jetzt δy_a, δy_α, δz_a, δz_α, ϑa aus VII; so bekommt man

$$47)\quad \left(1 + A \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + E \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right) \cdot \frac{db}{da} - \left(1 + A \cdot \frac{db}{da} + E \cdot \frac{dc}{da}\right) \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Vierter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier räumlichen Curven, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Differenz der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und

2) die Differenz der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Digitized by Google

Dieser Fall verlangt, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$48)\ y_a = b,\quad 49)\ z_a = c,\quad 50)\ y_\alpha = \beta,\quad 51)\ z_\alpha = \gamma,\ \text{und}\ 52)\ y_\alpha - y_a = K,\quad 53)\ z_\alpha - z_a = \mathfrak{K}$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzcurven möglich ist.

Wegen dieser sechs Gleichungen ist von den sechs Elementen a, b, c, α, β, γ keines dem Werthe nach willkürlich. Unterwirft man die Gleichungen 52 und 53 einer gemischten Mutation, so bekommt man bezüglich

$$54)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \delta y_a - \frac{dy_a}{da}\cdot\vartheta a = 0$$

$$55)\quad \delta z_\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \delta z_a - \frac{dz_a}{da}\cdot\vartheta a = 0$$

Führt man in diese zwei Gleichungen für δy_a, δy_α, δz_a, δz_α die Ausdrücke ein, so bekommt man bezüglich

$$56)\quad \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \frac{db}{da}\cdot\vartheta a = 0,\ \text{und}\ 57)\quad \frac{d\gamma}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \frac{dc}{da}\cdot\vartheta a = 0$$

Weil aber diese zwei Gleichungen nebeneinander bestehen müssen, so muss $\vartheta a = 0$, $\vartheta\alpha = 0$ sein. Ebenso beweist man, dass auch $\vartheta^2 a = 0$, $\vartheta^2\alpha = 0$, etc. sein muss, desshalb ist auch $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc., d. h. die Mutationen der Gränzordinaten werden zu Null, während δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg; und Gleichung X reducirt sich auf

$$\text{XVIII)}\quad (\delta)^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Die zehn Stücke a, b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich jetzt durch die zehn Gleichungen $b = A\cdot a + B$, $c = E\cdot a + F$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $\gamma = E\cdot\alpha + F$, $A\cdot(\alpha - a) = K$, $E\cdot(\alpha - a) = \mathfrak{K}$, $f'(a, b, c) = 0$, $f'(a, b, c) = 0$, $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Zusatz 4. Auch hier hat der für $(\delta)^2 U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten. Der Grund davon ist aber der, dass wegen der Menge der Gränzbedingungen die Gränzordinaten gar keiner Mutation, weder einer reinen noch einer gemischten, unterworfen werden können. Die Menge der Gränzbedingungen ist also diesmal, dagegen früher waren die Eigenthümlichkeiten der Gränzcurven die Ursache, dass Verschiedenheiten in secundärer Beziehung nicht stattfinden. (Zusatz 2.)

Fünfter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier räumlichen Curven, sondern diejenige, die die kürzeste ist unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$,

2) die Summe der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und

3) die Summe aller vier Gränzordinaten nebst den zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{S}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzordinaten die Gleichungen

$$58)\ y_a = b,\quad 59)\ z_a = c,\quad 60)\ y_a + z_a = \mathfrak{K},\quad 61)\ y_\alpha = \beta,\quad 62)\ z_\alpha = \gamma,\quad 63)\ y_\alpha + z_\alpha = K$$

und

$$64)\quad a + \alpha + y_a + y_\alpha + z_a + z_\alpha = \mathfrak{S}$$

Digitized by Google

gelten, die kürzeste suche, die zwischen den zwei gegebenen räumlichen Curven möglich sind.

Man unterwerfe die Gleichungen 60, 63, 64 einer gemischten Mutation, und eliminire δy_a, δy_α, δz_a, δz_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_a$, $\delta^2 z_\alpha$, etc. Man wird dann erkennen, dass $\vartheta a = 0$, $\vartheta \alpha = 0$, $\vartheta^2 a = 0$, $\vartheta^2 \alpha = 0$, etc. ist, so dass abermals wie im vorigen Falle, die Mutationen der Gränzordinaten zu Null werden, während δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc., wo das x noch ganz allgemein ist, nicht zu Null zu werden brauchen. Die Gränzgleichung fällt also wieder von selbst hinweg, und für das Prüfungsmittel bekommt man wieder den Ausdruck XVIII.

Zur Bestimmung der zehn Stücke a, b, c, α, β, γ, A, B, E, F hat man jetzt elf Gleichungen, welche, weil eine zuviel ist, sich leicht wiedersprechen können; und so wird dieser fünfte Fall in der Regel überbestimmt, d. h. unmöglich sein (man vergleiche den siebenten Fall der 161ten Aufgabe).

Schaut man auf den achten Fall der 179ten Aufgabe, wo nicht zwei Gränzcurven, sondern zwei Gränzflächen gegeben sind; so erkennt man, dass bei ganz gleichen Gränzbedingungen die Aufgabe noch keine überbestimmte ist, sondern dass sogar durch die Gränzgleichung noch eine Gleichung geliefert wird, die zur Bestimmung der unbestimmten Stücke dient.

Schlussbemerkung. Ist ganz die nemliche, wie die der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 178.

Man sucht die kürzeste Entfernung von einer im Endpunkte der Abscisse $x = a$ auf der Abscissenaxe senkrechten Ebene bis zu der durch die Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen Fläche.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es kaum der Erinnerung, dass sowohl die zur Abscisse $x = a$ gehörige Ebene als auch die durch die Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebene Gränzfläche, sowie die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der Gränzfläche $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ sich endigende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (und entweder in dem noch zu ermittelnden Punkte oder in den ihm nächstgelegenen übrigens nur in der Gränzfläche befindlichen Nachbarpunkten sich endigenden) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt also für y und z solche Functionen von x, und für α einen solchen Werth, dass der Ausdruk

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimum-werth eines Minimum-standes wird.

Bei dem jetzt nöthigen gemischten Mutiren muss a constant bleiben, und nur α darf Werthänderungen erleiden. Bei der ersten Form des $(\delta)U$ werden die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinaten nicht vorkommen. Diese Mutationen müssen aber, wie schon (in der Einleitung zur 160ten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, der Untersuchung unterworfen werden. Man kann also die erste Form des $(\delta)U$ diesmal nicht beachten; und desshalb stelle man nur die zweite Form her, welche, wenn man noch zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$ und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt, folgende ist:

$$\text{II)}\quad (\delta)U = -\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$
$$+ \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a + \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

Digitized by Google

Daraus geben sich die beiden Hauptgleichungen

$$\text{III)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)=0,\ \text{und IV)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)=0$$

woraus folgt

$$\text{V)}\quad y = A\cdot x + B,\ \text{und VI)}\quad z = E\cdot x + F$$

welches die Gleichungen einer graden Linie im Raume sind, wie zu erwarten war. Als Gränzengleichung bekommt man jetzt

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}}\left[A.\delta y_\alpha + E.\delta z_\alpha - A\cdot\delta y_a - E\cdot\delta z_a + (1+A^2+E^2)\,\vartheta\alpha\right]=0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}}$ auch hätte weglassen können. Mutirt man noch einmal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \int_a^\alpha \delta^2 V\cdot dx + 2\cdot\delta V_\alpha\cdot\vartheta\alpha + V_\alpha\cdot\vartheta^2\alpha + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2$$

Nun ist $\frac{dV}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\cdot\left(p\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\mathfrak{p}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)$; und weil aus den Gleichungen V und VI folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ und $\frac{d^2z}{dx^2}=0$ ist, so ist auch

$$\text{IX)}\quad \frac{dV}{dx}=0$$

Nimmt man mit VIII die gehörige Umformung vor, und berücksichtigt man dann die Gleichungen III, IV und IX; so bleibt nur

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx}-A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}}\cdot\Big[A\cdot\delta^2 y_\alpha + E\cdot\delta^2 z_\alpha - A\cdot\delta^2 y_a - E\cdot\delta^2 z_a$$
$$+2A\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha + 2E\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha + (1+A^2+E^2)\cdot\vartheta^2\alpha\Big]$$

Jetzt ist man soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b, c) bis zu einer durch die Gleichung $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$ gegebenen Fläche; so ist $\delta y_a=0$, $\delta z_a=0$, $\delta^2 y_a=0$, $\delta^2 z_a=0$, etc. Die Gränzengleichung VII reducirt sich also auf

$$\text{XI)}\quad A\cdot\delta y_\alpha + E\cdot\delta z_\alpha + (1+A^2+E^2)\cdot\vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}}$ weggelassen hat.

Für die Punkte, wo die gesuchte Grade in der gegebenen Gränzfläche eintrifft, muss

$$1)\quad y_\alpha=\beta,\qquad\text{und}\qquad 2)\quad z_\alpha=\gamma$$

sein. In der Gränzfläche $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$ sind von den drei Coordinaten α, β, γ zwei dem Werthe nach willkürlich, und eine ist dem Werthe nach von den beiden andern abhängig. Man kann also diesen ersten Fall auf dreierlei Weise durchführen; denn man kann

1) β und γ als die dem Werthe nach willkürlichen, und α als das dem Werthe nach abhängige Element behandeln; man kann aber auch
2) β und α als die dem Werthe nach willkürlichen, und γ als das dem Werthe nach abhängige Element, oder man kann

Digitized by Google

3) γ und α als die dem Werthe nach willkürlichen, und β als das dem Werthe nach abhängige Element behandeln.

Die Durchführung dieses ersten Falles wird aber am einfachsten, und der Calcul selbst nimmt am meisten Symmetrie an, wenn man die beiden Coordinaten β und γ der Gränzfläche als die dem Werthe nach willkürlichen Elemente, dagegen α als das dem Werthe nach von β und γ abhängige behandelt. Man sondere also α aus der Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ab, so dass man

$$3)\quad \alpha = \chi(\beta, \gamma)$$

bekommt. Wenn man nun $A \cdot x + B$ und $E \cdot x + F$ bezüglich statt y und z in Gleichung 1 und 2 einsetzt, so bekommt man

$$4)\quad A \cdot \alpha + B = \beta, \qquad \text{und} \qquad 5)\quad E \cdot \alpha + F = \gamma$$

und wenn man hier $\chi(\beta, \gamma)$ statt α einsetzt, so bekommt man

$$6)\quad A \cdot \chi(\beta, \gamma) + B = \beta, \qquad \text{und} \qquad 7)\quad E \cdot \chi(\beta, \gamma) + F = \gamma$$

Man erkennt aber, dass sich aus den letzten zwei Gleichungen nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des β und des γ ergeben, dass sie sonach keine identischen Gleichungen sind.

Will man also den beiden Elementen β und γ bezüglich andere Werthe $(\beta + D\beta)$ und $(\gamma + D\gamma)$ beilegen, welche den beiden Gleichungen 6 und 7 nicht entsprechen; so muss man an die Stelle des y eine andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 1 einsetzen, und ebenso muss man an die Stelle des z eine andere Function $z + \Delta z = E \cdot x + F + \Delta z$ in Gleichung 2 einsetzen. Man muss also die Gleichungen 1 und 2 einer gemischten Mutation unterwerfen, wie bereits (z. B. in Aufgabe 160 und 161) hinlänglich auseinandergesetzt ist. Aus Gleichung 1 folgt

$$8)\quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\beta$$

$$9)\quad \delta^2 y_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 = \vartheta^2\beta$$

etc. etc.

Aus Gleichung 2 folgt

$$10)\quad \delta z_\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\gamma$$

$$11)\quad \delta^2 z_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d^2 z_\alpha}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 = \vartheta^2\gamma$$

etc. etc.

Aus der für die Gränzfläche gegebenen Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ folgt

$$12)\quad \vartheta\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma$$

$$13)\quad \vartheta^2\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta^2\gamma + \frac{d^2_\beta \alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + 2 \cdot \frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta \cdot d\gamma} \cdot \vartheta\beta \cdot \vartheta\gamma + \frac{d^2_\gamma \alpha}{d\gamma^2} \cdot \vartheta\gamma^2$$

etc. etc.

Weil $y = A \cdot x + B$ und $z = E \cdot x + F$, so ist schon im Allgemeinen $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{dz}{dx} = E$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, etc. Es ist also auch im Besondern $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{dz_\alpha}{d\alpha} = E$, $\frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2z_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, etc. Somit bekommt man

$$14)\quad \delta y_\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \left(\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma\right)$$

$$15)\quad \delta z_\alpha = \vartheta\gamma - E \cdot \vartheta\alpha = \vartheta\gamma - E \cdot \left(\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma\right)$$

etc. etc.

Digitized by Google

Die Gränzengleichung XI geht also über in

$$\text{XII)}\quad \left(A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta}\right) \cdot \vartheta\beta + \left(E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\right) \cdot \vartheta\gamma = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ zerlegt sich diese Gleichung in folgende zwei

$$\text{XIII)}\quad A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \text{ und XIV)}\quad E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Eliminirt man aus dem Ausdrucke X die Elemente $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\alpha$, was mittelst der Gleichungen 9, 11, 12 und 13 geschieht; und beachtet man dann die beiden Gleichungen XIII und XIV, so wie, dass $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, etc. ist; so bekommt man

$$\text{XV)}\quad \delta_i^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left(\frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + 2 \cdot \frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta . d\gamma} \cdot \vartheta\beta \cdot \vartheta\gamma + \frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2} \cdot \vartheta\gamma^2\right)$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; das mit den Differenzcoefficienten versehene Aggregat wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Nun sind a, b, c gegeben. Die sieben Stücke α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich also durch die Gleichungen $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0$, $E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$, $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$.

Was die Gleichungen XIII und XIV anbelangt, so beachte man Folgendes: Die Gleichungen der zur Gränzfläche gehörigen Normallinie sind bekanntlich

$$16)\quad \beta'' - \beta + (\alpha'' - \alpha) \cdot \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \text{ und } 17)\quad \gamma'' - \gamma + (\alpha'' - \alpha) \cdot \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

wo α'', β'', γ'' die veränderlichen Coordinaten der zum gesuchten Punkte (α, β, γ) gehörigen Normallinie sind. Wenn man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} y = A \cdot x + B \\ \beta = A \cdot \alpha + B \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} z = E \cdot x + F \\ \gamma = E \cdot \alpha + F \end{array}\right.$$

voneinander subtrahirt, so bekommt man

$$18)\quad y - \beta = A \cdot (x - \alpha), \text{ und } 19)\quad z - \gamma = E \cdot (x - \alpha)$$

Da aus den Gleichungen XIII und XIV folgt, dass $A = -\frac{d_\beta \alpha}{d\beta}$ und $E = -\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}$ ist; so gehen die beiden letzten Gleichungen über in

$$20)\quad y - \beta + (x - \alpha) \cdot \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \text{ und } 21)\quad z - \gamma + (x - \alpha) \cdot \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Man sieht also, dass die Normale der gegebenen Gränzfläche dieselbe Gleichung hat, wie die gesuchte Grade, d. h. die absolut kürzeste Entfernung und die betreffende Normale der Gränzfläche liegen in einer und derselben graden Linie, oder, was dasselbe ist, die absolut kürzeste Entfernung steht auf der gegebenen Gränzfläche senkrecht. Man hat somit ein bequemes Mittel, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren.

Zusatz 1. Die theoretische Durchführung dieses ersten Falles hat nur Gebrauch gemacht von den partiellen Differentialquotienten $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta}$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}$, $\frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2}$, $\frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta \cdot d\gamma}$, $\frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2}$. Es ist also hier ganz einerlei, ob die Gränzfläche durch die Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ oder durch $\alpha = \chi(\beta, \gamma)$ gegeben ist; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor das α absondert.

1) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b, c) bis zu der durch die Gleichung

Digitized by Google

$$22)\quad \alpha + G\cdot\beta + H\cdot\gamma + K = 0$$

gegebenen Ebene; so bekommt man jetzt

$$23)\quad d\alpha + G\cdot d\beta + H\cdot d\gamma = 0$$
$$24)\quad d^2\alpha = 0$$
etc. etc.

Daraus folgt $\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = -G$, $\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = -H$, $\frac{d^2_\beta\alpha}{d\beta^2} = 0$, $\frac{d_\beta d_\gamma\alpha}{d\beta\cdot d\gamma} = 0$, $\frac{d^2_\gamma\alpha}{d\gamma^2} = 0$, etc.
Gleichung XV reducirt sich also auf

$$\text{XVI)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Zusatz 2. Dass dieser für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die Gränzfläche diesmal eine Ebene ist, zusammenhangt. Aus Gleichung 22 folgt nemlich $\frac{d^2_\beta\alpha}{d\beta^2} = 0$, $\frac{d_\beta d_\gamma\alpha}{d\beta\cdot d\gamma} = 0$, $\frac{d^2_\gamma\alpha}{d\gamma^2} = 0$; und so fallen die mit $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ versehenen Theilsätze aus XV hinweg. Der in XVI für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ hergestellte Ausdruck liefert aber dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch folgende geometrische Betrachtung noch näher überzeugen kann. Von der gesuchten Graden kann nemlich die gegebene Gränzebene nur in einem einzigen Punkte getroffen werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, welches im festen Punkte (a, b, c) anfängt, und in der gegebenen Gränzebene aufhört. Sowie nun von unserer Figur nur ein einziges Stück der gesuchten Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; eben so wenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

2) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung von einem festen Punkte (a, b, c) bis zu der durch die Gleichung

$$25)\quad (G-\alpha)^2 + (H-\beta)^2 + (K-\gamma)^2 = R^2$$

gegebenen Kugelfläche; so bekommt man jetzt

$$26)\quad (G-\alpha)\cdot d\alpha + (H-\beta)\cdot d\beta + (K-\gamma)\cdot d\gamma = 0$$
$$27)\quad (G-\alpha)\cdot d^2\alpha - d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2 = 0$$

Es ist also $\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = -\frac{H-\beta}{G-\alpha}$ und $\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = -\frac{K-\gamma}{G-\alpha}$. Die Gleichungen XIII und XIV gehen daher über in

$$28)\quad H-\beta = A\cdot(G-\alpha),\ \text{und}\ 29)\quad K-\gamma = E\cdot(G-\alpha)$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung der gegebenen Kugelfläche ein, so gibt sich

$$30)\quad \alpha = G \mp \frac{R}{\sqrt{1+A^2+E^2}}$$

Es gibt sonach in der Kugelfläche zwei Punkte, welche zugleich der gesuchten Graden angehören, so dass es zwei verschiedene Stücke der gesuchten Graden gibt, welche noch einer nähern Betrachtung unterworfen werden müssen.

Zieht man nun vom festen Punkte (a, b, c) eine Grade durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist diese die gesuchte Linie, und sie steht in ihren beiden Durchgangspunkten senkrecht auf der Kugelfläche.

Gleichung XV geht jetzt über in

$$\text{XVII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$
$$+ \frac{1}{(G-\alpha)^3\cdot\sqrt{1+A^2+E^2}}\cdot\left[\left((H-\beta)\,\vartheta\beta + (K-\gamma)\,\vartheta\gamma\right)^2 + (G-\alpha)^2\cdot(\vartheta\beta^2 + \vartheta\gamma^2)\right]$$

Digitized by Google

Das mit den Differenzcoefficienten versehene Aggregat besteht, wie man sieht, aus zwei Factoren, von welchen derjenige, der sich innerhalb der eckigen Klammern befindet, beständig positiv bleibt. Dieses Aggregat hat also mit $(G - \alpha)$ einerlei Zeichen, ist positiv, wenn $\alpha < G$, und ist negativ, wenn $\alpha > G$.

𝔄) Ist $\alpha < G$, d. h. nimmt man das Stück der gesuchten Graden, welches vom festen Punkte (a, b, c) bis zum ersten in der Kugelfläche gelegenen Durchgangspunkte erstreckt ist; so ist sowohl der mit Mutationscoefficienten als auch der mit Differenzcoefficienten versehene Theilsatz positiv, und es findet ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

𝔅) Ist $\alpha > G$, d. h. nimmt man das Stück der gesuchten Graden, welches vom festen Punkte (a, b, c) bis zum zweiten in der Kugelfläche gelegenen Durchgangspunkte erstreckt ist; so ist der mit den Mutationscoefficienten versehene Theilsatz noch immer positiv, dagegen der mit den Differenzcoefficienten versehene ist negativ. Es existirt also wohl ein Minimum-stand, dagegen in secundärer Beziehung findet ein Grösstes statt, d. h. man hat jetzt den Maximum-werth eines Minimum-standes, welcher Zustand jedoch in der Aufgabe nicht verlangt wird, also auch nicht beachtet zu werden braucht.

Zweiter Fall.

Der Punkt (a, b, c) sei nicht fest, sondern es sei nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse $x = a$ auf der Abscissenaxe senkrecht steht; und man sucht die absolut kürzeste Entfernung von dieser Ebene bis zu der gegebenen Gränzfläche.

Jetzt sind die Elemente δy_a, δz_a, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, etc. dem Werthe nach willkürlich, und durchaus von nichts abhängig. Es können also δy_a und δz_a nur dadurch aus Gleichung VII wegfallen, dass ihre Coefficienten zu Null werden, d. h. dass man

$$31)\ A = 0, \quad \text{und} \quad 32)\ E = 0$$

setzt. Dabei reducirt sich Gleichung VII auf

$$33)\ \vartheta\alpha = 0$$

woran man erkennt, dass in diesem zweiten Falle der Differenzcoefficient $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf. Aus der für die Gränzfläche gegebenen Gleichung $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ folgt aber $\vartheta\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma$, so dass Gleichung 33 übergeht in

$$34)\ \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma = 0$$

welche Gleichung aber, wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\gamma$ und $\vartheta\beta$, sich ohneweiters zerlegt in

$$35)\ \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \quad \text{und} \quad 36)\ \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Weil aber $A = 0$ und $E = 0$, so reduciren sich die Gleichungen der gesuchten Linie auf

$$37)\ y = B, \quad \text{und} \quad 38)\ z = F$$

d. h. die gesuchte Grade läuft mit der Abscissenaxe parallel und steht auf der Coordinatenebene YZ senkrecht. Die Gleichungen 35 und 36 zeigen an, dass die den gesuchten Punkt (α, β, γ) der gegebenen Gränzfläche berührende Ebene auf der Axe X senkrecht steht, oder, was dasselbe ist, mit der Coordinatenebene YZ parallel läuft. Somit steht auch diesmal unsere absolut kürzeste Entfernung auf der Gränzfläche senkrecht.

Weil $y = B$ und $z = F$; so ist $B = b = \beta$, und $F = c = \gamma$. Nun ist a schon von Anfange her gegeben. Die sieben Stücke $b, c, \alpha, \beta, \gamma, B, F$ bestimmen sich also aus den sieben Gleichungen $B = b$, $B = \beta$, $F = c$, $F = \gamma$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$.


Digitized by Google

Da A = 0 und E = 0, so reducirt sich Gleichung X zunächst auf

$$\text{XVIII)}\quad \delta_{\prime}^{2}U = \vartheta^{2}\alpha + \int_{a}^{\alpha}\left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2} + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^{2}\right]\cdot dx$$

Wegen der Gleichungen 35 und 36 reducirt sich der in Gleichung 13 für $\vartheta^2\alpha$ aufgestellte Ausdruck auf

$$\vartheta^{2}\alpha = \frac{d_{\beta}^{2}\alpha}{d\beta^{2}}\cdot\vartheta\beta^{2} + 2\cdot\frac{d_{\beta}d_{\gamma}\alpha}{d\beta\cdot d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_{\gamma}^{2}\alpha}{d\gamma^{2}}\cdot\vartheta\gamma^{2}$$

und somit geht XVIII über in

$$\text{XIX)}\quad \delta_{\prime}^{2}U = \frac{d_{\beta}^{2}\alpha}{d\beta^{2}}\cdot\vartheta\beta^{2} + 2\cdot\frac{d_{\beta}d_{\gamma}\alpha}{d\beta\cdot d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_{\gamma}^{2}\alpha}{d\gamma^{2}}\cdot\vartheta\gamma^{2}$$
$$+ \int_{a}^{\alpha}\left[\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2} + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^{2}\right]\cdot dx$$

Zusatz 4. Wenn die zur Abscisse a gehörige senkrechte Ebene von der Gränzfläche nur berührt, aber niemals geschnitten wird; so ist die absolut kürzeste Entfernung gleich Null. Dasselbe gilt, wenn die Gränzfläche eine Ebene ist, und in die zur Abscisse a gehörige senkrechte Ebene hineinfällt. Wenn aber diese Ebene von der Gränzfläche geschnitten wird, so kann von einer absolut kürzesten Entfernung keine Rede sein; dagegen eine relativ kürzeste Entfernung kann allerdings gefordert werden. Alles dieses ist bereits (Aufgabe 160, Zusatz 6) hinlänglich erläutert.

Es sollen nun einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.

Dritter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zu der gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Differenz der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) die Differenz der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}38) & y_{\alpha} = \beta \\ 39) & z_{\alpha} = \gamma\end{array}\right\}, \text{ und } \left\{\begin{array}{ll}40) & y_{\alpha} - y_{a} = K \\ 41) & z_{\alpha} - z_{a} = \mathfrak{K}\end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Unterwirft man die beiden letzten Gleichungen einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man bekommt also

$$42)\quad \delta y_{\alpha} + \frac{dy_{\alpha}}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \delta y_{a} = 0$$

$$43)\quad \delta z_{\alpha} + \frac{dz_{\alpha}}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha - \delta z_{a} = 0$$

etc. etc.

Nun weiss man (aus Gleichung 14 und 15), dass $\delta y_{\alpha} = \vartheta\beta - A\cdot\vartheta\alpha$, und $\delta z_{\alpha} = \vartheta\gamma - E\cdot\vartheta\alpha$; es folgt also aus 42 und 43, dass $\delta y_{a} = \vartheta\beta$ und $\delta z_{a} = \vartheta\gamma$. Eliminirt man jetzt δy_{α}, δz_{α}, δy_{a}, δz_{a} aus V; so bleibt nur zurück

$$44)\quad \vartheta\alpha = 0$$

Man sieht daher, dass $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf, sondern von den Werthänderungen der Coordinaten β und γ der Gränzfläche abhängig sein muss. Gleichung 44 ist aber (wie aus vorigem Falle erhellet) gleichbedeutend mit

$$45)\quad \frac{d_{\beta}\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta + \frac{d_{\gamma}\alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma = 0$$

Digitized by Google

so dass, wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ und des $\vartheta\gamma$, man wieder bekommt

$$46)\ \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \quad \text{und} \quad 47)\ \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Setzt man $Ax + B$ und $Ex + F$ an die Stelle des y und z in 40 und 41 ein, so gibt sich $A \cdot (\alpha - a) = K$, und $E \cdot (\alpha - a) = \mathfrak{K}$. Es ist also $A = \frac{K}{\alpha - a}$ und $E = \frac{\mathfrak{K}}{\alpha - a}$; und für die gesuchte Linie hat man folgende Gleichungen

$$48)\ y = \frac{K}{\alpha - a} \cdot x + B, \quad \text{und} \quad 49)\ z = \frac{\mathfrak{K}}{\alpha - a} \cdot x + F$$

wo nur noch B und F zwei unbestimmte Constanten sind.

Nun ist a gegeben. Die neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich also aus den neun Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $A \cdot (\alpha - a) = K$, $E \cdot (\alpha - a) = \mathfrak{K}$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$; und wenn diese Gleichungen einander widersprechen, so ist dieser dritte Fall unmöglich.

Eliminirt man $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, $\vartheta^2 \alpha$ aus X; so bleibt nur

$$\text{XX)}\ \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left(\frac{d^2_\beta \alpha}{d\beta^2} \cdot \vartheta\beta^2 + 2 \cdot \frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta \cdot d\gamma} \cdot \vartheta\beta \cdot \vartheta\gamma + \frac{d^2_\gamma \alpha}{d\gamma^2} \cdot \vartheta\gamma^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx$$

Vierter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zu der gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) der Unterschied der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) der Unterschied der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 50)\ y_\alpha = \beta \\ 51)\ z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \text{ und } \left\{\begin{array}{l} 52)\ z_\alpha - y_\alpha = K \\ 53)\ z_a - y_a = \mathfrak{K} \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Weil a constant ist, so kann man Gleichung 53 nur einer reinen Mutation unterwerfen. Man bekommt also

$$54)\ \delta z_\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_\alpha - \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = 0, \quad \text{und } 55)\ \delta z_a - \delta y_a = 0$$

Nun ist (man sehe Gleichung 14 und 15) $\delta y_\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \vartheta\alpha$ und $\delta z_\alpha = \vartheta\gamma - E \cdot \vartheta\alpha$. Gleichung 54 geht also über in

$$56)\ \vartheta\gamma - \vartheta\beta = 0$$

durch welche Gleichung angezeigt wird, dass zwischen $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ eine Abhängigkeit stattfinde, das $\vartheta\alpha$ mag willkürlich oder selbst wieder abhängig sein. Man nehme $\vartheta\gamma$ als abhängig, so bekommt man $\vartheta\gamma = \vartheta\beta$; und man hat

$$57)\ \delta y_\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \vartheta\alpha, \quad \text{und} \quad 58)\ \delta z_\alpha = \vartheta\beta - E \cdot \vartheta\alpha$$

Digitized by Google

Aus 55 folgt ferner, dass entweder δz_a oder δy_a als abhängig genommen werden muss. Man nehme δy_a als willkürlich, so ist

$$59)\quad \delta z_a = \delta y_a$$

Eliminirt man δz_a, δy_α, δz_α aus VII, so gibt sich zunächst

$$60)\quad (A + E)\cdot \vartheta\beta - (A + E)\cdot \delta y_a + \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Aus dieser Gleichung kann aber das willkürliche Element δy_a nur dadurch wegfallen, dass sein Coefficient zu Null wird, d. h. dass man

$$61)\quad A + E = 0$$

setzt. Es bleibt daher von Gleichung 60 nur zurück

$$62)\quad \vartheta\alpha = 0$$

Man sieht also abermals, dass $\vartheta\alpha$ nicht willkürlich genommen werden darf. Nun ist im Allgemeinen $\vartheta\alpha = \frac{d_\beta\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma$; und weil hier (eben wegen Gleichung 56) zwischen $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ eine solche Abhängigkeit stattfindet, dass $\vartheta\gamma = \vartheta\beta$, so gibt sich $\vartheta\alpha = \left(\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\right)\cdot\vartheta\beta$. Gleichung 62 geht also über in

$$63)\quad \left(\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\right)\cdot\vartheta\beta = 0$$

woraus wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ folgt

$$64)\quad \frac{d_\beta\alpha}{d\beta} + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = 0$$

Gleichung 52 und 53 gehen nun über in

$$65)\quad (E - A)\cdot\alpha + F - B = K,\ \text{und}\ 66)\quad (E - A)\cdot a + F - B = \mathfrak{K}$$

Aus den drei Gleichungen 61, 65 und 66 folgt

$$67)\quad A = -\frac{K - \mathfrak{K}}{2\cdot(\alpha - a)},\ \text{und}\ 68)\quad E = +\frac{K - \mathfrak{K}}{2\cdot(\alpha - a)}$$

Nun ist a gegeben. Die neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich also aus den neun Gleichungen $b = A\cdot a + B$, $c = E\cdot a + F$, $\beta = A\cdot\alpha + B$, $\gamma = E\cdot\alpha + F$, $(E - A)\cdot\alpha + F - B = K$, $(E - A)\cdot a + F - B = \mathfrak{K}$, $A + E = 0$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = 0$.

Jetzt ist das Prüfungsmittel noch herzustellen. Zu diesem Ende unterwerfe man die Gleichung 54 vorerst einer zweiten gemischten Mutation, und führe sodann für $\delta^2 y_\alpha$, $d^2 z_\alpha$, etc. die Ausdrücke ein; so gibt sich

$$69)\quad \vartheta^2\gamma - \vartheta^2\beta = 0$$

Durch diese Gleichung ist die Abhängigkeit zwischen $\vartheta^2\gamma$ und $\vartheta^2\beta$ gegeben. Stellt man nun die allgemeine Form des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes her, eliminirt man dann $\vartheta\gamma$ und $\vartheta^2\gamma$, und beachtet man noch Gleichung 64; so bleibt nur

$$\text{XXI)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}\cdot\left(\frac{d_\beta^2\alpha}{d\beta^2} + 2\cdot\frac{d_\beta d_\gamma\alpha}{d\beta . d\gamma} + \frac{d_\gamma^2\alpha}{d\gamma^2}\right)\cdot\vartheta\beta^2$$

$$+ \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Zusatz 4. Die Gleichungen 33, 44 und 62 des zweiten, dritten und vierten Falles sind sehr merkwürdig; denn durch sie sind Beispiele geliefert, dass es oft erst im Verlaufe der Untersuchung sich zeigen kann, welche Elemente man als abhängig nehmen muss, d. h.

Digitized by Google

dass es Fälle geben kann, wo wir nicht schon im Voraus sagen dürfen, dieses Element wollen wir als abhängig, und jenes wollen wir als unabhängig behandeln. Man hat also hiermit eine thatsächliche Rechtfertigung für mein Verfahren, nach welchem ich für die Werthänderungen aller nichtmutablen Veränderlichen, sie mögen abhängig oder unabhängig sein, unaufhörliche Reihen setze. Ist die Untersuchung bis auf einen gewissen Punkt gediehen, dann kann man noch immer entscheiden, bei welcher Werthänderung das erste Glied der Reihe genügt, und bei welcher Werthänderung auch noch höhere Glieder der Reihe nöthig sind. (Man sehe Bd. I. S. 117; besonders Zusatz 7 in Aufgabe 160, und Zusatz 3 in Aufgabe 176.)

Fünfter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) die Summe der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 70) & y_\alpha = \beta \\ 71) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 72) & y_\alpha + y_a = K \\ 73) & z_\alpha + z_a = \mathfrak{K} \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 72 und 73 einer gemischten Mutation, und verfahrt man, wie bisher; so folgt aus der Gränzengleichung

$$74) \quad 2A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0, \quad \text{und} \quad 75) \quad 2E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Und so fort.

Sechster Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) die Summe der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 76) & y_\alpha = \beta \\ 77) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 78) & y_\alpha - z_\alpha = K \\ 79) & y_a - z_a = \mathfrak{K} \end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, die von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Wenn man verfährt, wie bisher, so bekommt man

$$80) \quad \vartheta\beta + \vartheta\gamma = 0, \qquad \text{und} \qquad 81) \quad \delta y_a + \delta z_a = 0$$

Man betrachte $\vartheta\gamma$ und δz_a als abhängig, und eliminire $\vartheta\gamma$, δz_a, δy_α, δz_α, $\vartheta\alpha$ aus VII; so bekommt man

$$82) \quad \left(A - E + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} - \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\right) \cdot \vartheta\beta - (A - E) \cdot \delta y_a = 0$$

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung kann aber das willkürliche Element δy_a nur dadurch wegfallen, dass sein Coefficient zu Null wird, d. h. dass man

$$83)\quad A - E = 0$$

setzt. Sonach hat man auch

$$84)\quad \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} - \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

Nun ist a gegeben. Man hat also Gleichungen genug, um die neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F zu bestimmen.

Siebenter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen die Summe der vier Gränzordinaten nebst den zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 85)\quad & y_\alpha = \beta \\ 86)\quad & z_\alpha = \gamma \end{aligned}\right\}, \quad \text{und } 87)\quad a + \alpha + y_a + y_\alpha + z_a + z_\alpha = \mathfrak{K}$$

gelten, die kürzeste suche, welche von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 87 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$88)\quad \delta y_a + \delta z_a + \delta y_\alpha + \delta z_\alpha + \left(1 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{dz_\alpha}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

$$89)\quad \delta^2 y_a + \delta^2 z_a + \delta^2 y_\alpha + \delta^2 z_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$
$$+ \left(\frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} + \frac{d^2 z_\alpha}{d\alpha^2}\right) \cdot \vartheta\alpha^2 + \left(1 + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{dz_\alpha}{d\alpha}\right) \cdot \vartheta^2\alpha = 0$$

Nun ist bekanntlich $\frac{dy_\alpha}{d\alpha} = A$, $\frac{dz_\alpha}{d\alpha} = E$, $\frac{d^2 y_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, $\frac{d^2 z_\alpha}{d\alpha^2} = 0$, und so gehen letztere zwei Gleichungen über in

$$90)\quad \delta y_a + \delta z_a + \delta y_\alpha + \delta z_\alpha + (1 + A + E) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

$$91)\quad \delta^2 y_a + \delta^2 z_a + \delta^2 y_\alpha + \delta^2 z_\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + 2 \cdot \frac{d\delta z_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$
$$+ (1 + A + E) \cdot \vartheta^2\alpha = 0$$

Wenn man aus Gleichung 90 die Elemente δy_α, δz_α und $\vartheta\alpha$ eliminirt, so bekommt man eine Gleichung, welche nur noch mit δy_a, δz_a, $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ versehen ist. Von diesen vier Elementen können nur drei willkürlich, und eines muss abhängig sein. Man behandle δy_a als abhängig. Man nehme nun einen (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) constanten Ausdruck M, und multiplicire Gleichung 90 mit $\frac{M}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$; so ist das sich ergebende Product auch noch Null. Und wenn man dieses Product zu Gleichung VII addirt, so ergibt sich eine Summe, welche ebenfalls Null ist, d. h. man bekommt

$$92)\quad (M - A) \cdot \delta y_a + (M - E) \cdot \delta z_a + (M + A) \cdot \delta y_\alpha + (M + E) \cdot \delta z_\alpha$$
$$+ (M + MA + ME + 1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Wenn man jetzt δy_α, δz_α, $\vartheta\alpha$ durch $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ ausdrückt; so geht letztere Gleichung über in

Digitized by Google

$$93)\quad (M - A)\cdot\delta y_a + (M - E)\cdot\delta z_a + \left(M + A + (1 + M)\cdot\frac{d_\beta\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta + \left(M + E + (1 + M)\cdot\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\right)\cdot\vartheta\gamma = 0$$

Damit das abhängige δy_a aus dieser Gleichung wegfalle, muss dessen Coefficient Null sein, d. h. man muss

$$94)\quad M - A = 0$$

setzen. In Folge dieser Gleichung zerlegt sich Gleichung 93 noch weiter in

$$95)\quad M - E = 0$$

$$96)\quad M + A + (1 + M)\cdot\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = 0$$

$$97)\quad M + E + (1 + M)\cdot\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = 0$$

Aus den Gleichungen 94 und 95 folgt, dass

$$98)\quad M = A, \qquad \text{und} \qquad 99)\quad E = A$$

so dass die Gleichungen 96 und 97 übergehen in

$$100)\quad 2A + (1 + A)\cdot\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = 0$$

$$101)\quad 2A + (1 + A)\cdot\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$102)\quad \frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}$$

d. h. die zu dem Punkte, wo die gesuchte kürzeste Entfernung in der Gränzfläche eintrifft, gehörige Berührungsebene ist so gelegen, dass ihre in den Coordinatenebenen XY und XZ befindlichen Spuren mit den Axen Y und Z gleiche Winkel einschliessen. Weil ferner $A = E$, so schliessen die in den Coordinatenebenen XY und XZ befindlichen Projectionen der gesuchten kürzesten Entfernung mit der Axe X gleiche Winkel ein.

Man multiplicire Gleichung 91 mit dem bereits angewendeten Ausdrucke $\frac{M}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$, so ist das sich ergebende Product auch noch Null. Man addire es zu Gleichung X, eliminire $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, $\vartheta^2\alpha$, und beachte die Gleichungen 94, 95, 96, 97; so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{1 + A}{\sqrt{1 + 2\cdot A^2}}\cdot\left(\frac{d_\beta^2\alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 + 2\cdot\frac{d_\beta d_\gamma\alpha}{d\beta . d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_\gamma^2\alpha}{d\gamma^2}\cdot\vartheta\gamma^2\right) + \frac{1}{(1 + 2\cdot A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[A^2\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Nun ist a gegeben. Ferner ist $E = A$. Es sind also Gleichungen genug vorhanden, um die noch übrigen acht Stücke b, c, α, β, γ, A, B, F zu bestimmen.

Achter Fall.

Der Anfangspunkt (a, b, c) der gesuchten kürzesten Entfernung sei wieder nicht fest, sondern es sei wieder nur gesagt, dass er in der Ebene liege, welche im Endpunkte der Abscisse a auf der Abscissenaxe senkrecht steht. Man sucht auch wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche, sondern nur die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) der Unterschied der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K,
2) der Unterschied der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$,

Digitized by Google

3) das Product der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten nebst dem Producte der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt gegebenen Werth H, und
4) das Product der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten nebst dem Producte der zwei zugehörigen Abscissen den bestimmt gegebenen Werth $\mathfrak{H}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\begin{cases} 103) & y_\alpha = \beta \\ 104) & z_\alpha = \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} 105) & z_a - y_a = K \\ 106) & z_\alpha - y_\alpha = \mathfrak{K} \end{cases} \quad \begin{cases} 107) & y_a \cdot y_\alpha + a \cdot \alpha = H \\ 108) & z_a \cdot z_\alpha + a \cdot \alpha = \mathfrak{H} \end{cases}$$

gelten, die kürzeste suche, welche von besagter Ebene bis zur gegebenen Gränzfläche möglich ist.

Unterwirft man diese Gleichungen einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass a constant ist. Man wird aber ohneweiters erkennen, dass wegen der Menge der Gränzbedingungen keine Mutation der Gränzordinaten, weder eine reine noch gemischte, stattfinden kann, während δy, δz, etc., wo das x noch allgemein ist, nicht zu Null werden.

Nun ist a gegeben. Zur Bestimmung der neun Stücke b, c, α, β, γ, A, B, E, F hat man die neun Gleichungen $b = A \cdot a + B$, $c = E \cdot a + F$, $\beta = A \cdot \alpha + B$, $\gamma = E \cdot \alpha + F$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $(E - A) \cdot a + F - B = K$, $(E - A) \cdot \alpha + F - B = \mathfrak{K}$, $(A \cdot a + B) \cdot (A \cdot \alpha + B) + a \cdot \alpha = H$, $(E \cdot a + F) \cdot (E \cdot \alpha + F) + a \cdot \alpha = \mathfrak{H}$.

Wenn man den Ausdruck für $(\delta)^2 U$ herstellt, so wird derselbe keinen Differenzcoefficienten enthalten. Der Grund davon ist bereits auseinandergesetzt. (Man sehe Zusatz 8 in Aufgabe 160.)

Wäre eine einzige Gränzbedingung mehr gewesen, so hätte dieser achte Fall zu den sogenannten überbestimmten Ausgaben gehört. (Man sehe den siebenten Fall der 160sten und der 161sten Aufgabe.)

Schaut man auf den achten Fall der 176sten Aufgabe zurück, wo nicht eine Gränzfläche sondern eine Gränzcurve gegeben ist; so erkennt man, dass bei ganz gleichen Gränzbedingungen die Aufgabe bereits eine überbestimmte ist, d. h. dass man zur Bestimmung der neun Stücke zehn Gleichungen hat, welche, weil eine zuviel ist, sich leicht widersprechen können.

Schlussbemerkung. Aufgaben dieser Art konnten erst gelöst werden, nachdem Lagrange seinen Variationscalcul erfunden hatte. In der zweiundzwanzigsten Vorlesung seines Werkes „Leçons sur le Calcul des fonctions“ theilt er Beispiele mit; und in dem zweiten derselben wird die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen verlangt. (Die nemliche Forderung wird im ersten Falle der nächsten Aufgabe gestellt werden.)

Was die Methode, womit ich dergleichen Aufgaben auflöse, und was die andern Beiträge, die ich zu diesen Aufgaben selbst hinzugefügt habe, betrifft; darüber vergleiche man die Schlussbemerkung zu Aufgabe 160.

Aufgabe 179.

Man sucht die kürzeste Entfernung zwischen den zwei durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen Flächen.

Allgemeine Einleitung.

Zur Bequemlichkeit nehme man überall das rechtwinkelige Coordinatensystem. Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass sowohl die beiden Gränzflächen als auch die noch zu suchende Linie selbst auf ein und dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden müssen.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einem noch zu ermittelnden Punkte der ersten Gränzfläche anfangende und in einem noch zu ermittelnden Punkte der zweiten Gränzfläche aufhörende Linie, deren Länge kleiner ist, als bei jeder andern, der gesuchten Linie stetsfort nächstanliegenden (und entweder durch die noch zu ermittelnden oder durch die ihnen nächstgelegenen übrigens nur in den Gränzflächen befindlichen Nachbarpunkte begränzten) Nachbarlinie der Fall sein kann. Man verlangt

Digitized by Google

also für y und z solche Functionen von x, und für a und α solche Werthe, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Bei dem jetzt nöthigen gemischten Mutiren müssen sowohl a als auch α Werthänderungen erleiden. Bei der ersten Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ werden die Mutationen der zur gesuchten Linie gehörigen Gränzordinaten nicht vorkommen. Diese Mutationen müssen aber, wie schon (in der Einleitung zur 160sten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, der Untersuchung unterworfen werden. Man kann also die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ diesmal nicht beachten; und desshalb stelle man nur die zweite Form her, welche, wenn man noch zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$ und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzt, folgende ist:

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U =$$

$$-\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

$$+ \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha - \left(\frac{p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z}{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_a + \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)_a \cdot \vartheta a$$

Daraus geben sich die beiden Hauptgleichungen

$$\text{III)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0, \text{ und IV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

woraus folgt

$$\text{V)}\quad y = A \cdot x + B, \qquad \text{VI)}\quad z = E \cdot x + F$$

welches die Gleichungen einer graden Linie im Raume sind, wie zu erwarten war. Als Gränzengleichung bekommt man jetzt

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - E \cdot \delta z_a$$
$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta a] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ auch hätte weglassen können. Mutirt man noch einmal, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \int_a^\alpha \delta^2V \cdot dx + 2 \cdot \delta V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \delta V_a \cdot \vartheta a$$
$$+ V_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - V_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$

Nun ist $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{p} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right)$; und weil aus den Gleichungen V und VI folgt, dass $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, so ist auch

$$\text{IX)}\quad \frac{dV}{dx} = 0$$

Nimmt man jetzt mit VIII die gehörige Umformung vor, und berücksichtigt man die Gleichungen III, IV und IX; so bleibt nur

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot \left[A \cdot \delta^2 y_\alpha + E \cdot \delta^2 z_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a - E \cdot \delta^2 z_a + \right.$$

Digitized by Google

$$+ 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2 a \Big]$$

Man ist nun soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Man sucht die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen Flächen. Für die Punkte, wo die gesuchte Grade durch die Gränzflächen durchgeht, muss

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y_a = b \\ 2) & z_a = c \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 3) & y_\alpha = \beta \\ 4) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right.$$

sein. In der Gränzfläche $f'(a, b, c) = 0$ sind von den drei Coordinaten a, b, c zwei dem Werthe nach willkürlich, und eine ist dem Werthe nach von den beiden andern abhängig. Ebenso sind in der Gränzfläche $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ von den drei Coordinaten α, β, γ zwei dem Werthe nach willkürlich, und eine ist dem Werthe nach von den beiden andern abhängig. Dieser erste Fall kann also von hier an auf verschiedene Weise durchgeführt werden, je nachdem man von den drei Coordinaten a, b, c entweder a oder b oder c als das dem Werthe nach abhängige Element, und je nachdem man von den drei Coordinaten α, β, γ entweder α oder β oder γ als das dem Werthe nach abhängige Element behandelt. Die Durchführung wird aber am einfachsten, und der Calcul selbst nimmt die meiste Symmetrie an, wenn man a und α als die dem Werthe nach abhängigen, dagegen b, c, β, γ als die dem Werthe nach willkürlichen Elemente behandelt. Man sondere also a und α aus den Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ ab, so dass man

$$5)\quad a = \chi'(b, c), \qquad \text{und} \qquad 6)\quad \alpha = \chi''(\beta, \gamma)$$

bekommt. Wenn man nun $A \cdot x + B$ und $E \cdot x + F$ bezüglich statt y und z in die Gleichungen 1, 2, 3, 4 einsetzt, so bekommt man

$$\left.\begin{array}{ll} 7) & A \cdot a + B = b \\ 8) & E \cdot a + F = c \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 9) & A \cdot \alpha + B = \beta \\ 10) & E \cdot \alpha + F = \gamma \end{array}\right.$$

und wenn man hier $\chi'(b, c)$ und $\chi''(\beta, \gamma)$ bezüglich statt a und α einsetzt, so bekommt man

$$\left.\begin{array}{ll} 11) & A \cdot \chi'(b, c) + B = b \\ 12) & E \cdot \chi'(b, c) + F = c \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll} 13) & A \cdot \chi''(\beta, \gamma) + B = \beta \\ 14) & E \cdot \chi''(\beta, \gamma) + F = \gamma \end{array}\right.$$

Man erkennt aber, dass sich aus den Gleichungen 11 und 12 nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des b und c ergeben, dass sie sonach keine identischen Gleichungen sind.

Ebenso erkennt man, dass sich aus den Gleichungen 13 und 14 nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des β und γ ergeben, dass also auch sie keine identischen Gleichungen sind.

Will man daher den beiden Elementen b und c andere Werthe $(b + Db)$ und $(c + Dc)$ beilegen, welche den Gleichungen 11 und 12 nicht entsprechen; will man ebenso den beiden Elementen β und γ andere Werthe $(\beta + D\beta)$ und $(\gamma + D\gamma)$ beilegen, welche den Gleichungen 13 und 14 nicht entsprechen: so muss man an die Stelle des y eine andere Function $y + \Delta y = A \cdot x + B + \Delta y$ in Gleichung 1 und 3 einsetzen; ebenso muss man an die Stelle des z eine andere Function $z + \Delta z = E \cdot x + F + \Delta z$ in Gleichung 2 und 4 einsetzen. Man muss also die Gleichungen 1, 2, 3, 4 einer gemischten Mutation unterwerfen, wie bereits (z. B. in Aufgabe 160 und 161) hinlänglich auseinander gesetzt ist.

Aus der Gleichung $f'(a, b, c) = 0$ folgt

$$15)\quad \vartheta a = \frac{d_b a}{db} \cdot \vartheta b + \frac{d_c a}{dc} \cdot \vartheta c$$

Digitized by Google

$$16)\quad \vartheta^2 a = \frac{d_b a}{db}\cdot\vartheta^2 b + \frac{d_c a}{dc}\cdot\vartheta^2 c + \frac{d_b^2 a}{db^2}\cdot\vartheta b^2 + 2\cdot\frac{d_b d_c a}{db.dc}\cdot\vartheta b\cdot\vartheta c + \frac{d_c^2 a}{dc^2}\cdot\vartheta c^2$$

etc. etc.

Aus der Gleichung $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ folgt

$$17)\quad \vartheta\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma$$

$$18)\quad \vartheta^2\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta}\cdot\vartheta^2\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta^2\gamma + \frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 + 2\cdot\frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta.d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2}\cdot\vartheta\gamma^2$$

etc. etc.

Unterwirft man nun Gleichung 1 wirklich einer gemischten Mutation, so gibt sich

$$19)\quad \delta y_a + \frac{dy_a}{da}\cdot\vartheta a = \vartheta b$$

$$20)\quad \delta^2 y_a + 2\cdot\frac{d\delta y_a}{da}\cdot\vartheta a + \frac{dy_a}{da}\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2 y_a}{da^2}\cdot\vartheta a^2 = \vartheta^2 b$$

etc. etc.

Unterwirft man ebenso die Gleichungen 2, 3, 4 einer gemischten Mutation, und verfahrt man ebenso, wie im ersten Falle der vorigen Aufgabe; so geht Gleichung VII über in

$$XI)\quad \left(A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta + \left(E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\right)\cdot\vartheta\gamma - \left(A + \frac{d_b a}{db}\right)\cdot\vartheta b - \left(E + \frac{d_c a}{dc}\right)\cdot\vartheta c = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Weil aber $\vartheta\beta$, $\vartheta\gamma$, ϑb, ϑc ganz willkürlich sind, so zerlegt sich diese Gleichung in folgende vier

$$\left.\begin{array}{l} XII)\quad A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0 \\ XIII)\quad E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0 \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} XIV)\quad A + \frac{d_b a}{db} = 0 \\ XV)\quad E + \frac{d_c a}{dc} = 0 \end{array}\right.$$

Eliminirt man aus dem Ausdrucke X die Elemente $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\alpha$, ϑa, $\vartheta^2 a$; und beachtet man dann die Gleichungen XII, XIII, XIV, XV; so bekommt man

$$XVI)\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha \left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}\cdot\left[\frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 + 2\cdot\frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta.d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2}\cdot\vartheta\gamma^2\right.$$

$$\left. - \frac{d_b^2 a}{db^2}\cdot\vartheta b^2 - 2\cdot\frac{d_b d_c a}{db.dc}\cdot\vartheta b\cdot\vartheta c - \frac{d_c^2 a}{dc^2}\cdot\vartheta c^2\right]$$

Der Theilsatz mit den Mutationscoefficienten zeigt an, dass jedenfalls ein Minimumstand stattfindet; dagegen das mit Differenzcoefficienten versehene Aggregat wird anzeigen, was in secundärer Beziehung stattfindet.

Die zehn Stücke a, b, c, α, β, γ, A, B, E, F bestimmen sich durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$, $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $A\cdot a + B = b$, $E\cdot a + F = c$, $A\cdot\alpha + B = \beta$, $E\cdot\alpha + F = \gamma$, $A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = 0$, $E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$, $A + \frac{d_b a}{db} = 0$, $E + \frac{d_c a}{dc} = 0$.

Was die Gleichungen XII, XIII, XIV, XV anbelangt, so verfahre man mit ihnen, wie mit den Gleichungen XIII und XIV der vorigen Aufgabe geschehen ist. Dann kommt man zu der Erkenntniss, dass die absolut kürzeste Entfernung und die betreffenden

Digitized by Google

Normalen der beiden Gränzflächen in einer und derselben graden Linie liegen, d. h. die absolut kürzeste Entfernung steht auf beiden Gränzflächen senkrecht. Dadurch ist ein bequemes Mittel gegeben, diese kürzeste Entfernung geometrisch zu construiren.

Zusatz 1. Die theoretische Durchführung dieses ersten Falles hat nur Gebrauch gemacht von den partiellen Differentialquotienten $\frac{d_b a}{db}$, $\frac{d_c a}{dc}$, $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta}$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}$, $\frac{d_b^2 a}{db^2}$, $\frac{d_b d_c a}{db.dc}$, $\frac{d_c^2 a}{dc^2}$, $\frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2}$, $\frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta . d\gamma}$, $\frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2}$. Es ist also hier ganz einerlei, ob die Gränzflächen durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, oder durch die Gleichungen $a = \chi'(b, c)$ und $\alpha = \chi''(\beta, \gamma)$ gegeben sind; denn die Differentialquotienten lassen sich herstellen, ohne dass man zuvor a und α absondert.

1) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$21)\quad a + \mathfrak{G} \cdot b + \mathfrak{H} \cdot c + \mathfrak{K} = 0$$

$$22)\quad \alpha + G \cdot \beta + H \cdot \gamma + K = 0$$

gegebenen Ebenen; so bekommt man

$$23)\quad da + \mathfrak{G} \cdot db + \mathfrak{H} \cdot dc = 0$$

$$24)\quad d\alpha + G \cdot d\beta + H \cdot d\gamma = 0$$

$$25)\quad d^2 a = 0$$

$$26)\quad d^2 \alpha = 0$$

Daraus folgt $\frac{d_b a}{db} = -\mathfrak{G}$, $\frac{d_c a}{dc} = -\mathfrak{H}$, $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = -G$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = -H$. Die Gleichungen XII, XIII, XIV, XV gehen also über in

$$A = G,\ E = H,\ A = \mathfrak{G},\ E = \mathfrak{H}$$

so dass man hätte $G = \mathfrak{G}$ und $H = \mathfrak{H}$. Die Aufgabe ist also nur möglich, wenn die beiden Gränzebenen parallel sind. Da dabei Gleichung XII mit XIV, und Gleichung XIII mit XV zusammenfällt; so hat man zwei Gleichungen weniger, als unbestimmte Stücke. Weil aber $A = G = \mathfrak{G}$ und $E = H = \mathfrak{H}$ ist, so sind die zwei Stücke A und E jedenfalls bestimmt; also befinden sich nur unter den acht Stücken a, b, c, α, β, γ, B, F diejenigen zwei, welche unbestimmt bleiben. Man kann daher die kürzeste Entfernung in jedem beliebigen Punkte nehmen, wenn nicht noch eine Nebenbedingung vorgeschrieben ist. Weil hier

$$\odot\quad \frac{d_b^2 a}{db^2} = 0,\ \frac{d_b d_c a}{db.dc} = 0,\ \frac{d_c^2 a}{dc^2} = 0,\ \frac{d_\beta^2 \alpha}{d\beta^2} = 0,\ \frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta . d\gamma} = 0,\ \frac{d_\gamma^2 \alpha}{d\gamma^2} = 0$$

ist; so reducirt sich Gleichung XVI auf

$$XVII)\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Zusatz 2. Dass dieser für $(\delta)^2 U$ hergestellte Ausdruck keinen Differenzcoefficienten enthält, ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche aber mit dem Umstande, dass die beiden Gränzflächen diesmal Ebenen sind, zusammenhangt. Aus den Gleichungen 21 und 22 folgen nemlich die Gleichungen $\odot$; und so fallen die mit ϑb, ϑc, $\vartheta \beta$ und $\vartheta \chi$ versehenen Theilsätze aus XVI hinweg. Der in XVII für $(\delta)^2 U$ hergestellte Ausdruck liefert aber dennoch ein ganz vollständiges Prüfungsmittel, wie man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung überzeugen kann. Von der gesuchten Graden, welche auf den beiden miteinander parallelen Gränzebenen zugleich senkrecht stehen muss, kann nemlich jede dieser Gränzebenen nur in einem einzigen Punkte getroffen werden; und sonach gibt es auf der gesuchten Graden auch nur ein einziges Stück, das in der ersten Gränzebene anfängt und in der zweiten aufhört. Sowie nun von unserer Figur, sobald man an irgend einer Stelle eine auf den beiden Gränzebenen senkrechte Grade gezogen hat, nur ein einziges Stück dieser Graden zur Beachtung dargeboten wird, d. h. sowie bei der Figur keine Verschiedenheiten in secundärer Beziehung aufgefunden werden können; ebensowenig braucht das Prüfungsmittel mit einem Differenzcoefficienten versehen zu sein.

Digitized by Google

2) Sucht man die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei durch die Gleichungen

$$27)\quad (\mathfrak{G} - a)^2 + (\mathfrak{H} - b)^2 + (\mathfrak{K} - c)^2 = \mathfrak{R}^2$$
$$28)\quad (G - \alpha)^2 + (H - \beta)^2 + (K - \gamma)^2 = R^2$$

gegebenen Kugelflächen; so bekommt man

$$29)\quad (\mathfrak{G} - a) \cdot da + (\mathfrak{H} - b) \cdot db + (\mathfrak{K} - c) \cdot dc = 0$$
$$30)\quad (G - \alpha) \cdot d\alpha + (H - \beta) \cdot d\beta + (K - \gamma) \cdot d\gamma = 0$$
$$31)\quad (\mathfrak{G} - a) \cdot d^2a - da^2 - db^2 - dc^2 = 0$$
$$32)\quad (G - \alpha) \cdot d^2\alpha - d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2 = 0$$

Daraus folgt $\frac{d_b a}{db} = -\frac{\mathfrak{H} - b}{\mathfrak{G} - a}$, $\frac{d_c a}{dc} = -\frac{\mathfrak{K} - c}{\mathfrak{G} - a}$, $\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} = -\frac{H - \beta}{G - \alpha}$, $\frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = -\frac{K - \gamma}{G - \alpha}$.

Die Gleichungen XII, XIII, XIV, XV gehen also über in

$$\left.\begin{array}{l} 33)\quad \mathfrak{H} - b = A \cdot (\mathfrak{G} - a) \\ 34)\quad \mathfrak{K} - c = E \cdot (\mathfrak{G} - a) \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} 35)\quad H - \beta = A \cdot (G - \alpha) \\ 36)\quad K - \gamma = E \cdot (G - \alpha) \end{array}\right.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichungen der Kugelflächen ein, so gibt sich

$$37)\quad a = \mathfrak{G} \mp \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}, \quad \text{und } 38)\quad \alpha = G \mp \frac{R}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$$

Es gibt also in jeder Kugelfläche zwei Punkte, welche zugleich der gesuchten Graden angehören, so dass es vier verschiedene Stücke der gesuchten Graden gibt, welche noch einer nähern Betrachtung unterworfen werden müssen.

Zieht man nun durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln eine Grade, so ist diese die gesuchte, und sie steht in jedem ihrer Durchgangspunkte senkrecht auf den betreffenden Kugelflächen.

Gleichung XVI geht nun über in

$$\text{XVIII)}\quad {}_{(\delta)}^2U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{(G - \alpha)^3 \cdot \sqrt{1 + A^2 + E^2}} [((H - \beta) \cdot \vartheta\beta + (K - \gamma) \cdot \vartheta\gamma)^2 + (G - \alpha)^2 \cdot (\vartheta\beta^2 + \vartheta\gamma^2)]$$
$$- \frac{1}{(\mathfrak{G} - a)^3 \cdot \sqrt{1 + A^2 + E^2}} [((\mathfrak{H} - b) \cdot \vartheta b + (\mathfrak{K} - c) \cdot \vartheta c)^2 + (\mathfrak{G} - a)^2 \cdot (\vartheta b^2 + \vartheta c^2)]$$

Jedes der beiden mit Differenzcoefficienten versehenen Aggregate besteht, wie man sieht, aus zwei Factoren, von welchen die, die sich innerhalb der eckigen Klammern befinden, beständig positiv bleiben. Man mache nun folgende drei Unterscheidungen:

𝔄) Wenn $\alpha < G$ und $a > \mathfrak{G}$, so sind die beiden mit Differenzcoefficienten versehenen Aggregate positiv; also ist auch ${}_{(\delta)}^2U$ positiv, und es findet der Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

𝔅) Wenn $\alpha > G$ und $a < \mathfrak{G}$, so sind die beiden mit Differenzcoefficienten versehenen Aggregate negativ. Dabei existirt wohl ein Minimum-stand, aber in secundärer Beziehung findet ein Grösstes statt, d. h. man hat den Maximumwerth eines Minimumstandes, welcher Zustand in der Aufgabe jedoch nicht verlangt wird, also auch nicht berücksichtigt zu werden braucht.

ℭ) Wenn gleichzeitig $\alpha > G$ und $a > \mathfrak{G}$, oder wenn gleichzeitig $\alpha < G$ und $a < \mathfrak{G}$ ist; so können die beiden mit Differenzcoefficienten versehenen Aggregate zusammen genommen weder als positiv noch als negativ gelten, so dass in secundärer Beziehung weder ein Maximumwerth noch Minimumwerth stattfindet.

Zusatz 3. Wenn die beiden Gränzflächen einander nur berühren, aber sich niemals schneiden, so ist ihre absolut kürzeste Entfernung gleich Null. Dasselbe gilt, wenn beide Gränzflächen Ebenen sind, und ganz ineinander fallen. Wenn aber die beiden Gränzflächen einander schneiden, so kann von einer absolut kürzesten Entfernung keine Rede sein; dagegen eine relativ kürzeste Entfernung kann allerdings gefordert werden. Alles dieses ist bereits (Aufgabe 161, Zusatz 8) hinlänglich erläutert.

Es sollen nun einige Fälle folgen, wo man relativ kürzeste Entfernungen sucht.


Digitized by Google

Zweiter Fall.

Man sucht nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen, sondern die kürzeste unter allen denen; bei welchen

1) **die Differenz der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und**
2) **die Differenz der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.**

Dieser Fall verlangt, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 39) & y_a = b \\ 40) & z_a = c \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{ll} 41) & y_\alpha = \beta \\ 42) & z_\alpha = \gamma \end{array}\right\}, \text{ und } \begin{array}{ll} 43) & y_\alpha - y_a = K \\ 44) & z_\alpha - z_a = \mathfrak{K} \end{array}$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzflächen möglich ist.

Unterwirft man die beiden letzten Gleichungen einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$45) \quad \delta y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta y_a - \frac{dy_a}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

$$46) \quad \delta z_\alpha + \frac{dz_\alpha}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \delta z_a - \frac{dz_a}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Nun ist $\delta y_\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \vartheta\alpha$, $\delta y_a = \vartheta b - A \cdot \vartheta a$, $\delta y_\alpha = \vartheta\gamma - E \cdot \vartheta\alpha$, $\delta z_a = \vartheta c - E \cdot \vartheta a$; und somit gehen die Gleichungen 45 und 46 bezüglich über in

$$47) \quad \vartheta\beta - \vartheta b = 0, \qquad \text{und} \qquad 48) \quad \vartheta\gamma - \vartheta c = 0$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die zwischen $\vartheta\beta$ und ϑb und die zwischen $\vartheta\gamma$ und ϑc stattfindende Abhängigkeit festgestellt. Man nehme ϑb und ϑc als abhängig, und eliminire δy_α, δy_a, δz_α, δz_a, ϑa, $\vartheta\alpha$, ϑb, ϑc aus VII; so bekommt man

$$\text{XIX)} \quad \left(\frac{d_\beta\alpha}{d\beta} - \frac{d_b a}{db}\right) \cdot \vartheta\beta + \left(\frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} - \frac{d_c a}{dc}\right) \cdot \vartheta\gamma = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ und $\vartheta\gamma$ zerfällt diese Gleichung in folgende zwei

$$\text{XX)} \quad \frac{d_\beta\alpha}{d\beta} - \frac{d_b a}{db} = 0, \quad \text{und} \quad \text{XXI)} \quad \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} - \frac{d_c a}{dc} = 0$$

Legt man nun in die gesuchten Punkte der gegebenen Gränzflächen Berührungsebenen; so wird durch Gleichung XX angezeigt, dass die in der Coordinatenebene XY liegenden Spuren dieser Berührungsebenen parallel sind; und durch Gleichung XXI wird angezeigt, dass die in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren dieser Berührungsebenen gleichfalls parallel sind. Weil aber die in zwei Coordinatenebenen liegenden Spuren parallel sind, so sind die betreffenden Ebenen selbst parallel. Die hier gesuchte kürzeste Entfernung trifft also bei beiden Gränzflächen in solchen Punkten ein, deren Berührungsebenen parallel laufen.

Zusatz 4. Bei der zweiten Gränzfläche sind die beiden Coordinaten β und γ als willkürlich behandelt worden; und sonach musste α abhängig sein, wie es die Gleichung $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ mit sich bringt.

Da die Gleichungen 43 und 44 nur an den Gränzen gelten, so sind sie gleichbedeutend mit

$$49) \quad \beta - b = K, \qquad \text{und} \qquad 50) \quad \gamma - c = \mathfrak{K}$$

Die beiden Elemente b und c sind also bezüglich von β und γ abhängig; denn es ist

$$51) \quad b = \beta - K, \qquad \text{und} \qquad 52) \quad c = \gamma - \mathfrak{K}$$

Wenn man den beiden Coordinaten b und c was immer für Werthe beilegt, und in $f'(a, b, c) = 0$ einführt; so ergibt sich dadurch jedesmal der entsprechende Werth des a. Man kann also auch den beiden Coordinaten b und c ihre bezüglich von β und γ abhängigen Werthe beilegen. Dabei geht $f'(a, b, c) = 0$ über in

$$53) \quad f'(a, (\beta - K), (\gamma - \mathfrak{K})) = 0$$

wodurch dargestellt ist, wie a von β und γ abhangt.

Unterwirft man die Gleichungen 45 und 46 abermals einer gemischten Mutation, und eliminirt man δy_a, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_a$, $\delta^2 z_\alpha$, ϑa, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2\alpha$, ϑb, ϑc, $\vartheta^2 b$, $\vartheta^2 c$; so geht X über in

Digitized by Google

$$\text{XXII)}\ \delta^2 U = \frac{1}{(1+A^2+E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+A^2+E^2}} \cdot \left[\left(\frac{d^2_\beta \alpha}{d\beta^2} - \frac{d^2_b a}{db^2}\right) \cdot \vartheta\beta^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_\beta d_\gamma \alpha}{d\beta . d\gamma} - \frac{d_b d_c a}{db . dc}\right) \cdot \vartheta\beta \cdot \vartheta\gamma\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2_\gamma \alpha}{d\gamma^2} - \frac{d^2_c a}{dc^2}\right) \cdot \vartheta\gamma^2\right]$$

Dritter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) der Unterschied der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) der Unterschied der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\begin{matrix} 54)\ y_a = b & \left\{ 56)\ y_\alpha = \beta \right. & \left\{ 58)\ z_\alpha - y_\alpha = K \right. \\ 55)\ z_a = c & \left. 57)\ z_\alpha = \gamma \right. & \left. 59)\ z_a - y_a = \mathfrak{K} \right. \end{matrix}$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzflächen möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 58 und 59 einer gemischten Mutation, und verfahrt man, wie bisher; so folgt aus der Gränzengleichung

$$\text{XXIII)}\ A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} + E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

und

$$\text{XXIV)}\ A + \frac{d_b a}{db} + E + \frac{d_c a}{dc} = 0$$

Und so fort.

Vierter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der mit der Axe Y parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) die Summe der mit der Axe Z parallelen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} 60)\ y_a = b \\ 61)\ z_a = c \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} 62)\ y_\alpha = \beta \\ 63)\ z_\alpha = \gamma \end{matrix}\right\},\ \text{und}\ \left\{\begin{matrix} 64)\ y_\alpha + y_a = K \\ 65)\ z_\alpha + z_a = \mathfrak{K} \end{matrix}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen beiden Gränzflächen möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 64 und 65 einer gemischten Mutation, und verfahrt man, wie bisher; so folgt aus der Gränzengleichung

$$\text{XXV)}\ 2A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} + \frac{d_b a}{db} = 0$$

und

$$\text{XXVI)}\ 2E + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} + \frac{d_c a}{dc} = 0$$

Und so fort.

Fünfter Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen

Digitized by Google

1) die Summe der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
2) die Summe der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzpunkte die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}66) & y_a = b \\ 67) & z_a = c\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{ll}68) & y_\alpha = \beta \\ 69) & z_\alpha = \gamma\end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{ll}70) & y_\alpha + z_\alpha = K \\ 71) & y_a + z_a = \mathfrak{K}\end{array}\right.$$

gelten, die kürzeste suche, welche zwischen den beiden Gränzflächen möglich ist.

Unterwirft man Gleichung 70 und 71 einer gemischten Mutation, und verfahrt man, wie bisher; so folgt aus der Gränzengleichung

$$\text{XXVII)} \quad A + \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} - E - \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} = 0$$

und

$$\text{XXVIII)} \quad A + \frac{d_b a}{db} - E - \frac{d_c a}{dc} = 0$$

Und so fort.

Sechster Fall.

Man sucht wieder nicht die absolut kürzeste Entfernung zweier Flächen, sondern die kürzeste unter allen denen, bei welchen

1) die Summe der zur Abscisse a gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{K}$,
2) die Summe der zur Abscisse α gehörigen Gränzordinaten den bestimmt vorgeschriebenen Werth K, und
3) die Summe aller vier Gränzordinaten nebst den zugehörigen Abscissen den bestimmt vorgeschriebenen Werth $\mathfrak{S}$ hat.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Linien, für deren Gränzordinaten die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}72) & y_a = b \\ 73) & z_a = c \\ 74) & y_a + z_a = \mathfrak{K}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll}75) & y_\alpha = \beta \\ 76) & z_\alpha = \gamma \\ 77) & y_\alpha + z_\alpha = K.\end{array}$$

und

$$78) \quad a + \alpha + y_a + y_\alpha + z_a + z_\alpha = \mathfrak{S}$$

gelten, die kürzeste suche, die zwischen den gegebenen Gränzflächen möglich ist.

Unterwirft man die drei letzten Gleichungen einer gemischten Mutation, und verfahrt man weiter, wie gewöhnlich; so ergibt sich aus der Gränzengleichung

$$79) \quad (A - E) \cdot \left(\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} + \frac{d_b a}{db} - \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} - \frac{d_c a}{dc}\right)$$
$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} - \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma}\right) \cdot \left(\frac{d_b a}{db} - \frac{d_c a}{dc}\right) = 0$$

Diese Gleichung, verbunden mit folgenden neun

$$b = A \cdot a + B, \quad c = E \cdot a + F, \quad \beta = A \cdot \alpha + B, \quad \gamma = E \cdot \alpha + F$$
$$f'(a, b, c) = 0, \quad f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad (A + E) \cdot a + B + F = \mathfrak{K}$$
$$(A + E) \cdot \alpha + B + F = K, \quad (1 + A + E) \cdot (a + \alpha) + 2B + 2F = \mathfrak{S}$$

reichen hin, die zehn Stücke a, b, c, α, β, γ, A, B, E, F zu bestimmen.

Wären zwei Gränzbedingungen mehr gewesen, so hätte dieser achte Fall zu den sogenannten überbestimmten Aufgaben gehört. (Man sehe den siebenten Fall der 160sten und 161sten Aufgabe.)

Schaut man auf den fünften Fall der 177sten Aufgabe zurück, wo nicht zwei Gränzflächen, sondern zwei Gränzcurven gegeben sind; so erkennt man, dass bei ganz gleichen Gränzbedingungen die Aufgabe bereits eine überbestimmte ist, d. h. dass man zur

Digitized by Google

Bestimmung der zehn Stücke elf Gleichungen hat, welche, weil eine zuviel ist, einander leicht widersprechen können.

Schlussbemerkung. Ist ganz die nemliche, wie die der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 180.

Man sucht die kürzeste Entfernung von der durch die Gleichungen $f'(a, b, c) = 0$ und $f'(a, b, c) = 0$ gegebenen räumlichen Curve bis zu der durch die Gleichung $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ gegebenen Fläche.

Allgemeine Einleitung.

Man vergleiche die Einleitungen zu den vier vorhergehenden Aufgaben; so erkennt man, dass die gesuchte kürzeste Entfernung durch folgende zwei Gleichungen

$$\text{I)}\quad y = A \cdot x + B, \qquad \text{und} \qquad \text{II)}\quad z = E \cdot x + F$$

gegeben, d. h. dass die gesuchte kürzeste Entfernung die grade Linie im Raume ist.

Als Gränzengleichung bekommt man im Allgemeinen

$$\text{III)}\quad \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot [A \cdot \delta y_\alpha + E \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - E \cdot \delta z_a$$
$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta a] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ auch hätte weglassen können.

Für den gemischten Mutationscoefficient der zweiten Ordnung bekommt man im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(E \cdot \frac{d\delta y}{dx} - A \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}} \cdot [A \cdot \delta^2 y_\alpha + E \cdot \delta^2 z_\alpha - A \cdot \delta^2 y_a - E \cdot \delta^2 z_a$$
$$+ 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2E \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2\alpha - (1 + A^2 + E^2) \cdot \vartheta^2 a]$$

Man ist nun soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Specieller Fall.

Man sucht die absolut kürzeste Entfernung zwischen der gegebenen räumlichen Curve und der gegebenen Fläche.

Hier gewinnt der Calcul die meiste Symmetrie, wenn man bei der gegebenen Curve a als das dem Werthe nach willkürliche und b und c als die dem Werthe nach abhängigen Elemente, dagegen bei der gegebenen Fläche α als das dem Werthe nach abhängige und β und γ als die dem Werthe nach willkürlichen Elemente nimmt. Zu diesem Ende bilde man sich folgende Gleichungen

$$1)\quad \delta y_a = \left(\frac{db}{da} - A\right) \cdot \vartheta a$$

$$2)\quad \delta z_a = \left(\frac{dc}{da} - E\right) \cdot \vartheta a$$

$$3)\quad \vartheta\alpha = \frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma$$

$$4)\quad \delta y_\alpha = \vartheta\beta - A \cdot \left(\frac{d_\beta \alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{d_\gamma \alpha}{d\gamma} \cdot \vartheta\gamma\right)$$

Digitized by Google

$$5)\quad \delta z_\alpha = \vartheta\gamma - E\cdot\left(\frac{d_\beta\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\cdot\vartheta\gamma\right)$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung III geht also über in

$$\text{V)}\quad \left(A + \frac{d_\beta\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta + \left(E + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma}\right)\cdot\vartheta\gamma - \left(1 + A\cdot\frac{db}{da} + F\cdot\frac{dc}{da}\right)\cdot\vartheta a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}$ weggelassen hat. Wegen der Willkürlichkeit der Elemente $\vartheta\beta$, $\vartheta\gamma$, ϑa zerlegt sich Gleichung V in folgende drei:

$$\left.\begin{aligned}\text{VI)}\quad & A + \frac{d_\beta\alpha}{d\beta} = 0\\ \text{VII)}\quad & E + \frac{d_\gamma\alpha}{d\gamma} = 0\end{aligned}\right\}\quad\text{und}\qquad \text{VIII)}\quad 1 + A\cdot\frac{db}{da} + E\cdot\frac{dc}{da} = 0$$

Mittelst der Gleichungen VI und VII beweist man, dass die gesuchte absolut kürzeste Entfernung auf der Gränzfläche $f''(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ senkrecht steht, wie bereits im ersten Falle der 178sten Aufgabe geschehen ist.

Mittelst der Gleichung VIII beweist man, dass die gesuchte absolut kürzeste Entfernung auf der durch $f'(a, b, c) = 0$ und $f'(a, b, c) = 0$ gegebenen Gränzcurve senkrecht steht, wie im ersten Falle der 176sten Aufgabe geschehen ist.

Eliminirt man jetzt $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$ und $\vartheta^2\alpha$ aus IV, und beachtet man dabei die Gleichungen VI, VII und VIII; so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{IX)}\quad \delta^2 U = {} & \frac{1}{(1 + A^2 + E^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - A\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx\\ & + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + E^2}}\cdot\left[\frac{d_\beta^2\alpha}{d\beta^2}\cdot\vartheta\beta^2 + 2\cdot\frac{d_\beta d_\gamma\alpha}{d\beta\,.\,d\gamma}\cdot\vartheta\beta\cdot\vartheta\gamma + \frac{d_\gamma^2\alpha}{d\gamma^2}\cdot\vartheta\gamma^2\right.\\ & \left. - \left(A\cdot\frac{d^2b}{da^2} + E\cdot\frac{d^2c}{da^2}\right)\cdot\vartheta a^2\right]\end{aligned}$$

Solche Fälle, welche sich auf Gränzbedingungen beziehen, kann man (nach dem Vorgange früherer Aufgaben) beliebig viele aufstellen.

Aufgabe 181.

Man soll y und z als solche Functionen von x bestimmen, dass

$$U = \int_a^\alpha z\cdot dx\cdot\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Mutirt, und formt man, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, auf die gewöhnliche Weise um; so bekommt man als zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\delta U = {} & \left(\frac{z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha\cdot(p\cdot\delta y + \mathfrak{p}\cdot\delta z)_\alpha - \left(\frac{z}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a\cdot(p\cdot\delta y + \mathfrak{p}\cdot\delta z)_a\\ & + \int_a^\alpha\left[\left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}z}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)\right)\cdot\delta z - \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{pz}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right)\cdot\delta y\right]\cdot dx\end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden Hauptgleichungen

$$\text{I)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{pz}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

und

$$\text{II)}\quad \sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot z}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

Gleichung I lässt sich ohneweiters integriren, und man bekommt

$$\text{III)}\quad \frac{pz}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} = k$$

Daraus folgt $p = k\cdot\sqrt{\frac{1+\mathfrak{p}^2}{z^2-k^2}}$: und wenn man diesen für p gefundenen Ausdruck in II einführt, so gibt sich

$$z\cdot\sqrt{\frac{1+\mathfrak{p}^2}{z^2-k^2}} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{p}\cdot\sqrt{\frac{z^2-k^2}{1+\mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

Man führe die angezeigte Differentiation aus, und multiplicire hierauf die ganze Gleichung mit $\sqrt{(1+\mathfrak{p}^2)\cdot(z^2-k^2)}$; so gibt sich

$$z\cdot(1+\mathfrak{p}^2)\cdot dx - \frac{z^2-k^2}{1+\mathfrak{p}^2}\cdot d\mathfrak{p} - \mathfrak{p}z\cdot dz = 0$$

Nun ist $dz = \mathfrak{p}\cdot dx$; letztere Gleichung geht also über in

$$z\cdot(1+\mathfrak{p}^2)\cdot dx - \frac{z^2-k^2}{1+\mathfrak{p}^2}\cdot d\mathfrak{p} - z\cdot\mathfrak{p}^2\cdot dx = 0$$

Daraus folgt $\frac{z\cdot dx}{z^2-k^2} - \frac{d\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}^2} = 0$. Multiplicirt man diese ganze Gleichung mit $\frac{dz}{dx} = \mathfrak{p}$, so geht sie über in $\frac{z\cdot dz}{z^2-k^2} - \frac{\mathfrak{p}\cdot d\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}^2} = 0$. Daraus folgt weiter $\frac{1}{2}\cdot \lg\text{nat}\,\frac{z^2-k^2}{1+\mathfrak{p}^2} = h$; und mit Veränderung des Constanten h in $\frac{1}{2}\cdot\lg\text{nat}\, n^2$ gibt sich $\frac{z^2-k^2}{1+\mathfrak{p}^2} = n^2$, woraus

$$\text{IV)}\quad \mathfrak{p} = \frac{1}{n}\cdot\sqrt{z^2-k^2-n^2}$$

folgt. Diese Gleichung geht gradezu über in

$$dx = \frac{n\cdot dz}{\sqrt{z^2-k^2-n^2}}$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{V)}\quad x = n\cdot\lg\text{nat}\,\frac{z+\sqrt{z^2-n^2-k^2}}{m}$$

Daraus folgt $e^{\frac{x}{n}} = \frac{z+\sqrt{z^2-n^2-k^2}}{m}$; und so bekommt man endlich

$$\text{VI)}\quad z = \frac{1}{2m}\cdot\left(m^2\cdot e^{\frac{x}{n}} + (k^2+n^2)\cdot e^{-\frac{x}{n}}\right)$$

Führt man den (in IV gefundenen) Ausdruck von $\mathfrak{p}$ in Gleichung III ein, so bekommt man $\frac{npz}{\sqrt{n^2\cdot p^2+z^2-k^2}} = k$. Daraus folgt $n^2\cdot p^2\cdot(z^2-k^2) = k^2\cdot(z^2-k^2)$, oder $n\cdot p = \pm k$. Also ist

$$\text{VII)}\quad y = \pm\frac{k}{n}\cdot x + E$$

Sucht man eine räumliche Curve, bei welcher der hier gegebene Ausdruck U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; so erkennt man an Gleichung VII, dass man eine ebene Curve hat, und zwar eine solche, welche in einer auf der Coordinatenebene XY senkrechten Ebene liegt. An Gleichung V oder VI erkennt man, dass die Curve die gemeine Kettenlinie ist.

Die vier Constanten m, n, k, E kann man, nach dem Vorgange früherer Aufgaben, durch Bedingungen bestimmen, welche der Gränzengleichung

$$\text{VIII)}\quad k\cdot\delta y_\alpha + \left(\sqrt{z^2-k^2-n^2}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha - k\cdot\delta y_\omega - \left(\sqrt{z^2-k^2-n^2}\right)_\omega\cdot\delta z_\omega = 0$$

Digitized by Google

genügen. Mutirt man noch einmal, und berücksichtigt man alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\delta^2 U = k \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\sqrt{z^2 - k^2 - n^2}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - K \cdot \delta^2 y_a - \left(\sqrt{z^2 - k^2 - n^2}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^2} \cdot \left[\left(p \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Wegen des zweideutigen Radicals entscheidet man sich (nach Bd. I. S. 170) auf folgende Weise:

A) Hat das Radical diejenige Bedeutung, dass bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen des x der Ausdruck $z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ positiv bleibt; so sind $\delta^2 U$ und U' zugleich positiv. Dabei findet ein Minimum-stand statt.

B) Hat das Radical diejenige Bedeutung, dass bei allen von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthen des x der Ausdruck $z \cdot \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ negativ bleibt; so sind $\delta^2 U$ und U' zugleich negativ. Dabei findet ein Maximum-stand statt, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

An Gleichung VI erkennt man, dass das z bei jedem Werthe des x dasselbe unveränderliche Zeichen behält, wie m; denn e ist als Basis des natürlichen Logarithmensystems immer eine positive Zahl.

Alles Weitere, wie gewöhnlich.

Aufgabe 182.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx = \int_a^\alpha \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 \cdot \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2 z}{dx^2}$; so bekommt man

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(4 \cdot p^3 \cdot q^2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot p^4 \cdot q \cdot \frac{d^2 \delta z}{dx^2}\right) \cdot dx$$

oder

$$\delta U = \left(4 \cdot p^3 \cdot q^2 \cdot \delta y + 2 \cdot p^4 \cdot q \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \frac{d(2p^4 \cdot q)}{dx} \cdot \delta z\right)_\alpha$$

$$- \left(4p^3 \cdot q^2 \cdot \delta y + 2 \cdot p^4 \cdot q \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \frac{d\,(2p^4 \cdot q)}{dx} \cdot \delta z\right)_a$$

$$- \int_a^\alpha \left(\frac{d\,(4p^3 \cdot q^2)}{dx} \cdot \delta y - \frac{d^2(2 \cdot p^4 \cdot q)}{dx^2} \cdot \delta z\right) \cdot dx$$

Wenn man nun die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will; so ergeben sich aus der zweiten Form folgende zwei Hauptgleichungen:

$$\text{I)} \quad \frac{d\,(4 \cdot p^3 \cdot q^2)}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \text{II)} \quad \frac{d^2(2 \cdot p^4 \cdot q)}{dx^2} = 0$$

Integrirt man diese Gleichungen, so bekommt man bezüglich

$$\text{III)} \quad p^3 \cdot q^2 = E^2, \quad \text{und} \quad \begin{cases} \text{IV)} \quad \frac{d\,(p^4 \cdot q)}{dx} = B \\ \text{und daraus folgt weiter} \\ \text{V)} \quad p^4 \cdot q = B \cdot x + C \end{cases}$$

Dividirt man V in III, so bekommt man $\frac{q}{p} = \frac{E^2}{Bx + C}$, und daraus folgt

$$\text{VI)} \quad q = \frac{E^2}{Bx + C} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Aus Gleichung V folgt gradezu

$$\text{VII)} \quad q = \frac{Bx + C}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^4}$$

Wenn man q aus VI und VII eliminirt, so bekommt man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = \left(\frac{Bx + C}{E}\right)^2 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \sqrt[5]{\left(\frac{Bx + C}{E}\right)^2}$$

weil man aber für y eine reelle Function von x sucht, so genügt es, nur

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[5]{\left(\frac{Bx + C}{E}\right)^2}$$

zu setzen, woraus durch Integration folgt

$$\text{VIII)} \quad y = F + \frac{5}{7B} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{E^2} \cdot (B \cdot x + C)^7}$$

Gleichung VI geht nun über in $\frac{d^2z}{dx^2} = \sqrt[5]{\frac{E^8}{(Bx + C)^3}}$, und daraus folgt $\frac{dz}{dx} = G + \frac{5}{2B} \cdot \sqrt[5]{E^8 \cdot (Bx + C)^2}$. Also ist

$$\text{IX)} \quad z = H + Gx + \frac{25}{14B^2} \cdot \sqrt[5]{E^8 \cdot (Bx + C)^7}$$

Als Gränzengleichung bekommt man

$$\text{X)} \quad 4E^2(\delta y_\alpha - \delta y_a) - 2B(\delta z_\alpha - \delta z_a) + 2(B\alpha + C)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha - 2(Ba + C)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a = 0$$

Indem man, nach dem Vorgange früherer Aufgaben, Gränzbedingungen stellt, welche letzterer Gleichung genügen; werden sich die sechs Constanten B, C, E, F, G, H bestimmen.

Mutirt man noch einmal, und berücksichtigt man alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\delta^2 U = 4E^2 \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) - 2B \cdot (\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a)$$
$$+ 2 \cdot (B\alpha + C) \cdot \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_\alpha - 2 \cdot (Ba + C) \cdot \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[12p^2 \cdot q^2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 16 \cdot p^3 \cdot q \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2} + 2 \cdot p^4 \cdot \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$

Hier ist sowohl $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ als auch $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ positiv, dagegen ist $\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp \cdot dq}\right)^2 = -232 \cdot p^6 \cdot q^2$ negativ; und somit findet (nach §. 239) weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Aufgabe 183.

Man sucht die räumliche Curve, deren von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckter Bogen mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte und mit den zu den Gränzpunkten gehörigen Krümmungshalbmessern die kleinste Fläche einschliesst.

Das Coordinatensystem sei das rechtwinkelige. Wenn p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$ bezüglich statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ gesetzt wird; so sind die Krümmungshalbmesser der räumlichen Cur-

Digitized by Google

ven bekanntlich $= \frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2}}$. Die Ausdehnung der auf vorgeschriebene Weise begränzten Fläche ist also

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^2}{\sqrt{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2}} \cdot dx$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung R statt $(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)$ und Q statt $\sqrt{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + p^2 + q^2}$; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \Big[\frac{R}{Q^3}(4p \cdot Q^2 - (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\mathfrak{q}R) \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$+ \frac{R}{Q^3}(4\mathfrak{p} \cdot Q^2 - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})qR) \cdot \frac{d\delta z}{dx} - \frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q) \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2}\Big] \cdot dx$$

Wenn man diese erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, so forme man um; und aus der sich ergebenden zweiten Form bekommt man nachstehende zwei Hauptgleichungen:

$$\text{III)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R}{Q^3}[4pQ^2 - (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\mathfrak{q}R]\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right) = 0$$

$$\text{IV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R}{Q^3}[4\mathfrak{p}Q^2 - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})qR]\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right) = 0$$

Beide Gleichungen sind von der vierten Ordnung, so dass die allgemeinen Integrale zusammen mit acht willkürlichen Constanten versehen sein müssen. Integrirt man vorerst einmal, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \frac{R}{Q^3}[4pQ^2 - (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\mathfrak{q}R] + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3} \cdot [(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right) = A$$

$$\text{VI)}\quad \frac{R}{Q^3}[4\mathfrak{p}Q^2 - (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})qR] + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right) = B$$

Die Gränzengleichung nimmt jetzt zunächst folgende Form an

$$\text{VII)}\quad A \cdot \delta y_\alpha + B \cdot \delta z_\alpha - A \cdot \delta y_a - B \cdot \delta z_a$$

$$- \left(\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$$

$$+ \left(\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q) \cdot p + q]\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a = 0$$

Man multiplicire V mit $\mathfrak{q}$ und VI mit q, und addire beide Producte; so bekommt man

$$\frac{4(p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q) \cdot R}{Q} + \mathfrak{q} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right)$$

$$+ q \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right) = A\mathfrak{q} + Bq$$

oder

$$\frac{4(p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q)R}{Q} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\mathfrak{q}\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right) - \frac{d\mathfrak{q}}{dx} \cdot \left(\frac{R^2}{Q^3}[(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}]\right)$$

$$+ \frac{1}{dx} \cdot d\left(q\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right) - \frac{dq}{dx} \cdot \left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q]\right) = A\mathfrak{q} + Bq$$

Wenn man links den ersten, dritten und fünften Theilsatz zusammen nimmt, und ebenso den zweiten und vierten; so geht letztere Gleichung über in

$$\frac{4(p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q)R}{Q} - \left([(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\mathfrak{p} + \mathfrak{q}] \cdot \frac{d\mathfrak{q}}{dx} + [(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)p + q] \cdot \frac{dq}{dx}\right)\frac{R^2}{Q^3}$$

$$+ \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2]\right) = A\mathfrak{q} + Bq$$

Digitized by Google

Die beiden ersten Theilsätze zusammen sind gleichbedeutend mit $\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q}\right)$; und der dritte hat im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $[(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2]$, reducirt sich also ohneweiters auf $\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q}\right)$. Somit zieht letztere Gleichung sich zurück auf

$$\text{VIII)}\quad 2\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q}\right) = Aq + B\mathfrak{q}$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren; und es gibt sich

$$\text{IX)}\quad 2\cdot\frac{R^2}{Q} = A\cdot p + B\cdot\mathfrak{p} + C$$

Man kehre wieder zu den Gleichungen V und VI zurück. Man multiplicire V mit $\mathfrak{p}$ und VI mit p; so bekommt man bezüglich

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q} - \mathfrak{q}\cdot\frac{\mathfrak{p}(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,R^2}{Q^3} - \mathfrak{p}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,R^2}{Q^3}\right) + \mathfrak{p}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{q}R^2}{Q^3}\right) = A\mathfrak{p}$$

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q} - q\cdot\frac{p(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,R^2}{Q^3} - p\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,R^2}{Q^3}\right) + p\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{qR^2}{Q^3}\right) = Bp$$

Da aber $\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{p}}{dx}$ und $q = \frac{dp}{dx}$ ist; so kann man in jeder dieser Gleichungen den zweiten und dritten Theilsatz zusammen ziehen, und es gibt sich

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(p \times \frac{p(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,R^2}{Q^3}\right) + \mathfrak{p}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{qR^2}{Q^3}\right) = A\mathfrak{p}$$

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{p} \times \frac{\mathfrak{p}\cdot(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)R^2}{Q^3}\right) + p\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{q}R^2}{Q^3}\right) = Bp$$

Diese Gleichungen kann man bezüglich umformen in

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q^3} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}^2\cdot(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot R^2}{Q^3}\right) + \mathfrak{p}\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dx}\cdot\frac{R^2}{Q^3} + \mathfrak{p}q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}\right) = A\mathfrak{p}$$

$$\frac{4p\mathfrak{p}R}{Q^3} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p^2\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot R^2}{Q^3}\right) + p\cdot\frac{dq}{dx}\cdot\frac{R^2}{Q^3} + p\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}\right) = Bp$$

Subtrahirt man die vorletzte Gleichung von der letzten, so bleibt

$$\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}^2\cdot(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,R^2}{Q^3}\right) - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p^2\cdot(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,R^2}{Q^3}\right) + \left(p\cdot\frac{dq}{dx} - \mathfrak{p}\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dx}\right)\cdot\frac{R^2}{Q^3}$$

$$+ (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{R^2}{Q^3}\right) = Bp - A\mathfrak{p}$$

Zieht man den ersten und zweiten Theilsatz zusammen, und ebenso den dritten und vierten; so wandelt sich letztere Gleichung um in

$$\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(p^2 + \mathfrak{p}^2)\;(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,R^2}{Q^3}\right) + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,R^2}{Q^3}\right) = Bp - A\mathfrak{p}$$

oder in

$$\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)\cdot(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot R^2}{Q^3}\right) = Bp - A\mathfrak{p}$$

Integrirt man jetzt, so gibt sich

$$\frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)\cdot(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot R^2}{Q^3} = By - Az + E$$

oder

$$\text{X)}\quad (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot\left(\frac{R}{Q}\right)^3 = By - Az + E$$

Führt man statt R und Q die Ausdrücke zurück, so gehen IX und X bezüglich über in

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad 2\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^2 = (Ap+B\mathfrak{p}+C)\cdot\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}$$

und

$$\text{XII)}\quad (p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^3 = (By-Az+E)\cdot[(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2]^{\frac{3}{2}}$$

Dieses sind zwei totale nichtlineäre Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Wenn man sie vollständig integrirt, so gehen noch vier weitere Constanten F, G, H, K ein. Man wird also zwei Urgleichungen bekommen, welche, wie schon hinter Gleichung IV bemerkt wurde, zusammen mit acht willkürlichen Constanten A, B, C, E, F, G, H, K versehen sein werden.

Wegen Gleichung XI geht Gleichung I gradezu über in

$$U' = \frac{1}{4}\cdot\int_a^\alpha (Ap+B\mathfrak{p}+C)\cdot dx$$

und wenn man integrirt, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad U' = \frac{1}{4}\cdot[A\cdot(y_\alpha-y_a)+B\cdot(z_\alpha-z_a)+C\cdot(\alpha-a)]$$

Dieser Ausdruck ist dessbalb bemerkenswerth, weil er in geschlossener Form dargestellt werden konnte, ohne dass es vorher nöthig war, die für y und z gesuchten Functionen auch wirklich aufgefunden zu haben.

Erster Fall. Sollen alle in Betracht zu ziehenden Curven mit der gesuchten Curve sowohl

1) den Anfangspunkt (a, b, c) und den Endpunkt (α, β, γ), als auch
2) die zu diesen beiden Punkten gehörigen Berührungslinien gemeinschaftlich haben;

so finden zwischen der gesuchten und allen hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende acht Gleichungen statt:

$$1)\quad y_a = y_a + \varkappa\cdot\delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y_a + \ldots\ldots$$

$$2)\quad z_a = z_a + \varkappa\cdot\delta z_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 z_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 z_a + \ldots\ldots$$

$$3)\quad y_\alpha = y_\alpha + \varkappa\cdot\delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y_\alpha + \ldots\ldots$$

$$4)\quad z_\alpha = z_\alpha + \varkappa\cdot\delta z_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 z_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 z_\alpha + \ldots\ldots$$

$$5)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \left(\frac{dy}{dx}\right)_a + \varkappa\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d\delta^3 y}{dx}\right)_a + \ldots\ldots$$

$$6)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_a = \left(\frac{dz}{dx}\right)_a + \varkappa\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d\delta^3 z}{dx}\right)_a + \ldots\ldots$$

$$7)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha + \varkappa\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d\delta^3 y}{dx}\right)_\alpha + \ldots\ldots$$

$$8)\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha = \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha + \varkappa\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d\delta^3 z}{dx}\right)_\alpha + \ldots\ldots$$

d. h. es ist $\delta y_a = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, etc. etc. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg.

Sind nun Anfangs- und Endpunkt der gesuchten Curve fest vorgeschrieben, so müssen die Werthe der Coordinaten a, b, c, α, β, γ auch fest vorgeschrieben sein, d. h. man hat die Gleichungen

$$9)\quad y_a = b,\qquad 10)\quad z_a = c,\qquad 11)\quad y_\alpha = \beta,\qquad 12)\quad z_\alpha = \gamma$$

Ist auch die Lage der beiden zu den Gränzpunkten gehörigen Berührungslinien fest

Digitized by Google

vorgeschrieben, so müssen auch die Werthe der Ausdrücke $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha$ fest vorgeschrieben sein; und wenn man diese Werthe bezüglich mit l, m, λ, μ bezeichnet, so hat man noch weiter die Gleichungen

$$13)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = l,\quad 14)\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_a = m,\quad 15)\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = \lambda,\quad 16)\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha = \mu$$

Die acht Gleichungen 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 reichen hin zur Bestimmung der acht willkürlichen Constanten. Ferner geht Gleichung XIII jetzt über in

$$\text{XIV)}\quad U' = \frac{1}{4}\cdot[A\cdot(\beta - b) + B\cdot(\gamma - c) + C\cdot(\alpha - a)]$$

Je nach den verschiedenen Werthen, welche man für b, β, c, γ, l, λ, m, μ vorschreibt, werden sich auch verschiedene Werthe für A, B, C, E, F, G, H, K ergeben; und so kann es sich auch einmal treffen, dass gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$, $E = 0$ wird. In diesem Falle reduciren sich die Gleichungen XI und XII bezüglich auf

$$\text{XV)}\quad 2\cdot(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^2 = C\cdot\sqrt{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2}$$

$$\text{XVI)}\quad p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q = 0$$

Integrirt man XVI, so bekommt man

$$\text{XVII)}\quad z = H\cdot y + K$$

welches die Gleichung der auf der Coordinatenebene YZ senkrechten Ebene ist. Aus XVII folgt

$$\mathfrak{p} = H\cdot p, \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{q} = H\cdot q$$

Eliminirt man $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aus XV, so bekommt man

$$\text{XVIII)}\quad 2\cdot(1 + (1 + H^2)\cdot p^2)^2 = C\cdot\left(\sqrt{1 + H^2}\right)\cdot q$$

Daraus folgt

$$\text{XIX)}\quad dx = \frac{C\cdot\sqrt{1 + H^2}}{2}\cdot\frac{dp}{(1 + (1 + H^2)\cdot p^2)^2}$$

und wenn man diese Gleichung mit $\frac{dy}{dx} = p$ multiplicirt, so gibt sich

$$\text{XX)}\quad dy = \frac{C\cdot\sqrt{1 + H^2}}{2}\cdot\frac{p\cdot dp}{(1 + (1 + H^2)\cdot p^2)^2}$$

Integrirt man die beiden letzten Gleichungen, so gibt sich bezüglich

$$\text{XXI)}\quad x = F + \frac{C}{4}\cdot\left(\frac{p\cdot\sqrt{1 + H^2}}{1 + (1 + H^2)\cdot p^2} + \operatorname{arc\,tg}\left(p\cdot\sqrt{1 + H^2}\right)\right)$$

und

$$\text{XXII)}\quad y = G + \frac{C}{4}\cdot\frac{p^2\cdot\sqrt{1 + H^2}}{1 + (1 + H^2)\cdot p^2}$$

Unsere Curve ist also durch drei Gleichungen (XVII, XXI und XXII) gegeben. Sie ist eine Cycloide, wie aus den zwei letzten Gleichungen hervorgeht.

Es ist scheinbar, als hätte man nur die fünf Constanten H, K, C, F, G, zu deren Bestimmung acht Gleichungen (Nr. 9 bis 16) beständen. Die Wirklichkeit ist: Man hat in der That acht Constanten, und die Werthe von b, β, c, γ, l, λ, m, μ sind so beschaffen, dass $A = 0$, $B = 0$, $E = 0$ wird, wenn den acht Gleichungen (Nr. 9 bis 16) genügt werden soll.

Hätte man $\mathfrak{p} = H\cdot p$ und $\mathfrak{q} = H\cdot q$ in die Gleichungen V und VI substituirt, und dabei $A = 0$ und $B = 0$ beachtet; so hätte man bezüglich bekommen

$$\frac{1}{\sqrt{1 + H^2}}\cdot\left[\frac{4p\cdot[1 + (1 + H^2)\cdot p^2]}{q} + \frac{1}{1 + H^2}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1 + (1 + H^2)\cdot p^2}{q}\right)^2\right] = 0$$

und

$$\frac{H}{\sqrt{1 + H^2}}\cdot\left[\frac{4p\cdot[1 + (1 + H^2)\cdot p^2]}{q} + \frac{1}{1 + H^2}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1 + (1 + H^2)\cdot p^2}{q}\right)^2\right] = 0$$

Digitized by Google

Aus diesen beiden Gleichungen aber folgt nur die einzige

$$\frac{4p\cdot[1+(1+H^2)\cdot p^2]}{q}+\frac{1}{1+H^2}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1+(1+H^2)\cdot p^2}{q}\right)^2=0$$

Man führe die angedeutete Differentiation aus, multiplicire Alles mit q, und setze dann dp statt $q\cdot dx$; so bekommt man

$$\frac{2\cdot[1+(1+H^2)\cdot p^2]}{q}\cdot 4\,(1+H^2)\cdot p\cdot dp-\frac{2\cdot[1+(1+H^2)\cdot p^2]^2}{q^2}\cdot dq=0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\frac{2\cdot[1+(1+H^2)\cdot p^2]^2}{q}=L$$

wo L der durch die Integration eingegangene Constante ist. Setzt man $C\cdot\sqrt{1+H^2}$ statt L, so geht letztere Gleichung über in

$$2\cdot(1+(1+H^2)\cdot p^2)^2=C\cdot\left(\sqrt{1+H^2}\right)\cdot q$$

was genau wieder Gleichung XVIII ist.

Zweiter Fall. Hinsichtlich des Ortes der beiden Gränzpunkte sei keine Vorschrift gemacht; dagegen sollen die zu den Abscissen a und α gehörigen Berührungslinien aller in Betracht zu ziehenden Curven parallel laufen mit den betreffenden Berührungslinien der gesuchten Curve.

Wenn zwei Linien parallel sind, so sind auch ihre Projectionen parallel, schliessen also mit der Abscissenaxe gleichgrosse Winkel ein.

Desshalb schliessen die in der Coordinatenebene XY liegenden Projectionen unserer zur Abscisse a gehörigen Berührenden alle mit der Abscissenaxe einen gleichgrossen Winkel ein, d. h. es muss wieder Gleichung 5 stattfinden. Ferner schliessen auch die in der Coordinatenebene XZ liegenden Projectionen unserer zur Abscisse a gehörigen Berührenden alle mit der Abscissenaxe einen gleichgrossen Winkel ein, d. h. es muss auch wieder Gleichung 6 stattfinden.

Ebenso beweist man, dass auch die Gleichungen 7 und 8 stattfinden müssen. Es ist also $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a=0$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a=0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha=0$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha=0$, etc. Die Gränzengleichung VII wird also nur erfüllt, wenn $A=0$ und $B=0$ ist. Die Gleichungen XI und XII reduciren sich aber auf

$$\text{XXIII)}\quad 2\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^2=C\cdot\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}$$

und

$$\text{XXIV)}\quad (p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)\cdot(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^3=E\cdot[(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2]^{\frac{3}{2}}$$

Ist nun die Richtung der beiden zu den Gränzpunkten gehörigen Berührungslinien fest vorgeschrieben, so müssen auch die Werthe der vier Ausdrücke $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha$ fest vorgeschrieben sein; und wenn man diese Werthe bezüglich mit l, m, λ, μ bezeichnet, so hat man wieder die Gleichungen 13, 14, 15, 16.

Von den acht Constanten A, B, C, E, F, G, H, K sind $A=0$ und $B=0$. Zur Bestimmung der übrigen sechs hat man aber nur vier Gleichungen (Nr. 13 bis 16), so dass zwei unbestimmt bleiben, wenn nicht noch neue Bedingungen hinzukommen.

Wegen Gleichung XXIII reducirt sich jetzt Gleichung I auf

$$\text{XXV)}\quad U'=\frac{C}{4}(\alpha-a)$$

d. h. der Werth des U' ist unabhängig von den fünf Constanten E, F, G, H, K.

Gleichung XXIII lässt sich auch auf folgende Weise umsetzen:

$$\text{XXVI)}\quad \frac{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}}=\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}$$

Digitized by Google

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$ sowohl der Cosinus des von der Berührungslinie und der Abscissenaxe, als auch der Sinus des von der Berührungslinie und der Coordinatenebene YZ gebildeten Winkels. Durch Gleichung XXVI ist also von der in diesem zweiten Falle gesuchten räumlichen Curve, die wir bis jetzt noch nicht einmal kennen, ausgesprochen, dass sie in ihrer ganzen Ausdehnung folgende Eigenschaft habe:

„Die Krümmungshalbmesser verhalten sich, wie die Cosinus der von der Be-
„rührungslinie und der Abscissenaxe gebildeten Winkel",

oder, was dasselbe ist:

„Die Krümmungshalbmesser verhalten sich, wie die Sinus der von der Berüh-
„rungslinie und der Coordinatenebene YZ gebildeten Winkel."

Dritter Fall. Ist für die Gränzpunkte durchaus keine Vorschrift gemacht, so kann Gleichung VII nur erfüllt werden, wenn einzeln stattfindet

$$17)\quad A = 0,\qquad 18)\quad ((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)_\alpha = 0,\qquad 19)\quad ((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)_a = 0$$

$$20)\quad B = 0,\qquad 21)\quad ((\mathfrak{p}q - \mathfrak{p}q)\,p + \mathfrak{q})_\alpha = 0,\qquad 22)\quad ((\mathfrak{p}q - \mathfrak{p}q)\,q + \mathfrak{q})_a = 0$$

Bei den Gleichungen 18 und 21 hat man den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{R^2}{Q^3}\right)_\alpha$, und bei den Gleichungen 19 und 22 hat man den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{R^2}{Q^3}\right)_a$ weggelassen.

Von den acht Constanten A, B, C, E, F, G, H, K sind $A = 0$ und $B = 0$. Zur Bestimmung der übrigen sechs hat man aber nur vier Gleichungen (Nr. 18 bis 22), so dass zwei unbestimmt bleiben, wenn nicht noch neue Bedingungen hinzukommen.

Uebrigens hat die in diesem dritten Falle gefundene Curve die nemliche Eigenschaft, welche bereits durch Gleichung XXVI ausgesprochen ist.

Andere Gränzbedingungen, namentlich solche, bei denen zwischen den Gränzelementen y_a, y_α, z_a, z_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha$ eine oder mehrere Abhängigkeiten stattfinden, kann man (nach dem Vorgange früherer Aufgaben) beliebig viele aufstellen.

Aufgabe 184.

Man sucht die kürzeste Linie, welche auf einer durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 1$$

gegebenen Ebene zwischen zwei zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen Punkten gezogen werden kann.

Die Aufgabe ist also: Es soll

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen von x nur aus denen herausgewählt werden dürfen, welche zusammen die Gleichung I identisch machen. Man erkennt gradezu, dass die Aufgabe mit gleicher Bequemlichkeit durchgeführt werden kann, es mag y oder z als das mittelbar mutable Element behandelt werden. Man behandle z als mittelbar mutabel. Ferner hat (nach Einleitung zur 175sten Aufgabe) das Radical nur seine positive Bedeutung.

Erste Auflösung.

Man eliminire z und $\mathfrak{p}$ schon vor dem Mutiren. Aus I folgt

$$z = \frac{1}{C} \cdot (1 - A \cdot x - B \cdot y)$$

somit ist

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{C} \cdot (-A - B \cdot p)$$

Digitized by Google

und Gleichung II geht über in

$$\text{III)}\quad U = \frac{1}{C} \cdot \int_a^\alpha \left(\sqrt{A^2 + C^2 + 2 \cdot AB \cdot p + (B^2 + C^2) \cdot p^2}\right) \cdot dx$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung Q anstatt $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cdot p + (B^2 + C^2) \cdot p^2}$; so bekommt man zunächst

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{C} \cdot \int_a^\alpha \frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

Wenn man nun diese erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will; so forme man um, und man bekommt für die zweite Form folgenden Ausdruck:

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$- \frac{1}{C} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VI)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VII)}\quad \left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot p}{Q}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Führt man die in VI angedeutete Differentiation aus, so bekommt man $C^2 \cdot (A^2 + B^2 + C^2) \cdot dp = 0$, d. h. es ist

$$\text{VIII)}\quad dp = 0$$

Daraus folgt $p = E$, und

$$\text{IX)}\quad y = E \cdot x + F$$

d. h. man hat die grade Linie, wie zu erwarten war; und weil $p = E$, so geht die Gränzengleichung VII über in

$$\text{X)}\quad \frac{A \cdot B + (B^2 + C^2) \cdot E}{\sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot AB \cdot E + (B^2 + C^2) \cdot E^2}} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der beiden Constanten E und F benützt werden muss. Dass man aber jetzt nur zwei willkürliche Constanten hat, und nicht vier, wie in Aufgabe 175; das ist ein bemerkenswerther Umstand. (Man vergleiche §. 245.)

Mutirt man Gleichung IV noch einmal, so bekommt man nach der gehörigen Umformung

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \frac{AB + (B^2 + C^2) \cdot E}{C \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cdot E + (B^2 + C^2) \cdot E^2}} \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a)$$
$$+ \frac{C \cdot (A^2 + B^2 + C^2)}{[A^2 + B^2 + 2AB \cdot E + (B^2 + C^2) \cdot E^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Das Radical ist gleich anfangs als positiv vorausgesetzt worden; also darf es auch hier nur als positiv gebraucht werden.

Erster Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XII und XIII folgt, dass bei jedem Werthe des x, bei welchem man δy und $\delta^2 y$ zu Null werden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden. Somit ist in diesem Falle auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Digitized by Google

Gleichung I geht an den Gränzen über in

$$1)\quad A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 1, \quad \text{und } 2)\quad A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot \gamma = 1$$

Gleichung IX geht an den Gränzen über in

$$3)\quad b = E \cdot a + F, \quad \text{und } 4)\quad \beta = E \cdot \alpha + F$$

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 reichen also hin, die vier Stücke E, F, $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ zu bestimmen. Zugleich erkennt man, dass, weil schon b und β vorgeschrieben sind, nicht auch noch die Werthe von $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ beliebig vorgeschrieben werden können, sondern so hingenommen werden müssen, wie sie sich ergeben.

Zweiter Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien nur den Anfangspunkt (a, b, c) miteinander gemein haben; so kann auch nur der Werth von y_a bestimmt vorgeschrieben werden, dagegen über den Werth von y_α kann man nicht beliebig verfügen. Hier ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc.; dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. können nicht zu Null werden.

(Weil $\delta y_a = 0$ und $\delta^2 y_a = 0$ ist, so werden auch $\delta z_a = 0$ und $\delta^2 z_a = 0$; dagegen δz_α und $\delta^2 z_\alpha$ werden nicht zu Null, eben weil auch δy_α und $\delta^2 y_\alpha$ nicht zu Null werden. Alles dieses sind Folgen der Gleichungen XII und XIII.)

Weil δy_α nicht zu Null wird, so fällt die Gränzengleichung X nur hinweg, wenn

$$5)\quad A \cdot B + (B^2 + C^2) \cdot E = 0$$

stattfindet. Ausserdem hat man noch die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 des vorigen Falles, d. h. man hat jetzt fünf Gleichungen, welche zur Bestimmung der fünf Stücke E, F, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$, $\gamma = z_\alpha$ benützt werden, während a, α und $b = y_a$ gegeben sind. Es bleibt also auch in diesem zweiten Falle kein Stück der Aufgabe unbestimmt. Aus Gleichung 5 folgt $E = -\frac{AB}{B^2 + C^2}$; und man hat jetzt

$$y = -\frac{AB}{B^2 + C^2} \cdot x + F, \quad \text{und} \quad z = -\frac{A \cdot C}{B^2 + C^2} \cdot x + \frac{1 - B \cdot F}{C}$$

als die Gleichungen der gesuchten Graden, wo nur noch F bestimmt werden muss.

Dritter Fall. Ist weder hinsichtlich des Anfangspunktes noch hinsichtlich des Endpunktes aller in Betracht zu ziehenden Linien etwas vorgeschrieben; so hat man jetzt die fünf Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5, welche bei Bestimmung der sechs Stücke E, F, $b = y_a$, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$, $\gamma = z_\alpha$ benützt werden müssen, während a und α gegeben sind. Aber eben, weil nur fünf Gleichungen gegeben sind zur Bestimmung jener sechs Stücke; so bleibt eines davon unbestimmt, wenn nicht noch eine andere Bedingung hinzukommt.

Und so fort.

(Man vergleiche die Gränzfälle in der 188sten Aufgabe, wo drei willkürliche Constanten, und ebenso die Gränzfälle in der 191sten Aufgabe, wo vier willkürliche Constanten vorkommen.)

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire alsdann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus I folgt

$$\text{XII)}\quad B \cdot \delta y + C \cdot \delta z = 0, \qquad \text{XIII)}\quad B \cdot \delta^2 y + C \cdot \delta^2 z = 0$$

$$\text{XIV)}\quad B \cdot \frac{d\delta y}{dx} + C \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

Man mutire auch Gleichung II, und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$. Wenn man nun die erste Form des δU nicht weiter beachten will, so forme man um; und man bekommt für die zweite folgenden Ausdruck

$$\text{XV)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Digitized by Google

und

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[- \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 y - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 z$$
$$+ \frac{1}{u^3} \cdot \left(\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\Big] \cdot dx$$

Aus XII folgt $\delta z = -\frac{B}{C} \cdot \delta y$. Man eliminire δz aus XV, so bekommt man

$$\text{XVII)}\quad \delta U = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{C \cdot p - B \cdot \mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{B \cdot p - C \cdot \mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$- \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \frac{B}{C} \cdot \frac{1}{dx} \cdot \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{XVIII)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \frac{B}{C} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

Wenn man die angedeuteten Differentiationen ausführt, und hierauf das C aus dem Nenner wegmultiplicirt; so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad C \cdot (1 + \mathfrak{p}^2) \cdot dp - Cp \cdot \mathfrak{p} \cdot d\mathfrak{p} - B \cdot (1 + p^2) \cdot d\mathfrak{p} + Bp\mathfrak{p} \cdot dp = 0$$

Nun differentiire man auch Gleichung I, so bekommt man zunächst $A + B \cdot p + C \cdot \mathfrak{p} = 0$; und daraus folgt weiter $B \cdot dp + C \cdot d\mathfrak{p} = 0$. Eliminirt man $\mathfrak{p}$ und $d\mathfrak{p}$ aus XIX, so bekommt man $(A^2 + B^2 + C^2) \cdot dp = 0$, d. h. man hat wieder $dp = 0$, und $y = E \cdot x + F$, welche Gleichung noch mit $Ax + By + Cz = 1$ verbunden werden muss. Aus XVII folgt auch die Gränzengleichung

$$\left(\frac{Cp - B\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{Cp - B\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Es ist also Alles, wie bei der ersten Auflösung. Nun eliminire man noch $\delta^2 z$ und $\frac{d\delta z}{dx}$ aus XVI, was mittelst der Gleichungen XIII und XIV geschieht; und man bekommt genau wieder den in XI aufgestellten Ausdruck.

Gränzfälle, wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Will man die mittelbaren Mutationscoefficienten lieber mittelst eines Multiplicators eliminiren, so forme man Gleichung I um in folgende identische

$$\text{XX)}\quad Ax + By + Cz - 1 = 0$$

und multiplicire diese mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; dann ist das Product $L \cdot (Ax + By + Cz - 1)$ auch noch eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXI)}\quad U = \int_a^\alpha \left[L \cdot (Ax + By + Cz - 1) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right] \cdot dx$$

Man mutire, und führe, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form folgenden Ausdruck

$$\text{XXII)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(L \cdot B - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(L \cdot C - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Nun soll das mittelbare δz unter dem Integralzeichen nicht vorkommen. Man denke

Digitized by Google

sich also unter L eine solche Function von x, dass der bei δz befindliche Factor zu Null wird, d. h. dass die identische Gleichung

$$\text{XXIII)}\quad L \cdot C - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfindet. Eliminirt man noch mittelst XII das ausserhalb des Integralzeichens stehende δz; so geht jetzt XXII über in

$$\text{XXIV)}\quad \delta U = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{Cp - B\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{Cp - B\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[L \cdot B - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{XXV)}\quad L \cdot B - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXVI)}\quad \left(\frac{C \cdot p - B \cdot \mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{C \cdot p - B \cdot \mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Aus XXIII und XXV eliminire man L, so gibt sich

$$\text{XXVII)}\quad C \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - B \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

Dieses ist aber genau wieder Gleichung XVIII. Man hat also auf dieselbe Weise weiter zu verfahren, wie bei der zweiten Auflösung. Man wird dann $y = E \cdot x + F$ bekommen, welche Gleichung noch mit $Ax + By + Cz = 1$ verbunden werden muss. Man mutire nochmals, und forme um; so bekommt man zunächst

$$\text{XXVIII)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(L \cdot B - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 y + \left(L \cdot C - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 z\right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^3} \cdot \left(\left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Berücksichtigt man aber die Gleichungen XXIII und XXV, und eliminirt man noch $\delta^2 z$ ausserhalb sowie $\frac{d\delta z}{dx}$ unterhalb des Integralzeichens, was mittelst XIII und XIV geschieht; so bekommt man genau wieder den in XI aufgestellten Ausdruck.

Gränzfälle, wie bei der ersten Auflösung.

Vierte Auflösung

Man differentiire vor Allem Gleichung I, so bekommt man die totale Differentialgleichung

$$\text{XXIX)}\quad A + B \cdot p + C \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Diese multiplicire man mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von x; dann ist das Product $M \cdot (A + B \cdot p + C \cdot \mathfrak{p})$ auch noch eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXX)}\quad U = \int_a^\alpha \left[M \cdot (A + B \cdot p + C \cdot \mathfrak{p}) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right] \cdot dx$$

Man mutire, und führe, wenn man die erste Form des δU nicht berücksichtigen will, die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form folgenden Ausdruck

$$\text{XXXI)}\quad \delta U = \left(M \cdot B + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(M \cdot C + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$
$$- \left(M \cdot B + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(M \cdot C + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a -$$

Digitized by Google

$$-\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)\right)\cdot \delta y+\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(M\cdot C+\frac{p}{u}\right)\right)\cdot \delta z\right]\cdot dx$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XXXII)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(M\cdot C+\frac{p}{u}\right)=0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 320) zwei der eingehenden Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XXXIII)}\quad \left(M\cdot C+\frac{p}{u}\right)_\alpha=0,\quad \text{und XXXIV)}\quad \left(M\cdot C+\frac{p}{u}\right)_a=0$$

stattfinden. Gleichung XXXI reducirt sich also auf

$$\delta U=\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha-\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a-\int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta y\,.\,dx$$

Somit hat man die Hauptgleichung

$$\text{XXXV)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)=0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXXVI)}\quad \left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha-\left(M\cdot B+\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a=0$$

Führt man die in XXXII und XXXV angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man bezüglich

$$C\cdot\frac{dM}{dx}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0,\quad \text{und}\quad B\cdot\frac{dM}{dx}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0$$

Man eliminire $\frac{dM}{dx}$ aus diesen beiden Gleichungen, so gibt sich

$$\text{XXXVII)}\quad C\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)-B\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0$$

Aus XXXIII und XXXIV folgt

$$M_\alpha=-\frac{1}{C}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\quad\text{und}\quad M_a=-\frac{1}{C}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_a$$

Wenn man nun M_α und M_a aus XXXVI eliminirt, und den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{C}$ weglässt; so bekommt man genau wieder Gleichung XXVI.

Man mutire Gleichung XXX noch einmal, forme um, beachte die Gleichungen XXXII bis XXXV, und eliminire noch $\frac{d\delta z}{dx}$, was mittelst Gleichung XIV geschieht; so bekommt man genau wieder den Ausdruck XI.

Gränzfälle, wie bei der ersten Auflösung.

Diese vierte Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function M kennen zu lernen. In dieser Hinsicht vergleiche man den Schluss des §. 254. Uebrigens hatte man hier eine von den in §. 255 bezeichneten Specialitäten.

Diese Aufgabe ist allerdings mit vieler Weitläufigkeit durchgeführt; allein nur aus dem Grunde, weil es höchst instructiv ist, zu zeigen, wie die verschiedensten Methoden zu den nemlichen Resultaten führen. Desshalb sollen die zwei folgenden Aufgaben gleichfalls mit vier verschiedenen Auflösungen durchgeführt werden.

Aufgabe 185.

Es ist ein auf der Coordinatenebene XZ senkrecht stehender Cylinder gegeben; und man sucht die kürzeste Linie, welche zwischen zwei zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen Punkten dieses Cylinders gezogen werden kann.

Digitized by Google

Der hier in Rede stehende Cylinder habe die Gleichung $F(x, z) = 0$; und somit ist die jetzige Aufgabe: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + p^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während z eine solche Function von x sein muss, dass dabei die Gleichung

$$\text{II)}\quad F(x, z) = 0$$

identisch wird.

Erste Auflösung.

Man eliminire p schon vor dem Mutiren. Zu diesem Ende sondere man vor Allem das z aus $F(x, z) = 0$ ab, so dass man $z = \varphi(x)$ bekommt. Daraus folgt $p = \frac{d\varphi(x)}{dx}$; und I geht über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

Nun ist $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ ein ganz bestimmter Ausdruck, welcher keine Mutation erleiden kann: und sonach folgt aus III nur

$$\delta U = \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot dx$$

Daraus folgt nach der gehörigen Umformung

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Wenn man nun die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, so wende man sich sogleich an die zweite; und daraus ergibt sich folgende Hauptgleichung:

$$\text{V)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}}\right) = 0$$

Wenn man integrirt, so gibt sich

$$\text{VI)}\quad \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}} = A$$

Diese Gleichung kann man erst dann weiter integriren, wenn man weiss, was $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ für eine Function von x ist. Wegen Gleichung VI hat man als Gränzengleichung

$$\text{VII)}\quad A \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der Constanten mitbenützt werden muss.

Aus VI folgt also für y eine Function, in welche zwei willkürliche Constanten eingehen; und weiter gibt es keinen willkürlichen Constanten mehr, da z eine ganz bestimmte Function ist.

Dass man aber hier nur zwei willkürliche Constanten hat, und nicht vier, wie in Aufgabe 175; ist ein bemerkenswerther Umstand. (Man sehe §. 245.)

Man mutire noch einmal, forme um, und berücksichtige alles Vorhergehende: so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = A\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \int_a^\alpha \frac{1+\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2}{\left(1+p^2+\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Das Radical $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$ ist nur positiv, also ist auch $\delta^2 U$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Mutirt man also I, und setzt man dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx$$

und

$$\text{X)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \left[\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx} + \frac{1}{u^3}\cdot\left(\left(\mathfrak{p}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - p\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

etc. Aus II aber folgt $\frac{d_z F(x,z)}{dz}\cdot\delta z = 0$, und $\frac{d_z F(x,z)}{dz}\cdot\delta^2 z + \frac{d_z^2 F(x,z)}{dz^2}\cdot\delta z^2 = 0$. Weil $F(x,z) = 0$ eine identische Function ist, so sind auch die totalen Differentialquotienten $\frac{dF(x,z)}{dx} = 0$, $\frac{d^2F(x,z)}{dx^2} = 0$, etc., d. h. auch sie sind identische Functionen von x; dagegen die partiellen Differentialquotienten $\frac{d_z F(x,z)}{dz}$, $\frac{d_z^2 F(x,z)}{dz^2}$, etc. können keineswegs zu Null werden. Die erste der obigen zwei Gleichungen ist also nur möglich, wenn

$$\text{XI)}\quad \delta z = 0$$

d. h. eine identische Function ist. Dabei reducirt die zweite der obigen Gleichungen sich auf $\frac{d_z F(x,z)}{dz}\cdot\delta^2 z = 0$; und diese Gleichung ist wieder nur möglich, wenn auch

$$\text{XII)}\quad \delta^2 z = 0$$

d. h. gleichfalls eine identische Function ist. Und so fort. Alles dieses hat aber darin seinen Grund, dass z selbst eine ganz bestimmte Function von x ist, also nicht mutirt werden kann. Da aber δz, $\delta^2 z$, etc. identische Functionen sind, so sind auch $\frac{d\delta z}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 z}{dx} = 0$, etc., d. h. gleichfalls identische Functionen; und die Gleichungen IX und X reduciren sich auf

$$\text{XIII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot dx$$

und

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\cdot\left[p\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{1+\mathfrak{p}^2}{1+p^2+\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will; so forme man um, und es ergibt sich für die zweite Form

$$\text{XV)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{XVI)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

und indem man integrirt, bekommt man wieder

Digitized by Google

$$\text{XVII)} \quad \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p^2}} = A$$

Man hat nun p mittelst $F(x, z) = 0$ zu eliminiren, und erst dann kann man die Integration vollenden, wobei sich y als Function mit einem weiteren willkürlichen Constanten B ergibt. Bei Bestimmung der beiden Constanten muss die Gränzengleichung, welche auch jetzt die Form

$$\text{XVIII)} \quad A \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

annimmt, noch mitbenützt werden. Formt man XIV um, und beachtet man die Hauptgleichung; so bleibt nur

$$\text{XIX)} \quad \delta^2 U = A \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \int_a^\alpha \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Also Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Will man lieber mittelst eines Multiplicators eliminiren, so multiplicire man die identische Gleichung $F(x, z) = 0$ mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; dann ist auch das Product $L \cdot F(x, z)$ noch eine identische Gleichung. Man kann es also unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XX)} \quad U = \int_a^\alpha \left(L \cdot F(x, z) + \sqrt{1 + p^2 + p^2}\right) \cdot dx$$

Man mutire, und setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2 + p^2}$. Wenn man dann die erste Form des δU nicht weiter beachten will, so bekommt man für die zweite

$$\text{XXI)} \quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(L \cdot \frac{d_z F(x, z)}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Nun soll das mittelbare δz unter dem Integralzeichen nicht vorkommen; man denke sich also unter L eine solche Function von x, dass der bei δz befindliche Factor zu Null wird, d. h. dass die identische Gleichung

$$\text{XXII)} \quad L \cdot \frac{d_z F(x, z)}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

stattfindet. Eliminirt man noch mittelst XI das ausserhalb des Integralzeichens befindliche δz; so reducirt sich XXI, weil δz eine identische Function von x ist, auf

$$\text{XXIII)} \quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Dieses ist aber wieder ganz die Gleichung XV; sie wird also zerfällt, wie bei der vorigen Auflösung. Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen XVI und XXII; so bleibt zunächst

$$\text{XXIV)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[L \cdot \frac{d_z^2 F(x, z)}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \frac{1}{u^3} \cdot \left(\left(p \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Nun hat man das ausserhalb des Integralzeichens stehende $\delta^2 z$, und ebenso die unterhalb des Integralzeichens stehenden Ausdrücke δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen XI und XII geschieht. Dort steht aber, δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$, etc. seien identische Functionen; und somit reducirt sich XXIV auf XIX.

Digitized by Google

Vierte Auflösung.

Man differentiire zuerst Gleichung II, so bekommt man die totale Differentialgleichung

$$\text{XXV)}\quad \frac{d_xF}{dx} + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Diese multiplicire man mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von x; so ist auch das Product $M \cdot \left(\frac{d_xF}{dx} + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{p}\right)$ eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXVI)}\quad U = \int_a^\alpha \left[M \cdot \left(\frac{d_xF}{dx} + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{p}\right) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right] \cdot dx$$

Man mutire, und führe, wenn man die erste Form des δU nicht berücksichtigen will, die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form

$$\text{XXVII)}\quad \delta U =$$

$$\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(M \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(M \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(-\frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{dM}{dx} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx\,.$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittlere δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 320) zwei der eingehenden vier Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XXIX)}\quad \left(M \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha = 0, \quad \text{und XXX)}\quad \left(M \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a = 0$$

stattfinden. Gleichung XXVII reducirt sich also auf

$$\delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

was wieder genau Gleichung XV ist. Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen XXVIII bis XXX; so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \left[M \cdot \frac{d\left(\frac{d_zF}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z^2\right.$$

$$\left. + 2M \cdot \frac{d_zF}{dz} \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \frac{1}{u^3} \cdot \left(\left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Da aber (man sehe Gleichung XI) der Ausdruck δz schon identisch Null ist, so ist auch $\frac{d\delta z}{dx}$ schon identisch Null; und es bleibt nur

$$\text{XXXI)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{1 + \mathfrak{p}^2}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

was genau wieder der Ausdruck VIII oder XIX ist.

Die vierte Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function M kennen zu lernen. (In dieser Hinsicht vergleiche man den Schluss des §. 254. Auch lese man die Anmerkung in Bd. I. S. 321.)

Erstes Beispiel. Ist der gegebene Cylinder ein circulärer mit der Gleichung $x^2 + z^2 = r^2$; so folgt daraus $\mathfrak{p} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Somit kann man aus den Gleichungen VI oder XVII entwickeln

Digitized by Google

$$p = \frac{A \cdot r}{\sqrt{1 - A^2}} \cdot \frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XXXII)} \quad y = B + \frac{A \cdot r}{\sqrt{1 - A^2}} \cdot \text{arc sin} \frac{x}{r}$$

Diese Gleichung, verbunden mit $x^2 + z^2 = r^2$, gibt die Projectionen der gesuchten Linie, wobei, wie schon öfters gesagt, nur zwei willkürliche Constanten, nemlich A und B vorkommen. Wird die Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt, so ist klar, dass die gesuchte Curve auch jetzt noch unter allen zwischen den beiden (gegebenen oder nichtgegebenen) Punkten die kürzeste ist, also sich als grade Linie aufträgt. Die kürzeste Linie auf der Cylinderfläche ist somit eine Schraubenlinie, in einigen Fällen ist sie auch ein mit der Grundfläche paralleler Kreis.

Erster Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XI und XII folgt, dass bei jedem Werthe des x die Ausdrücke δz und $\delta^2 z$ zu Null werden; somit ist auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$. $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Die Gleichung der Cylinderfläche geht an den Gränzen über in

$$1) \quad a^2 + c^2 = r^2, \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \alpha^2 + \gamma^2 = r^2$$

Die Gleichung XXXII geht an den Gränzen über in

$$3) \quad b = B + \frac{A \cdot r}{\sqrt{1 - A^2}} \cdot \text{arc sin} \frac{a}{r}, \quad \text{und} \quad 4) \quad \beta = B + \frac{A \cdot r}{\sqrt{1 - A^2}} \cdot \text{arc sin} \frac{\alpha}{r}$$

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Die Gleichungen 1, 2, 3, 4 reichen also hin, die vier Stücke A, B, c, γ zu bestimmen. Zugleich erkennt man, dass man die Werthe von $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ nicht auch beliebig vorschreiben kann, sondern dass diese sich aus den Gleichungen 1 und 2 ergeben.

Zweiter Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien nur den Anfangspunkt (a, b, c) gemeinschaftlich haben; so kann auch nur der Werth von y_a bestimmt vorgeschrieben werden, dagegen über den Werth von y_α kann man nicht beliebig verfügen. Hier ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc., dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. müssen nicht zu Null werden. Die Gränzengleichung wird also nur erfüllt, wenn $A = 0$ ist. Dabei geht Gleichung XXXII über in

$$\text{XXXIII)} \quad y = B$$

d. h. y ist constant, und die gesuchte kürzeste Linie ist eine mit der Grundfläche parallele Kreislinie.

Die Gleichung der Cylinderfläche geht an den Gränzen über in

$$5) \quad a^2 + c^2 = r^2, \qquad \text{und} \qquad 6) \quad \alpha^2 + \gamma^2 = r^2$$

Die Gleichung XXXIII geht an den Gränzen über in

$$7) \quad b = B, \qquad \text{und} \qquad 8) \quad B = \beta$$

Nun sind a, α und $b = y_a$ gegeben. Die Gleichungen 5, 6, 7, 8 reichen also hin, die vier Stücke B, β, c, γ zu bestimmen. Zugleich erkennt man, dass man die Werthe von $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ nicht auch beliebig vorschreiben kann, sondern dass diese sich aus den Gleichungen 5 und 6 ergeben.

Dritter Fall. Ist hinsichtlich der Gränzpunkte nichts vorgeschrieben, sondern nur gesagt, dass die gesuchte Linie zwischen den zu $x = a$ bis $x = \alpha$ gehörigen Gränzordinaten genommen werden soll; so ist wieder $A = 0$, und

Digitized by Google

$$\text{XXXIV)}\quad y = B$$

d. h. y ist constant, und die gesuchte Linie mit der Grundfläche parallel. Da aber zur Bestimmung von B keine Bedingung vorhanden ist, so kann man die gesuchte Linie in jeder beliebigen Entfernung von der Grundfläche nehmen, also auch in der Grundfläche selbst.

(Man vergleiche die Gränzfälle in der 188sten Aufgabe, wo drei willkürliche Constanten, und ebenso die Gränzfälle in der 191sten Aufgabe, wo vier willkürliche Constanten vorkommen.)

Zweites Beispiel. Ist der gegebene Cylinder ein parabolischer mit der Gleichung $x^2 = m \cdot z$; so folgt daraus $\mathfrak{p} = \frac{2x}{m}$. Aus den Gleichungen VI oder XVII kann man also entwickeln

$$p = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{m}\right)^2}$$

Daraus gibt sich durch Integration

$$\text{XXXV)}\quad y = \frac{A}{2 \cdot \sqrt{1 - A^2}} \cdot \left[x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{m}\right)^2} + \frac{m}{2} \cdot \lg\text{nat}\left(\frac{2x}{m} + \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{m}\right)^2}\right)\right] + E$$

Diese Gleichung, verbunden mit $x^2 = mz$, gibt die Projectionen der gesuchten Curve, wobei wieder nur zwei willkürliche Constanten vorkommen.

Wird auch diese Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt, so ist klar, dass auch jetzt die gesuchte kürzeste Linie sich als eine Grade auf diese Ebene aufträgt.

In der folgenden Aufgabe kommt noch eine Abwickelung vor. Das Abwickelungsproblem wird ganz allgemein vorgetragen werden in der 292sten Aufgabe.

Der Grund, warum auch diese Aufgabe mit vier verschiedenen Auflösungen durchgeführt wurde, ist schon am Ende der vorigen Aufgabe angegeben.

Aufgabe 186.

Man sucht die kürzeste Linie, welche auf der Kugelfläche zwischen zwei zu festen Abscissen gehörigen Punkten gezogen werden kann.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man den Anfang des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel verlegt. Die festen Abscissen, welche der Anfangs- und Endgränze entsprechen, seien a und α; und so hat man jetzt folgende Aufgabe: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen von x nur aus denen herausgewählt werden dürfen, welche zusammen die Gleichung

$$\text{II)}\quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

identisch machen.

Erste Auflösung.

Aus II folgt $\mathfrak{p} = \frac{-x - p \cdot y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$; und so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{\frac{r^2 - y^2 + p^2 \cdot r^2 - p^2 \cdot x^2 + 2pxy}{r^2 - x^2 - y^2}}\right) \cdot dx$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung v statt $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, und w statt $\sqrt{r^2 - y^2 + p^2 \cdot r^2 - p^2 \cdot x^2 + 2pxy}$; so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left[\frac{(x+py)\cdot(xy+p\cdot(r^2-x^2))}{v^3\cdot w}\cdot\delta y + \frac{xy+p\cdot(r^2-x^2)}{v\cdot w}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right]\cdot dx$$

Wenn man aber die gehörige Umformung ausführt, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U = \left(\frac{xy+p\cdot(r^2-x^2)}{v\cdot w}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{xy+p\cdot(r^2-x^2)}{v\cdot w}\right)_a\cdot\delta y_a$$
$$+\int_a^\alpha\left[\frac{(x+py)\cdot(xy+p\cdot(r^2-x^2))}{v^3\cdot w} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{xy+p\cdot(r^2-x^2)}{v\cdot w}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx$$

Wenn man nun die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, so wende man sich sogleich an die zweite. Daraus ergibt sich folgende Hauptgleichung:

$$\frac{(x+py)\cdot(xy+p\cdot(r^2-x^2))}{v^3\cdot w} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{xy+p\cdot(r^2-x^2)}{v\cdot w}\right) = 0$$

Führt man die angezeigte Differentiation aus, und setzt man q statt $\frac{dp}{dx}$; so bekommt man

$$\frac{q\cdot r^2\cdot(r^2-x^2-y^2)+(y-px)\cdot(r^2-y^2+p^2\cdot r^2-p^2\cdot x^2+2pxy)}{(r^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(r^2-y^2+p^2\cdot r^2-p^2\cdot x^2+2pxy)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder vielmehr nur

$$\text{VI)}\quad q\cdot r^2\cdot(r^2-x^2-y^2)+(y-px)\cdot(r^2-y^2+p^2\cdot r^2-p^2\cdot x^2+2pxy) = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{x}{(y-px)^2\cdot(r^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ multiplicirt; denn führt man die Multiplication wirklich aus, so kann man das dadurch entstehende Product gradezu zerlegen in

$$\frac{r^2\cdot[qx\cdot(r^2-x^2-y^2)+(y-px)\cdot(x+py)]}{(y-px)^2\cdot(r^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\frac{p\cdot(r^2-x^2-y^2)+y\cdot(x+py)}{(x^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{r^2}{(y-px)\cdot\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right) - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\right) = 0$$

welche man gradezu integriren kann, so dass man

$$\text{VII)}\quad \frac{r^2}{(y-px)\cdot\sqrt{r^2-x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = A$$

bekommt. Letztere Gleichung kann aber umgeformt werden in

$$\frac{x\cdot(x+py)+(r^2-x^2-y^2)}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} + A\cdot(px-y) = 0$$

Diese wird integrabel, wenn man sie mit $\frac{1}{x^2}$ multiplicirt: denn dadurch bekommt man

$$\frac{x\cdot(x+py)+(r^2-x^2-y^2)}{x^2\cdot\sqrt{r^2-x^2-y^2}} + \frac{A\cdot(px-y)}{x^2} = 0$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{x}\right) + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{Ay}{x}\right) = 0$$

welche man wieder ohneweiters integriren kann, so dass man endlich bekommt

$$-\frac{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{x} + \frac{A\cdot y}{x} + B = 0$$

Digitized by Google

oder

$$\text{VIII)}\quad Ay + Bx = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

Aus Gleichung II folgt aber $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, und somit ist

$$\text{IX)}\quad z = A \cdot y + B \cdot x$$

Dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Kugelfläche ist also der Bogen eines grössten Kreises, wie schon aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{X)}\quad \left(\frac{xy + p \cdot (r^2 - x^2)}{v \cdot w}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{xy + p \cdot (r^2 - x^2)}{v \cdot w}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

welche bei Bestimmung der zwei hier vorkommenden Constanten mitbenützt wird. Dass man aber jetzt nur zwei willkürliche Constanten hat, und nicht vier, wie in Aufgabe 175; ist ein beachtenswerther Umstand. (Man vergleiche §. 245.)

Specieller Gränzfall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) miteinander gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XIII und XIV folgt, dass bei jedem Werthe des x, bei welchem man δy und $\delta^2 y$ zu Null werden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden; und somit ist in diesem Falle auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Die Gleichung der Kugelfläche geht an den Gränzen über in

$$1)\quad a^2 + b^2 + c^2 = r^2, \qquad \text{und} \qquad 2)\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$$

Die Gleichung IX geht an den Gränzen über in

$$3)\quad c = A \cdot b + B \cdot a, \qquad \text{und} \qquad 4)\quad \gamma = A \cdot \beta + B \cdot \alpha$$

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Die Gleichungen 1, 2, 3, 4 reichen also hin, die vier Stücke A, B, $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ zu bestimmen. Zugleich erkennt man, dass, weil schon b und β vorgeschrieben sind, nicht auch noch die Werthe von $c = z_a$ und $\gamma = z_\alpha$ beliebig vorgeschrieben werden können, sondern so hingenommen werden müssen, wie sie sich ergeben.

(Man vergleiche die Gränzfälle in der 188sten Aufgabe, wo drei willkürliche Constanten, und ebenso die Gränzfälle in der 191sten Aufgabe, wo vier willkürliche Constanten vorkommen).

Um entscheiden zu können, ob hier wirklich ein Minimum-stand stattfinde oder nicht, hat man den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Coefficient herzustellen; und dafür bekommt man

$$\frac{r^2 \cdot (r^2 - x^2 - y^2)}{(r^2 - y^2 + p^2 \cdot r^2 - p^2 \cdot x^2 + 2pxy)^2} \times \sqrt{\frac{r^2 - y^2 + p^2 \cdot r^2 - p^2 \cdot x^2 + 2pxy}{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Dieser Ausdruck besteht nun aus zwei Factoren, aus einem rationalen und einem irrationalen. Da $r^2 - x^2 - y^2 = z^2$ ist, also positiv sein muss; so ist der rationale Factor positiv. Da ferner der irrationale Factor gleichfalls nur seine positive Bedeutung hat; so ist auch der obige ganze Ausdruck, d. h. der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Coefficient positiv. Also ist auch $\delta^2 U$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Man behandle z als mittelbar mutabel, und eliminire nur die von z herrührenden Mutationscoefficienten. Aus II gibt sich durch Mutiren

$$\text{XI)}\quad y \cdot \delta y + z \cdot \delta z = 0$$

$$\text{XII)}\quad y \cdot \delta^2 y + \delta y^2 + \delta z^2 + z \cdot \delta^2 z = 0$$

etc.

Digitized by Google

und daraus folgt durch Absonderung

$$\text{XIII)} \quad \delta z = -\frac{y}{z} \cdot \delta y$$

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 z = -\frac{y}{z} \cdot \delta^2 y - \frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2$$

etc.

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\text{XV)} \quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y}{z} \cdot \delta y\right)$$

$$\text{XVI)} \quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y}{z} \cdot \delta^2 y\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2\right)$$

etc.

Wenn man die bloss angezeigten Differentiationen ausführen will, so bekommt man $\frac{d\delta z}{dx} = \frac{\mathfrak{p} \cdot y - p \cdot z}{z^2} \cdot \delta y - \frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$, etc.; allein die bloss angezeigten Differentiationen sind, wie man im weiteren Verlaufe sehen wird, bequemer. Man mutire nun Gleichung I, und setze zur Abkürzung noch u anstatt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$; so bekommt man zunächst

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx$$

Man kann nun zuerst umformen, und dann die mittelbaren Mutationscoefficienten eliminiren (wie dieses in der 184sten Aufgabe geschehen ist); oder man kann zuerst die mittelbaren Mutationscoefficienten eliminiren, und dann umformen. Thut man letzteres, d. h. eliminirt man $\frac{d\delta z}{dx}$ vor dem Umformen, so bekommt man

$$\delta U = \int_a^\alpha \left[\frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y}{z} \cdot \delta y\right)\right] \cdot dx$$

oder

$$\delta U = \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z} \cdot \delta y\right) - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dx$$

Wenn man den Theilsatz, welcher ein vollständiges Differential ist, integrirt; so ergibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck:

$$\delta U = \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{uz}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{uz}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{XVII)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XVIII)} \quad \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{uz}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{uz}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Man führe nun die in XVII angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Man differentiire dann auch Gleichung II zweimal hintereinander, und eliminire z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$. Dadurch bekommt man wiederum Gleichung VI, und es ergibt sich für y dieselbe Function, wie in der ersten Auflösung.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren: Man multiplicire Gleichung XVII mit z, so bekommt man

Digitized by Google

$$z \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt $\frac{pz}{u} - \frac{\mathfrak{p}y}{u} = h$, oder

$$\alpha) \quad pz - \mathfrak{p}y = h \cdot u$$

Wenn man diese letztere Gleichung quadrirt, so gibt sich

$$\beta) \quad p^2 \cdot z^2 - 2p\mathfrak{p} \cdot y \cdot z + \mathfrak{p}^2 \cdot y^2 = h^2 \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)$$

Aus $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ folgt die totale Differentialgleichung $y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p} = -x$; und wenn man diese letztere Gleichung quadrirt, so gibt sich

$$\gamma) \quad p^2 \cdot y^2 + 2p\mathfrak{p} \cdot y \cdot z + \mathfrak{p}^2 \cdot z^2 = x^2$$

Addirt man die Gleichungen β und γ, so bekommt man

$$\delta) \quad (p^2 + \mathfrak{p}^2) \cdot (y^2 + z^2) = x^2 + h^2 \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)$$

Aus II folgt $y^2 + z^2 = r^2 - x^2$. Gleichung δ geht also über in $(p^2 + \mathfrak{p}^2) \cdot (r^2 - x^2) = x^2 + h^2 \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)$; und wenn man hier beiderseits $(r^2 - x^2)$ addirt, so bekommt man $(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2) \cdot (r^2 - x^2) = r^2 + h^2 \cdot (1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)$. Daraus folgt

$$\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}$$

Die oben gestellte Gleichung $pz - \mathfrak{p}y = h \cdot u$ geht also über in $pz - \mathfrak{p}y = \frac{h \cdot r}{\sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}$.
Man dividire einerseits mit $(y^2 + z^2)$ und andererseits mit $(r^2 - x^2)$, so gibt sich

$$\frac{pz - \mathfrak{p}y}{y^2 + z^2} = \frac{h \cdot r}{(r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}, \text{ oder } \frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{1 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = \frac{h \cdot r \cdot dx}{(r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}.$$

Man integrire, so bekommt man $g + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z} = \operatorname{arc\,tg} \frac{h \cdot x}{r \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - r^2}}$, wo g der durch die letzte Integration eingegangene willkürliche Constante ist. Mit Aenderung dieses Constanten kann man auch setzen $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{k} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z} = \operatorname{arc\,tg} \frac{h \cdot x}{r \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}$; und daraus folgt $\operatorname{arc\,tg} \frac{z + ky}{kz - y} = \operatorname{arc\,tg} \frac{hx}{r \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}$, oder $\frac{z + ky}{kz - y} = \frac{h \cdot x}{r \cdot \sqrt{r^2 - h^2 - x^2}}$. Wenn man beiderseits quadrirt, so bekommt man $\frac{(z + ky)^2}{(kz - y)^2} = \frac{h^2 \cdot x^2}{r^2 \cdot (r^2 - h^2 - x^2)}$. Nach einer bekannten Regel aus der Proportionenlehre kann man beiderseits den Zähler zum Nenner addiren, und dann hat man

$$\frac{(z + ky)^2}{(kz - y)^2 + (z + ky)^2} = \frac{h^2 \cdot x^2}{r^2 \cdot (r^2 - h^2 - x^2) + h^2 \cdot x^2}$$

Diese Gleichung reducirt sich gradezu auf folgende Form

$$\frac{(z + ky)^2}{(1 + k^2) \cdot (y^2 + z^2)} = \frac{h^2 \cdot x^2}{(r^2 - h^2) \cdot (r^2 - x^2)}$$

Weil aber $(y^2 + z^2)$ soviel ist als $(r^2 - x^2)$, so reducirt sich letztere Gleichung auf $\frac{(z + ky)^2}{1 + k^2} = \frac{h^2 \cdot x^2}{r^2 - h^2}$; und daraus folgt

$$z = -k \cdot y + \frac{h \cdot \sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{r^2 - h^2}} \cdot x$$

Dieses ist aber die Gleichung der durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene. Setzt man A statt $(-k)$, und B statt $\frac{h \cdot \sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{r^2 - h^2}}$; so bekommt man wieder Gleichung IX.

Digitized by Google

Eine andere Integration der Gleichung XVII befindet sich in der zweiten Auflösung der 189sten Aufgabe. (Die betreffende Gleichung ist dort mit XIII bezeichnet.)

Mutirt man noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx} + \frac{1}{u^3}\left(\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Man substituire für $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ den in XVI befindlichen Ausdruck, führe die gehörige Umformung aus, und beachte die Hauptgleichung XVII; so bekommt man

$$\text{XIX)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[-\frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y^2 + z^2}{z^3}\,\delta y^2\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Hier hätte man noch für $\frac{d\delta z}{dx}$ den Ausdruck einzusetzen, damit jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwindet; und dann hat man den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ sich ergebenden Factor zu untersuchen. Dieser Weitläufigkeit braucht man sich aber nicht zu unterziehen; denn man erkennt gradezu, dass derselbe kein anderer ist, als ein solcher, welcher bei jedem Werthe des x positiv bleibt. Es ist also abermals erwiesen, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Dritte Auflösung.

Will man lieber mittelst eines Multiplicators eliminiren, so multiplicire man die identische Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; dann ist das Product $L \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$ auch noch eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XX)} \quad U = \int_a^\alpha [L \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - r^2) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}] \cdot dx$$

Man mutire, und führe die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\text{XXI)} \quad \delta U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(2Ly - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(2Lz - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Nun soll das mittelbare δz unter dem Integralzeichen nicht vorkommen; man denke sich also unter L eine solche Function von x, dass der bei δz befindliche Factor zu Null wird, d. h. dass die identsiche Gleichung

$$\text{XXII)} \quad 2Lz - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfindet. Eliminirt man noch mittelst XIII das ausserhalb des Integralzeichens stehende δz; so geht XXI über in

$$\text{XXIII)} \quad \delta U = \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[2Ly - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Damit nun $\delta U = 0$ werden kann, hat man die Hauptgleichung

$$\text{XXIV)} \quad 2Ly - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

Digitized by Google

und die Grünzengleichung

$$\text{XXV)} \quad \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Eliminirt man L aus XXII und XXIV, so bekommt man

$$\text{XXVI)} \quad z \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - y \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

welches wieder Gleichung XVII der zweiten Auflösung ist, so dass man jetzt weiter nichts mehr zu thun hat, als das Prüfungsmittel herzustellen. Mutirt man nochmals, und beachtet man nach ausgeführter Umformung die Gleichungen XXII und XXIV; so bekommt man

$$\text{XXVII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[2L \cdot (\delta y^2 + \delta z^2) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Jetzt ist man soweit gekommen, dass man die von z herrührenden Mutationscoefficienten, welche noch nicht weggefallen sind, eliminire. Dabei ist zunächst die Frage: welche Gestalt muss alsdann das ausserhalb des Integralzeichens stehende Aggregat haben? Diese Frage beantwortet sich (nach §. 248 und 250) dahin, dass alsdann ausserhalb des Integralzeichens nur die beiden Mutationscoefficienten $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$ stehen dürfen. Eliminirt man also vorerst das $\delta^2 z$ aus XXVII, so bekommt man

$$\text{XXVIII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$- \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 + \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_a \cdot \delta y_a^2$$

$$+ \int_a^\alpha \left[2L \cdot (\delta y^2 + \delta z^2) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Das ausserhalb des Integralzeichens stehende Aggregat hat also nicht die richtige Form, weil daselbst sich die zweiten Potenzen δy_a^2 und δy_α^2 befinden. Nun folgt aus Gleichung XXII, dass $2L = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)$; ferner ist $\delta z = -\frac{y}{z} \cdot \delta y$; und somit bekommt man

$$2L \cdot (\delta y^2 + \delta z^2) = \frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2 \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)$$

$$= \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3} \cdot \delta y^2\right) - \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2\right)$$

Substituirt man diesen Ausdruck in XXVIII, und wendet man auf den Theilsatz, welcher ein vollständiges Differential ist, die Integration an; so tritt folgendes Aggregat

$$+ \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_a \cdot \delta y_a^2$$

ausserhalb des Integralzeichens auf, wodurch das bereits ausserhalb stehende Aggregat

$$- \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 + \left(\frac{\mathfrak{p} \cdot (y^2 + z^2)}{u \cdot z^3}\right)_a \cdot \delta y_a^2$$

zerstört wird. Gleichung XXVIII reducirt sich also wieder auf XIX.

Vierte Auflösung.

Man differentiire vor Allem Gleichung II, so bekommt man die totale Differentialgleichung

$$\text{XXIX)} \quad x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Diese multiplicire man mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmu-

Digitized by Google

tablen Function M von x; dann ist das Product $M \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$ auch noch eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXX)} \quad U = \int_a^\alpha [M \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}] \cdot dx$$

Man mutire, und führe, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form folgenden Ausdruck

$$\text{XXXI)} \quad \delta U = \left(\frac{p}{u} + My\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + Mz\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- \left(\frac{p}{u} + My\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + Mz\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\left(y \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(z \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XXXII)} \quad z \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 320) zwei der eingehenden Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XXXIII)} \quad \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + Mz\right)_\alpha = 0, \quad \text{und} \quad \text{XXXIV)} \quad \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + Mz\right)_a = 0$$

stattfinden. Gleichung XXXI reducirt sich also auf

$$\delta U = \left(\frac{p}{u} + My\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} + My\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \int_a^\alpha \left(y \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Somit hat man die Hauptgleichung

$$\text{XXXV)} \quad y \cdot \frac{dM}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXXVI)} \quad \left(\frac{p}{u} + My\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} + M \cdot y\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Wenn man $\frac{dM}{dx}$ aus XXXII und XXXV eliminirt, so bekommt man

$$z \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

Dieses ist wieder Gleichung XVII, welche bereits integrirt ist. Aus XXXIII und XXXIV folgt

$$M_\alpha = -\left(\frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_\alpha, \text{ und } M_a = -\left(\frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_a$$

Wenn man nun M_α und M_a aus XXXVI eliminirt, so gibt sich

$$\text{XXXVII)} \quad \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{pz - \mathfrak{p}y}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

welches genau wieder Gleichung XVIII ist.

Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen XXXII bis XXXV; so bekommt man zunächst

$$\text{XXXVIII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{p}{u} + M \cdot y\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u} + M \cdot y\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[2M\left(\frac{d\delta y}{dx}\,\delta y + \frac{d\delta z}{dx}\,\delta z\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Digitized by Google

Man eliminire die noch unter dem Integralzeichen stehende Function M, welche man aber bis jetzt noch nicht kennen gelernt hat. Diese Elimination mag auf folgende Weise geschehen:

$$2M\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y+\frac{d\delta z}{dx}\delta z\right)=\frac{1}{dx}\cdot d(M(\delta y^2+\delta z^2))-(\delta y^2+\delta z^2)\frac{dM}{dx}$$

Nun folgt aus Gleichung XXXII, dass $\frac{dM}{dx}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)$; und somit ist

$$(\delta y^2+\delta z^2)\frac{dM}{dx}=-\frac{1}{z}\cdot(\delta y^2+\delta z^2)\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)$$

$$=-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u\cdot z}\cdot(\delta y^2+\delta z^2)\right)+\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)$$

Nach allem diesem ist also

$$2M\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y+\frac{d\delta z}{dx}\delta z\right)=\frac{1}{dx}\cdot d\left(\left(M+\frac{\mathfrak{p}}{u\cdot z}\right)(\delta y^2+\delta z^2)\right)-\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)$$

Führt man jetzt diesen für $2M\cdot\left(\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)$ gefundenen Ausdruck in Gleichung XXXVIII ein, und wendet man auf den Theilsatz, der ein vollständiges Differential ist, die Integration an; so bekommt man zunächst

$$\text{XXXIX)}\quad \delta^2U=\left(My+\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta^2y_\alpha+\left(\frac{1}{z}\right)_\alpha\cdot\left(Mz+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot(\delta y_\alpha^2+\delta z_\alpha^2)$$

$$-\left(My+\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta^2y_a-\left(\frac{1}{z}\right)_a\cdot\left(Mz+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot(\delta y_a^2+\delta z_a^2)$$

$$+\int_a^\alpha\left[-\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}-p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

Eliminirt man noch M_a und M_α, was mittelst XXXIII und XXXIV geschieht; so bekommt man

$$\text{XL)}\quad \delta^2U=\left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_\alpha\cdot\delta^2y_\alpha-\left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_a\cdot\delta^2y_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[-\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}-p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man unter dem Integralzeichen noch δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ wegzubringen, was mittelst der Gleichungen XIII und XV geschieht; ein Geschäft, welches nicht grade ausgeführt zu werden braucht, wie man aus der zu Gleichung XIX beigesetzten Erläuterung erkennt.

Die vierte Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function M von x kennen zu lernen. In dieser Hinsicht vergleiche man den Schluss zu §. 254.

Die vierte Auflösung hat den Vorzug, dass sie ganz direct zu der richtigen Form des δ^2U führt. Diesen Vorzug hat die dritte Auflösung nicht, sondern der in XXVIII für δ^2U hergestellte Ausdruck enthält ausserhalb des Integralzeichens noch das Aggregat

$$-\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot(y^2+z^2)}{u\cdot z^3}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha^2+\left(\frac{\mathfrak{p}\cdot(y^2+z^2)}{u\cdot z^3}\right)_a\cdot\delta y_a^2$$

welches, eben um dem δ^2U seine richtige Form zu geben, noch unter das Integralzeichen gebracht werden musste. (Man sehe die Anmerkung Bd. I. S. 321.)

Zusatz. Die Kugelfläche kann nicht in eine Ebene abgewickelt werden. Wenn aber dennoch eine auf der Kugelfläche gezeichnete Curve abgewickelt werden soll; so legt man in diese Curve eine abwickelbare Berührungsfläche.

Die auf der Kugelfläche gezeichnete Curve sei ein Kreis, so ist die in demselben

Digitized by Google

liegende Berührungsfläche die des graden Kegels. Es sei $\mathfrak{R}$ der Halbmesser dieses Kreises, s die Seite des Berührungskegels von seiner Spitze bis zum berührten Kreise, und ω sei die Neigung von $\mathfrak{R}$ gegen die Seite s des Kegels; so ist $\mathfrak{R} = s \cdot \cos \omega$. Wickelt man nun mittelst des Berührungskegels den Kreis von der Kugel ab, so geht derselbe in einen Kreisbogen über, dessen Halbmesser die Seite s des Kegels ist. Es findet also zwischen dem auf der Kugel gezeichneten Kreise und seiner Abwickelung die Beziehung statt, welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{R} = s \cdot \cos \omega$$

ausgesprochen ist, und wo sich s als Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve betrachten lässt. Ist aber dieser auf der Kugelfläche gezeichnete Kreis ein grösster Kreis, so geht der Berührungskegel in einen Berührungscylinder über. Dabei wird s unendlichgross; und da, wie gesagt, s sich als Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve betrachten lässt, so ist jetzt die abgewickelte Curve eine grade Linie, wie zu erwarten war.

(Das Abwickelungsproblem wird ganz allgemein vorgetragen werden in Aufgabe 282.)

Schlussbemerkung. In Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. S. 138—141) wird die Aufgabe

„Die kürzeste Linie auf einer Fläche zu finden"

ganz allgemein für jede Fläche gestellt, zuletzt aber für die Rotationsflächen specialisirt. Für die auf solchen Flächen liegende kürzeste Linie befindet sich dort (S. 141) die Differenzialgleichung

$$z \cdot dy - y \cdot dz = b \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

wo b der durch die erste Integration eingegangene Constante ist. Diese Gleichung ist aber genau dieselbe, welche, mit α) bezeichnet, in der zweiten Auflösung der hiesigen Aufgabe steht. Sie kann erst dann weiter integrirt werden, wenn zuvor die Rotationsfläche selbst bestimmt gegeben ist.

Mit der kürzesten Linie auf den Rotationsflächen hat sich schon Johann Bernoulli beschäftigt, und man findet diese Aufgabe mit vielen Einzelheiten im vierten Bande seiner Werke, welche folgenden Titel führen: Johannis Bernoulli opera omnia. Lausannæ et Genevæ. 1742., in — 4°. 4 vol.

Die Aufgabe von der kürzesten Linie auf der Kugelfläche befindet sich fast in allen Schriften, wo über den sogenannten Variationscalcul etwas vorgetragen wird. Von den betreffenden Schriftstellern ist dabei einer zu Werke gegangen wie der andere. Nachdem sie nemlich bei der Gleichung $z \cdot dy - y \cdot dz = b \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ angelangt waren, haben sie, um diese Differentialgleichung der ersten Ordnung weiter zu integriren, sich zu folgendem Hilfsmittel geflüchtet: Es wurden plötzlich alle drei Coordinatendifferentiale dx, dy, dz als veränderlich, dagegen das Bogendifferential $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ als unveränderlich angenommen, so dass sich durch dessen Differentiirung die Gleichung

$$dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z = 0$$

ergab, etc. etc. Dass es aber nicht nöthig war, eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung zu Hilfe zu rufen, um dann eine der ersten Ordnung integriren zu können; das kann man in der zweiten Auflösung ersehen.

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man:

1) Die ganze erste Auflösung, wo ich die dortigen Differentialgleichungen einfach mittelst hinzugefügter Factoren integrirt habe.
2) Die Integration der Gleichung α) in der zweiten Auflösung.
3) Die ganze vierte Auflösung, welche, wie bereits auseinandergesetzt, bedeutende Vorzüge vor der dritten hat.
4) Die in der zweiten, dritten und vierten Auflösung befindliche Darstellung des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes, welcher jedesmal einen guten Theil der Untersuchung ausmacht

---

Aufgabe 187.

Man sucht die kürzeste Linie, welche auf einer Kugelfläche zwischen zwei andern die Kugel schneidenden Flächen möglich ist.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man den Anfang des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel verlegt. Dann ist ihre Gleichung folgende:

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

wo r, eben weil die Kugel eine gegebene ist, einen bestimmten Werth hat. Die beiden Gränzflächen, deren Coordinatenanfang gleichfalls der Mittelpunkt der Kugel sein muss, seien gegeben durch

$$\text{II)}\quad \chi(a, b, c) = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{III)}\quad \xi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

Die Aufgabe ist also jetzt folgende: Man sucht für y und z solche Functionen und für a und α solche Werthe, dass dabei das Integral

$$\text{IV)}\quad U = \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$$

der Minimumwerth eines Minimum-standes wird, während die für y und z gesuchten Functionen nur aus denen herausgesucht werden dürfen, welche zusammen die Gleichung I identisch machen.

Die Durchführung der Aufgabe gewinnt am meisten Symmetrie, wenn man die mittelbaren Mutationen durch einen Multiplicator eliminirt. Dieses soll in folgenden zwei Auflösungen geschehen.

Erste Auflösung.

Damit der für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ sich ergebende Ausdruck gradezu die richtige Form bekommt, verfahre man, wie in der vierten Auflösung der vorigen Aufgabe. (Man sehe die Anmerkung in Bd. I. S. 321.) Man differentiire nemlich, weil y und z Functionen von x sein sollen, die Gleichung I nach allem x; so bekommt man

$$\text{V)}\quad x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z = 0$$

Diese Gleichung ist eine identische, weil auch I eine identische ist. Multiplicirt man V mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{K}$ von x; so ist auch das Product $\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z)$ noch eine identische Gleichung, und man kann es unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{VI)}\quad U = \int_a^\alpha [\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}] \cdot dx$$

Diesen Ausdruck hat man einer gemischten Mutation zu unterwerfen, wobei sowohl a als auch α Werthänderungen erleiden. Wenn man zugleich u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ setzt, so bekommt man zunächst

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = (\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) + u)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - (\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) + u)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\mathfrak{K}\left(p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z + y\frac{d\delta y}{dx} + z\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right] \cdot dx$$

Diese erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ kann (man vergleiche die Einleitung zur 160sten Aufgabe) nicht weiter beachtet werden. Man forme also um, so gibt sich für die zweite Form:

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = (\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) + u)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - (\mathfrak{K} \cdot (x + p \cdot y + \mathfrak{p} \cdot z) + u)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ \left(\mathfrak{K}y + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\mathfrak{K}z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\mathfrak{K}y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\mathfrak{K}z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot dz_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[-\left(y\frac{d\mathfrak{K}}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y - \left(z\frac{d\mathfrak{K}}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Man unterwerfe Gleichung VII einer zweiten gemischten Mutation, und forme um; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = (\mathfrak{K} \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) + u)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - (\mathfrak{K} \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) + u)_a \cdot \vartheta^2 a$$
$$+ \left(\frac{d[\mathfrak{K} \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) + u]}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{d[\mathfrak{K} \cdot (x + py + \mathfrak{p}z) + u]}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$
$$+ 2 \cdot \left(\mathfrak{K}\left(p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z + y\frac{d\delta y}{dx} + z\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{p}{u} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha -$$

Digitized by Google

$$-2\cdot\left(\mathfrak{K}\left(p\cdot\delta y+\mathfrak{p}\cdot\delta z+y\frac{d\delta y}{dx}+z\frac{d\delta z}{dx}\right)+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a$$

$$+\left(\mathfrak{K}y+\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta^2 y_\alpha+\left(\mathfrak{K}z+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta^2 z_\alpha-\left(\mathfrak{K}y+\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta^2 y_a-\left(\mathfrak{K}z+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta^2 z_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[-\left(y\frac{d\mathfrak{K}}{dx}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta^2 y-\left(z\frac{d\mathfrak{K}}{dx}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right)\cdot\delta^2 z\right.$$

$$\left.+2\mathfrak{K}\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y+\frac{d\delta z}{dx}\delta z\right)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx}-p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

Man mache vorerst noch folgende zwei Nebenuntersuchungen:

𝔄) Wenn man Gleichung I einer gemischten Mutation unterwirft, so bekommt man

$$\text{X)}\quad 2y\cdot\delta y+2z\cdot\delta z+\frac{d(x^2+y^2+z^2-r^2)}{dx}\cdot\vartheta x=0$$

$$\text{XI)}\quad 2y\cdot\delta^2 y+2z\cdot\delta^2 z+2\cdot\delta y^2+2\cdot\delta z^2+2\cdot\frac{d(2y\cdot\delta y+2z\cdot\delta z)}{dx}\cdot\vartheta x$$

$$+\frac{d(x^2+y^2+z^2-r^2)}{dx}\cdot\vartheta^2 x+\frac{d^2(x^2+y^2+z^2-r^2)}{dx^2}\cdot\vartheta x^2=0$$

etc. etc.

Nun sollen y und z solche Functionen von x sein, dass dadurch der Gleichung I identisch genügt wird. Es sind also auch

$$\text{XII)}\quad\frac{d(x^2+y^2+z^2-r^2)}{dx}=0,\quad\text{und}\quad\text{XIII)}\quad\frac{d^2(x^2+y^2+z^2-r^2)}{dx^2}=0$$

identische Gleichungen. Gleichung X reducirt sich somit auf

$$\text{XIV)}\quad 2y\cdot\delta y+2z\cdot\delta z=0$$

Da nun auch diese Gleichung eine identische ist, so ist auch

$$\text{XV)}\quad\frac{d(2y\cdot\delta y+2z\cdot\delta z)}{dx}=0$$

eine identische, und Gleichung XI reducirt sich sonach auf

$$\text{XVI)}\quad 2y\cdot\delta^2 y+2z\cdot\delta^2 z+2\cdot\delta y^2+2\cdot\delta z^2=0$$

Es ist also Alles, wie wenn Gleichung I nur eine reine Mutation erlitten hätte; und diese Erscheinung ist darin begründet, dass Gleichung I eine identische ist.

𝔅) Wenn man Gleichung V einer gemischten Mutation unterwirft, so bekommt man

$$\text{XVII)}\quad p\cdot\delta y+y\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{p}\cdot\delta z+z\frac{d\delta z}{dx}+\frac{d(x+py+\mathfrak{p}z)}{dx}\cdot\vartheta x=0$$

$$\text{XVIII)}\quad p\cdot\delta^2 y+y\frac{d\delta^2 y}{dx}+\mathfrak{p}\cdot\delta^2 z+z\frac{d\delta^2 z}{dx}+2\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}+2\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

$$+2\cdot\frac{d\left(p\cdot\delta y+y\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{p}\cdot\delta z+z\frac{d\delta z}{dx}\right)}{dx}\cdot\vartheta x+\frac{d(x+px+\mathfrak{p}z)}{dx}\cdot\vartheta^2 x$$

$$+\frac{d^2(x+p\cdot y+\mathfrak{p}\cdot z)}{dx^2}\cdot\vartheta x^2=0$$

etc. etc.

Nun ist Gleichung V eine identische. Desshalb sind auch

$$\text{XIX)}\quad\frac{d(x+p\cdot y+\mathfrak{p}\cdot z)}{dx}=0,\quad\text{und}\quad\text{XX)}\quad\frac{d^2(x+p\cdot y+\mathfrak{p}\cdot z)}{dx^2}=0$$

identische Gleichungen. Gleichung XVII reducirt sich somit auf

$$\text{XXI)}\quad p\cdot\delta y+y\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\mathfrak{p}\cdot\delta z+z\cdot\frac{d\delta z}{dx}=0$$

Da nun auch diese Gleichung eine identische ist, so ist auch

Digitized by Google

$$\text{XXII)} \quad \frac{d\left(p \cdot \delta y + y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \delta z + z \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)}{dx} = 0$$

eine identische. Gleichung XVIII reducirt sich somit auf

$$\text{XXIII)} \quad p \cdot \delta^2 y + y \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{p} \cdot \delta^2 z + z \frac{d\delta^2 z}{dx} + 2 \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

Es ist also Alles, wie wenn Gleichung V nur eine reine Mutation erlitten hätte: und diese Erscheinung ist gleichfalls darin begründet, dass Gleichung V eine identische ist.

Man kehre jetzt wieder zur Hauptaufgabe zurück.

Da, wie gesagt, die Gleichungen V, XIX und XXI identische sind; so gelten sie auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$. Die Gleichungen VIII und IX ziehen sich also zunächst zurück auf

$$\begin{aligned} \text{XXIV)} \quad (\delta_1 U = u_\alpha \cdot \vartheta\alpha &+ \left(\Re y + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha \\ &- u_a \cdot \vartheta a - \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a \\ &+ \int_a^\alpha \left[- \left(y \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y - \left(z \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z \right] \cdot dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{XXV)} \quad (\delta_1^2 U = u_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha &+ \left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha \\ &- u_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{du}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a \\ &+ \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a \\ &+ \int_a^\alpha \left[- \left(y \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 y - \left(z \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta^2 z \right. \\ &\left. + 2\Re \left(\frac{d\delta y}{dx} \delta y + \frac{d\delta z}{dx} \delta z\right) + \frac{1}{u^3} \left(\left(\mathfrak{p} \frac{d\delta y}{dx} - p \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 \right) \right] \cdot dx \end{aligned}$$

Damit das mittelbare δz in Gleichung XXIV unterhalb des Integralzeichens wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XXVI)} \quad z \cdot \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 320) zwei der eingehenden Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XXVII)} \quad \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha = 0, \quad \text{und} \quad \text{XXVIII)} \quad \left(\Re z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a = 0$$

stattfinden. Gleichung XXIV reducirt sich also auf

$$\begin{aligned} \text{XXIX)} \quad (\delta_1 U = u_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - u_a \cdot \vartheta a - \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a \\ - \int_a^\alpha \left(y \cdot \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx \end{aligned}$$

Man hat daher die Hauptgleichung

$$\text{XXX)} \quad y \cdot \frac{d\Re}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXXI)} \quad u_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - u_a \cdot \vartheta a - \left(\Re y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Digitized by Google

Wenn $\frac{d\mathfrak{K}}{dx}$ aus XXVI und XXX eliminirt wird, so bekommt man

$$\text{XXXII)} \quad y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - z \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

Dieses ist wieder Gleichung XVII der vorigen Aufgabe. Die gesuchte Curve ist also gegeben durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad \text{und} \quad z = A \cdot y + B \cdot x$$

d. h. die gesuchte Curve ist ein grösster Kreis, wie in voriger Aufgabe, wo a und α unveränderlich waren.

Aus den Gleichungen XXVII und XXVIII folgt

$$\mathfrak{K}_\alpha = -\left(\frac{p}{u \cdot z}\right)_\alpha, \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_a = -\left(\frac{p}{u \cdot z}\right)_a$$

Eliminirt man $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_a$ aus XXXI, so gibt sich

$$\text{XXXIII)} \quad u_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - u_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Beachtet man die Gleichungen XXVI—XXX, und eliminirt man $\mathfrak{K}_a$ und $\mathfrak{K}_\alpha$; so geht XXV über in

$$\begin{aligned}\delta^2 U = {} & u_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha \\ & - u_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{du}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a \\ & + \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_a \cdot \delta^2 y_a \\ & + \int_a^\alpha \left[2\mathfrak{K}\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y + \frac{d\delta z}{dx} dz\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(p\frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Man bringe die Function $\mathfrak{K}$ aus diesem Ausdrucke weg; dann ist die Aufgabe ausführbar, ohne dass es nöthig ist, diese Function kennen zu lernen. Zu diesem Ende bilde man sich, wie im vierten Falle der vorigen Aufgabe, folgende Gleichung:

$$2\mathfrak{K}\left(\frac{d\delta y}{dx} dy + \frac{d\delta z}{dx}\delta z\right) = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\left(\mathfrak{K} + \frac{p}{uz}\right)(\delta y^2 + \delta z^2)\right) - \frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2 + \delta z^2)\right)$$

Substituirt man jetzt die beiden rechts stehenden Theilsätze statt des links stehenden unter das Integralzeichen, und wendet man auf das vollständige Differential die Integration an; so bleibt unter dem Integralzeichen noch $-\frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2 + \delta z^2)\right)$ zurück, dagegen ausserhalb tritt folgendes Aggregat auf:

$$\left(\mathfrak{K} + \frac{p}{uz}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha^2 + \delta z_\alpha^2\right) - \left(\mathfrak{K} + \frac{p}{uz}\right)_a \cdot \left(\delta y_a^2 + \delta z_a^2\right) = 0$$

Wegen der Gleichungen XXVII und XXVIII ist aber $\left(\mathfrak{K} + \frac{p}{uz}\right)_a = 0$ und $\left(\mathfrak{K} + \frac{p}{uz}\right)_\alpha = 0$; und sonach geht der letzte für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck über in

$$\begin{aligned}\text{XXXIV)} \quad \delta^2 U = {} & u_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha \\ & - u_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{du}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a \\ & + \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u} - \frac{p}{u} \cdot \frac{y}{z}\right)_a \cdot \delta^2 y_a \\ & + \int_a^\alpha \left[-\frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2 + \delta z^2)\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(p\frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Digitized by Google

Nun muss noch die Gränzengleichung erfüllt, und zu diesem Ende müssen Gränzbedingungen aufgestellt werden. Verschiedene Fälle dieser Art befinden sich in der 177sten Aufgabe. Hier mag es an einem einzigen genügen.

Gränzfall. Man sucht die, von allen Nebenbedingungen unabhängige, kürzeste Linie, welche auf der Kugelfläche zwischen zwei andern (die Kugelfläche schneidenden) Flächen gezogen werden kann.

Die Fläche der Anfangsgränze und die Kugelfläche schneiden sich nach einer räumlichen Curve, deren Gleichungen folgende sind:

$$1)\quad \chi(a, b, c) = 0, \qquad \text{und} \qquad 2)\quad a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

Die Fläche der Endgränze und die Kugelfläche schneiden sich nach einer räumlichen Curve, deren Gleichungen folgende sind:

$$3)\quad \xi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad \text{und} \qquad 4)\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$$

Da nun in hiesigem Falle die Gränzordinaten der gesuchten Curve keiner weitern Nebenbedingung unterworfen sind; so hat man für den Anfangspunkt nur folgende zwei Gleichungen:

$$5)\quad y_a = b, \qquad \text{und} \qquad 6)\quad z_a = c$$

und für den Endpunkt hat man nur folgende zwei Gleichungen:

$$7)\quad y_\alpha = \beta, \qquad \text{und} \qquad 8)\quad z_\alpha = \gamma$$

Wenn man Gleichung 5 einer gemischten Mutation unterwirft, so gibt sich

$$9)\quad \delta y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a = \frac{db}{da} \cdot \vartheta a$$

$$10)\quad \delta^2 y_a + 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a^2 = \frac{db}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d^2 b}{da^2} \cdot \vartheta a^2$$

etc. etc.

Ganz gleichförmige Mutationsgleichungen ergeben sich aus den Gleichungen 6, 7, 8; und so bekommt man

$$11)\quad \delta y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta a$$

$$12)\quad \delta z_a = \left(\frac{dc}{da} - \mathfrak{p}_a\right) \cdot \vartheta a$$

$$13)\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha$$

$$14)\quad \delta z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - \mathfrak{p}_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha$$

$$15)\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2 b}{da^2} - q_a\right) \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$16)\quad \delta^2 z_a = \left(\frac{dc}{da} - \mathfrak{p}_a\right) \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2 c}{da^2} - \mathfrak{q}_a\right) \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dz}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$17)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d^2 \beta}{d\alpha^2} - q_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

$$18)\quad \delta^2 z_\alpha = \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - \mathfrak{p}_\alpha\right) \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d^2 \gamma}{d\alpha^2} - \mathfrak{q}_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

Die totalen Differentialquotienten p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bekommt man durch Verbindung der Gleichungen $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ und $z = A \cdot y + B \cdot x$.

Die totalen Differentialquotienten $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{da}$, $\frac{d^2 b}{da^2}$, $\frac{d^2 c}{da^2}$ bekommt man durch Verbindung der Gleichungen 1 und 2.

Die totalen Differentialquotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}$ bekommt man durch Verbindung der Gleichungen 3 und 4.

Gleichung XXXIII kann man umformen in

$$19)\quad \frac{1}{u_\alpha}\left[(1+p^2+\mathfrak{p}^2)_\alpha\cdot\vartheta\alpha+\left(p-\frac{y}{z}\,\mathfrak{p}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha\right]$$
$$-\frac{1}{u_a}\left[(1+p^2+\mathfrak{p}^2)_a\cdot\vartheta a+\left(p-\frac{y}{z}\,\mathfrak{p}\right)_a\cdot\delta y_a\right]=0$$

Eliminirt man δy_a und δy_α aus dieser Gleichung, so bekommt man

$$20)\quad \frac{1}{u_\alpha}\cdot\left[1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\left(\frac{y_\alpha\cdot p_\alpha+z_\alpha\cdot\mathfrak{p}_\alpha}{z_\alpha}-\frac{y_\alpha}{z_\alpha}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\right]\cdot\vartheta\alpha$$
$$-\frac{1}{u_a}\cdot\left[1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\left(\frac{y_a\cdot p_a+z_a\cdot\mathfrak{p}_a}{z_a}-\frac{y_a}{z_a}\cdot\frac{db}{da}\right)\right]\cdot\vartheta a=0$$

Weil aber ϑa und $\vartheta\alpha$ ganz unabhängig und willkürlich sind; so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei

$$21)\quad 1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\left(\frac{y_\alpha\cdot p_\alpha+z_\alpha\cdot\mathfrak{p}_\alpha}{z_\alpha}-\frac{y_\alpha}{z_\alpha}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=0$$

und

$$22)\quad 1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\left(\frac{y_a\cdot p_a+z_a\cdot\mathfrak{p}_a}{z_a}-\frac{y_a}{z_a}\cdot\frac{db}{da}\right)=0$$

Diesen Gleichungen sieht man nicht so leicht an, was für geometrische Bedeutung sie haben. Man suche also, sie zu vereinfachen. Man differentiire Gleichung I nach allem x, so bekommt man $y\cdot p+z\cdot\mathfrak{p}=-x$; und daraus folgt

$$23)\quad y_\alpha\cdot p_\alpha+z_\alpha\cdot\mathfrak{p}_\alpha=-\alpha,\quad\text{und}\quad 24)\quad y_a\cdot p_a+z_a\cdot\mathfrak{p}_a=-a$$

Die Gleichungen 21 und 22 gehen also über in

$$25)\quad 1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\left(-\frac{\alpha}{z_\alpha}-\frac{y_\alpha}{z_\alpha}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=0$$

und

$$26)\quad 1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\left(-\frac{a}{z_a}-\frac{y_a}{z_a}\cdot\frac{db}{da}\right)=0$$

Wenn man hier b, c, β, γ bezüglich statt y_a, z_a, y_α, z_α setzt, was in Folge der Gleichungen 5, 6, 7, 8 geschehen darf; so gehen die letzten Gleichungen über in

$$27)\quad 1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\left(-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=0$$

und

$$28)\quad 1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\left(-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\cdot\frac{db}{da}\right)=0$$

Wenn man $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0$ nach allem α differentiirt, so bekommt man

$$29)\quad \frac{d\gamma}{d\alpha}=-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}$$

Wenn man ebenso $a^2+b^2+c^2-r^2=0$ nach allem a differentiirt, so bekommt man

$$30)\quad \frac{dc}{da}=-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\cdot\frac{db}{da}$$

Die Gleichungen 27 und 28 gehen also über in

$$31)\quad 1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha}=0$$

und

$$32)\quad 1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\frac{dc}{da}=0$$

Aus diesen beiden Gleichungen geht hervor, dass die gesuchte kürzeste Linie auf den beiden Gränzcurven senkrecht steht. (Man sehe S. 300 dieses Bandes.)

Digitized by Google

Die Gleichung $z = A \cdot y + B \cdot x$ geht an den Gränzen über in

$$33)\quad c = A \cdot b + B \cdot a, \qquad \text{und} \qquad 34)\quad \gamma = A \cdot \beta + B \cdot \alpha$$

und so können die acht Stücke a, b, c, α, β, γ, A, B bestimmt werden durch die acht Gleichungen 1, 2, 3, 4, 31, 32, 33, 34.

Man hat jetzt das Prüfungsmittel herzustellen, und zu diesem Ende vorerst $\frac{d\delta z}{dx}$ aus XXXIV zu eliminiren. Aus XXI folgt

$$\text{XXXV)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \frac{1}{z} \cdot (p \cdot \delta y + \mathfrak{p} \cdot \delta z)$$

Setzt man diesen für $\frac{d\delta z}{dx}$ hergestellten Ausdruck in XXXIV, und eliminirt man dann noch δy_a, δz_a, δy_α, δz_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 11, 12, 13, 14, 15, 17 geschieht; so fällt $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$ von selbst mit hinweg. Man beachte dann die Gleichungen 21 und 22, sowie dass

$$\text{XXXVI)}\quad \frac{du}{dx} = \frac{p \cdot q}{u} + \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}}{u}$$

ist. Differentiirt man noch Gleichung I zweimal, so gibt sich

$$\text{XXXVII)}\quad y \cdot q + z \cdot \mathfrak{q} + p^2 + \mathfrak{p}^2 = 0$$

Dieses ist eine identische Gleichung, sie gilt also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$.

Berücksichtigt man nun Alles dieses, so bleibt für ${}_{(\delta)}{}^2U$ nur folgender Ausdruck

$$\text{XXXVIII)}\quad {}_{(\delta)}{}^2U =$$

$$\frac{1}{u_\alpha} \cdot \left[p_\alpha \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - \mathfrak{p}_\alpha \cdot \frac{y_\alpha}{z_\alpha} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + \frac{\mathfrak{p}_\alpha}{z_\alpha} \cdot \left(p_\alpha^2 - 2p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} + \mathfrak{p}_\alpha^2 - 2\mathfrak{p}_\alpha \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\right] \cdot \vartheta\alpha^2$$

$$- \frac{1}{u_a} \cdot \left[p_a \cdot \frac{d^2b}{da^2} - \mathfrak{p}_a \cdot \frac{y_a}{z_a} \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \frac{\mathfrak{p}_a}{z_a} \cdot \left(p_a^2 - 2p_a \cdot \frac{db}{da} + \mathfrak{p}_a^2 - 2\mathfrak{p}_a \cdot \frac{dc}{da}\right)\right] \cdot \vartheta a^2$$

$$+ \int_a^\alpha \left[-\frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2 + \delta z^2)\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Man muss nun versuchen den ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsatz etwas ebenmässiger zu machen. Man differentiire daher $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0$ zweimal nach allem α, so bekommt man

$$35)\quad \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} - \frac{1}{\gamma} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2\right]$$

Man differentiire ebenso $a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$ zweimal nach allem a, so bekommt man

$$36)\quad \frac{b}{c} \cdot \frac{d^2b}{da^2} = -\frac{d^2c}{da^2} - \frac{1}{c} \cdot \left[\left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{dc}{da}\right)^2\right]$$

Setzt man in diesen beiden letzten Gleichungen y_a, z_a, y_α, z_α statt b, c, β, γ, was in Folge der Gleichungen 5, 6, 7, 8 geschehen darf; so gehen sie über in

$$37)\quad \frac{y_\alpha}{z_\alpha} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} - \frac{1}{z_\alpha} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2\right]$$

$$38)\quad \frac{y_a}{z_a} \cdot \frac{d^2b}{da^2} = -\frac{d^2c}{da^2} - \frac{1}{z_a} \cdot \left[\left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{dc}{da}\right)^2\right]$$

Substituirt man diese Ausdrücke in XXXVIII, so bekommt man

$$\text{XXXIX)}\quad {}_{(\delta)}{}^2U =$$

$$\frac{1}{u_\alpha} \cdot \left[p_\alpha \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + \mathfrak{p}_\alpha \cdot \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} + \left(\frac{\mathfrak{p}}{z}\right)_\alpha \cdot \left(\left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha} - \mathfrak{p}_\alpha\right)^2\right)\right] \cdot \vartheta\alpha^2$$

$$- \frac{1}{u_a} \cdot \left[p_a \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \mathfrak{p}_a \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \left(\frac{\mathfrak{p}}{z}\right)_a \cdot \left(\left(\frac{db}{da} - p_a\right)^2 + \left(\frac{dc}{da} - \mathfrak{p}_a\right)^2\right)\right] \cdot \vartheta a^2 +$$

Digitized by Google

$$+\int_a^\alpha \left[-\frac{p}{u}\ \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)+\frac{1}{u^3}\left(\left(p\frac{d\delta y}{dx}-p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man unter dem Integralzeichen noch δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen XIV und XXI geschieht; und dann hat man den zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ sich ergebenden Factor zu untersuchen. Dieser Weitläufigkeit braucht man sich aber nicht zu unterziehen; denn man erkennt gradezu, dass besagter Factor kein anderer sein kann, als ein solcher, der bei jedem Werthe des x positiv bleibt.

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden. (Man sehe Aufgabe 177.)

Darüber, dass man diese Auflösung durchführen konnte, ohne die Function $\mathfrak{K}$ von x kennen zu lernen, vergleiche man den Schluss zu §. 254.

Zweite Auflösung.

Man führe die Aufgabe durch, ohne dass man Gleichung I zuvor differentiirt. Dann muss aber der für $_{(}\delta_{)}^2U$ sich ergebende Ausdruck sowohl unterhalb als ausserhalb des Integralzeichens noch umgestaltet werden, wenn er seine richtige Form bekommen soll.

Man multiplicire Gleichung I mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; dann ist auch das Product $L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2)$ noch eine identische Gleichung, und kann bei Gleichung IV unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XL)}\quad U=\int_a^\alpha \left(L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2)+\sqrt{1+p^2+p^2}\right)\cdot dx$$

Man unterwerfe diesen Ausdruck einer gemischten Mutation, und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2+p^2}$; so bekommt man

$$\text{XLI)}\quad {}_{(}\delta_{)}U=(u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2))_\alpha\cdot\vartheta\alpha-(u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2))_a\cdot\vartheta a$$

$$+\int_a^\alpha\left(2L(y\cdot\delta y+z\cdot\delta z)+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx$$

Weil Gleichung I eine identische ist, so ist auch $(x^2+y^2+z^2-r^2)_\alpha=0$ und $(x^2+y^2+z^2-r^2)_a=0$; und wenn man umformt, so bekommt man

$$\text{XLII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U=u_\alpha\cdot\vartheta\alpha+\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha+\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha$$

$$-u_a\cdot\vartheta a-\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a-\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta z_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[\left(2Ly-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta y+\left(2Lz-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx$$

Damit das mittelbare δz unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XLIII)}\quad 2Lz-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0$$

stattfinden. Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{XLIV)}\quad 2Ly-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XLV)}\quad u_\alpha\cdot\vartheta\alpha+\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha+\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha-u_a\cdot\vartheta a-\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a-\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta z_a=0$$

aus welcher jedoch die mittelbaren Elemente δz_a und δz_α noch eliminirt werden müssen.

Eliminirt man L aus XLIII und XLIV, so bekommt man wieder XXXII, deren Integral

$$z=Ay+Bx$$

Digitized by Google

bereits hergestellt ist, und woraus hervorgeht, dass die gesuchte Curve ein grösster Kreis ist.

Gränzfall. Sucht man wieder die, von allen Nebenbedingungen unabhängige, kürzeste Linie, welche auf der Kugelfläche zwischen zwei andern (die Kugelfläche schneidenden) Flächen gezogen werden kann; so hat man die Elemente δy_a, δy_α, δz_a, δz_α, aus XLV zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen 11, 12, 13, 14 geschieht. Dadurch gibt sich gradezu

$$\text{XLVI)}\quad \frac{1}{u_\alpha}\cdot\left(1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+\mathfrak{p}_\alpha\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha-\frac{1}{u_a}\cdot\left(1+p_a\cdot\frac{db}{da}+\mathfrak{p}_a\cdot\frac{dc}{da}\right)\cdot\vartheta a=0$$

Weil aber ϑa und $\vartheta\alpha$ unabhängig und willkürlich sind, so zerfällt diese Gleichung in zwei einzelne, welche schon einmal (siehe Gleichung 31 und 32) vorgekommen sind, und woraus man erkennt, dass die gesuchte kürzeste Linie auf beiden Gränzcurven zugleich, senkrecht steht.

Mutirt man Gleichung XLI noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\begin{aligned}\text{XLVII)}\quad \delta^2U &= (u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2))_\alpha\cdot\vartheta^2\alpha-(u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2))_a\cdot\vartheta^2 a\\
&+\left(\frac{d[u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2)]}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2-\left(\frac{d[u+L\cdot(x^2+y^2+z^2-r^2)]}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a^2\\
&+2\cdot\left(2L\cdot(y\cdot\delta y+z\cdot\delta z)+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha\\
&-2\cdot\left(2L\cdot(y\cdot\delta y+z\cdot\delta z)+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a\\
&+\int_a^\alpha\left[2L\,(y\cdot\delta^2y+z\cdot\delta^2z)+\frac{p}{u}\cdot\frac{d\delta^2y}{dx}+\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{d\delta^2z}{dx}\right.\\
&\left.+2L\cdot(\delta y^2+\delta z^2)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx}-p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx\end{aligned}$$

Man forme um. Dann berücksichtige man die identischen Gleichungen XLIII und XLIV. Zugleich beachte man, dass die Gleichungen I, XII und XIV ebenfalls identische sind, also auch bei $x=a$ und bei $x=\alpha$ zu Null werden. Es bleibt daher nur

$$\begin{aligned}\text{XLVIII)}\quad \delta^2U &= u_\alpha\cdot\vartheta^2\alpha+\left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2+2\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha+2\cdot\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha\\
&-u_a\cdot\vartheta^2a-\left(\frac{du}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a^2-2\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a-2\cdot\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a\\
&+\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta^2y_\alpha+\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta^2z_\alpha-\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta^2y_a-\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta^2z_a\\
&+\int_a^\alpha\left[2L\cdot(\delta y^2+\delta z^2)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\delta y}{dx}-p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx\end{aligned}$$

Nun hat dieser Ausdruck (wie schon in der dritten Auflösung der vorigen Aufgabe dargethan ist) weder unterhalb noch ausserhalb des Integralzeichens die richtige Form. Um aber diese herzustellen, verfahre man auf folgende Weise: Aus Gleichung XLIII folgt $2L=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)$, und somit ist

$$\begin{aligned}2L\cdot(\delta y^2+\delta z^2)&=\frac{1}{z}\cdot(\delta y^2+\delta z^2)\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\\
&=\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{uz}\cdot(\delta y^2+\delta z^2)\right)-\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}\,(\delta y^2+\delta z^2)\right)\end{aligned}$$

Substituirt man den letzten Ausdruck statt $2L\cdot(\delta y^2+\delta z^2)$ unter das Integralzeichen, und wendet man dann auf das vollständige Differential die Integration an; so geht XLVIII über in

Digitized by Google

$$\text{XLIX)}\quad {}_{(\delta)}{}^2U = u_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha + 2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- u_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{du}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a - 2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[-\frac{\mathfrak{p}}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2 + \delta z^2)\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Eliminirt man jetzt δy_a, δz_a, δy_α, δz_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 z_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 z_\alpha$, was mittelst der Gleichungen 11, 12 . . . . . 18 geschieht; so bekommt man genau wieder den Ausdruck XXXIX.

Somit erkennt man, dass man bei dieser zweiten Auflösung genau zu den nemlichen Resultaten gelangen kann, wie bei der ersten. Ich sage „gelangen kann", welche Redensart durch das Folgende noch näher erläutert werden soll.

Vergleicht man die erste Auflösung mit der zweiten, so gewahrt man an der zweiten den Nachtheil, dass sie nicht direct zu der richtigen Form des für ${}_{(\delta)}{}^2U$ gesuchten Ausdruckes führt, sondern dass noch eine indirecte und auf einem Kunstgriffe beruhende Transformation nöthig ist. Desshalb kann man aussprechen, dass die in der zweiten Auflösung angewendete Methode gradezu keine Methode sei. Dessenungeachtet haben alle Schriftsteller jedesmal nur die zweite angewendet, was aber zur Noth noch entschuldigt werden kann; denn sie haben niemals das Prüfungsmittel hergestellt, sind also auch niemals bis zu dem Punkte gekommen, wo sie einen Fehler hätten machen können. (Man vergleiche den Schluss des §. 251, und den Schluss des §. 256.)

In dieser Aufgabe hat der Calcul viel Eigenthümliches, was bei früheren Aufgaben nickt vorgekommen ist, oder vielmehr nicht vorkommen konnte; und das ist auch die Ursache, warum ich alle Formeln vollständig hingesetzt, d. h. vor die Anschauung gebracht habe.

Aufgabe 188.

Man soll unter den auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Normalebenen alle mit einer gegebenen Graden parallel laufen, diejenige heraussuchen, welche zwischen zwei zu den Abscissen $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen Punkten die kürzeste ist.

Die Gleichung irgend einer Ebene sei

$$\text{I)}\quad A \cdot z'' + B \cdot y'' + C \cdot x'' + E = 0$$

Die Gleichungen der gegebenen Graden aber sind

$$\text{II)}\quad z' = \mathfrak{A} \cdot x' + \mathfrak{C}, \quad \text{und} \quad \text{III)}\quad y' = \mathfrak{B} \cdot x' + \mathfrak{C}$$

Der Winkel, welchen die Ebene und die Grade miteinander bilden, hat bekanntlich einen Sinus, der gegeben ist durch

$$\frac{A \cdot \mathfrak{A} + B \cdot \mathfrak{B} + C}{(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}) \cdot (\sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2})}$$

In dem Falle, dass Grade und Ebene parallel sind, ist dieser Sinus Null, d. h. es ist

$$\text{IV)}\quad A \cdot \mathfrak{A} + B \cdot \mathfrak{B} + C = 0$$

Die Gleichung der Normalebene im Allgemeinen ist

$$(x'' - x) + (y'' - y) \cdot p + (z'' - z) \cdot \mathfrak{p} = 0$$

oder in anderer Ordnung

$$\text{V)}\quad \mathfrak{p} \cdot z'' + p \cdot y'' + x'' - (x + py + \mathfrak{p}z) = 0$$

Digitized by Google

Vergleicht man V und I, so sieht man, dass $A = \mathfrak{p}$, $B = p$, und $C = 1$ ist; Gleichung IV geht also über in

$$\text{VI)} \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{p} + \mathfrak{B} \cdot p + 1 = 0$$

Jede räumliche Curve, durch welche diese Differentialgleichung der ersten Ordnung identisch wird, hat die Eigenschaft, dass alle ihre Normalebenen mit der (durch die Gleichungen II und III) gegebenen Graden parallel laufen. Die Aufgabe ist also jetzt folgende: Es soll

$$\text{VII)} \quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen nur solche zusammengehörige sein dürfen, dass dabei die Gleichung VI identisch wird.

Erste Auflösung.

Man integrire die Gleichung VI, welche, weil y und z als Functionen von x gedacht werden müssen, eine totale Differentialgleichung ist; und es gibt sich

$$\text{VIII)} \quad \mathfrak{A} \cdot z + \mathfrak{B} \cdot y + x = F$$

Durch diese Gleichung sind aber jene unendlichvielen Ebenen dargestellt, welche auf der (durch die Gleichungen II und III) gegebenen Graden senkrecht stehen; die verschiedenen Werthe des willkürlichen Constanten F werden den jedesmaligen Ort dieser Ebenen bestimmen. In jeder dieser unendlichvielen Ebenen liegen unendlichviele Curven, welche in allen ihren Punkten die Eigenschaft haben, dass die Normalebenen mit der gegebenen Graden parallel laufen.

Aus VIII folgt $\mathfrak{p} = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot (-1 - \mathfrak{B} \cdot p)$. Eliminirt man $\mathfrak{p}$ aus VII, so gibt sich

$$\text{IX)} \quad U = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B} \cdot p + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p^2}\right) \cdot dx$$

Man mutire, forme um, und setze dann zur Abkürzung noch Q anstatt

$$\sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B} \cdot p + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p^2}$$

so bekommt man, wenn man die erste Form des δU nicht weiter berücksichtigen will, für die zweite folgenden Ausdruck:

$$\text{X)} \quad \delta U = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p}{Q}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p}{Q}\right)_a \cdot \delta y_a$$
$$- \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p}{Q}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{XI)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot p}{Q}\right) = 0$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so bekommt man $dp = 0$; und daraus folgt

$$\text{XII)} \quad y = H \cdot x + K$$

Als Gränzengleichung bekommt man

$$\text{XIII)} \quad \frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot H}{\mathfrak{A} \cdot \sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B} \cdot H + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot H^2}} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der Constanten noch mitbenützt werden muss. Eliminirt man y aus VIII, so bekommt man

$$\text{XIV)} \quad z = -\frac{1 + H \cdot \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot x + (F - K \cdot \mathfrak{B})$$

Hier hat man drei willkürliche Constanten F, H, K. Zwei davon, nemlich H und K, sind eingegangen durch Integration der Hauptgleichung XI; und einer, nemlich F, ist eingegangen durch Integration der Bedingungsgleichung VI. Hinsichtlich der Bestimmung dieser Constanten sehe man die der Aufgabe beigefügten Gränzfälle.

Digitized by Google

Dass man aber hier nur drei willkürliche Constanten hat, und nicht vier, wie in Aufgabe 175, ist ein beachtenswerther Umstand. (Man vergleiche Bd. I. S. 323.)

Man mutire noch einmal, und beachte die allgemeine Gleichung; so bekommt man

$$\text{XV)}\quad \delta^2 U = \frac{\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\cdot H}{\mathfrak{A}\cdot\sqrt{1 + \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}H + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\cdot H^2}}\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a)$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}\cdot(1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)}{[1 + \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}\cdot H + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)\cdot H^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Zweite Auflösung.

Man multiplicire Gleichung VI mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x; dann ist auch das Product $\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\cdot p + 1)$ noch eine identische Gleichung. Man kann es also unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XVI)}\quad U = \int_a^\alpha[\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}p + 1) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}]\cdot dx$$

Man mutire, und führe die gehörigen Umformungen aus; so bekommt man, wenn man noch u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$ setzt, und die erste Form des δU nicht weiter beachten will, für die zweite folgenden Ausdruck

$$\text{XVII)}\quad \delta U = \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{B} + \frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha + \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha$$

$$- \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{B} + \frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a - \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta z_a$$

$$- \int_a^\alpha\left[\left(\mathfrak{B}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta y + \left(\mathfrak{A}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right)\cdot dz\right]\cdot dx$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, muss die identische Gleichung

$$\text{XVIII)}\quad \mathfrak{A}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. Seite 324) zwei der eingehenden fünf Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XIX)}\quad \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha = 0,\ \text{ und XX)}\quad \left(\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a = 0$$

stattfinden. Aus letzteren Gleichungen folgt

$$\mathfrak{N}_\alpha = -\frac{1}{\mathfrak{A}}\cdot\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha,\ \text{ und }\ \mathfrak{N}_a = -\frac{1}{\mathfrak{A}}\cdot\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a$$

Somit reducirt und transformirt sich Gleichung XVII auf folgende

$$\text{XXI)}\quad \delta U = \frac{1}{\mathfrak{A}}\cdot\left(\frac{\mathfrak{A}\cdot p - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{\mathfrak{A}\cdot p - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$- \int_a^\alpha\left(\mathfrak{B}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{XXII)}\quad \mathfrak{B}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXIII)}\quad \left(\frac{\mathfrak{A}\cdot p - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{\mathfrak{A}\cdot p - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Digitized by Google

Man eliminire $\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$ aus XVIII und XXII; so bekommt man

$$\mathfrak{A} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - \mathfrak{B} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

Führt man die angezeigten Differentiationen aus, so bekommt man

$$\text{XXIV)} \quad \mathfrak{A} \cdot (1 + \mathfrak{p}^2) \cdot dp + \mathfrak{B}p\mathfrak{p} \cdot dp - \mathfrak{A}p\mathfrak{p} \cdot d\mathfrak{p} - \mathfrak{B} \cdot (1 + p^2) \cdot d\mathfrak{p} = 0$$

Nun differentiire man auch Gleichung VI, so gibt sich

$$\text{XXV)} \quad \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{p} + \mathfrak{B} \cdot dp = 0$$

Wenn man jetzt $\mathfrak{p}$ und $d\mathfrak{p}$ aus XXIV eliminirt, was mittelst VI und XXV geschieht; so bekommt man

$$(1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot dp = 0$$

d. h. es ist $dp = 0$; und daraus folgt

$$\text{XXVI)} \quad y = Hx + K$$

Aus dieser Gleichung und aus VIII folgt abermals

$$\text{XXVII)} \quad z = -\frac{1 + H\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot x + (F - K \cdot \mathfrak{B})$$

Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen XVIII bis XXI; so bekommt man zunächst

$$\text{XXVIII)} \quad \delta^2 U = \left(\mathfrak{N}\mathfrak{B} + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\mathfrak{N}\mathfrak{B} + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{u^3} \cdot \left[\left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Aus Gleichung VI folgt

$$\text{XXIX)} \quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}, \qquad \text{XXX)} \quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$$

Wenn man nun $\frac{d\delta z}{dx}$, $\mathfrak{N}_\alpha$ und $\mathfrak{N}_a$ eliminirt, und ausserdem noch für p und $\mathfrak{p}$ die Ausdrücke setzt; so bekommt man genau wieder Gleichung XV.

Um zu sehen, wie δz, $\delta^2 z$, etc. von δy, $\delta^2 y$, etc. abhangen; muss man Gleichung VIII mutiren. Dadurch bekommt man

$$\text{XXXI)} \quad \delta z = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \delta y, \quad \text{XXXII)} \quad \delta^2 z = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \delta^2 y$$

Die zweite Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function $\mathfrak{N}$ von x kennen zu lernen. In dieser Hinsicht vergleiche man den Schluss zu §. 254. Uebrigens ist die jetzige Aufgabe eine von den in §. 255 bezeichneten Specialitäten.

Erster Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XXXI und XXXII folgt, dass bei jedem Werthe des x, bei welchem man δy und $\delta^2 y$ verschwinden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden; und somit ist in diesem Falle auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Gleichung XII geht an den Gränzen über in

$$1) \quad b = H \cdot a + K, \qquad 2) \quad \beta = H \cdot \alpha + K$$

Gleichung VIII geht an den Gränzen über in

$$3) \quad \mathfrak{A} \cdot c + \mathfrak{B} \cdot b + a = F, \quad 4) \quad \mathfrak{A} \cdot \gamma + \mathfrak{B} \cdot \beta + \alpha = F$$

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Weil aber drei willkürliche

Digitized by Google

Constanten H, K und F bestimmt werden sollen; so kann auch noch der Werth von einem der zwei Stücke $c = z_a$ oder $\gamma = z_\alpha$ vorgeschrieben werden. Man schreibe den Werth des $\gamma = z_\alpha$ vor, so können die noch übrigen vier Stücke H, K, F und c durch die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 bestimmt werden.

Zweiter Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien nur den Anfangspunkt (a, b, c) miteinander gemeinschaftlich haben; so kann auch nur der Werth von y_a bestimmt vorgeschrieben werden, dagegen über den Werth von y_α kann man nicht beliebig verfügen. Hier ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc.; dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. können nicht zu Null werden.

(Weil $\delta y_a = 0$ und $\delta^2 y_a = 0$ sind, so werden auch $\delta z_a = 0$ und $\delta^2 z_a = 0$; dagegen δz_α und $\delta^2 z_\alpha$ werden nicht zu Null, weil δy_α und $\delta^2 y_\alpha$ nicht zu Null werden. Alles dieses sind Folgen der Gleichungen XXXI und XXXII.)

Weil nun δy_α nicht zu Null wird, so fällt die Gränzengleichung nur weg, wenn man den bei δy_α befindlichen Factor zu Null werden lässt. Aus Gleichung XXIII folgt also

$$(\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}\mathfrak{p})_\alpha = 0$$

und aus XIII folgt die ganz gleichbedeutende Gleichung

$$5)\quad \mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cdot H = 0$$

Ausserdem hat man noch die vier Gleichungen des vorigen Falles, d. h. man hat jetzt fünf Gleichungen, welche bei Bestimmung der sechs Stücke H, K, F, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$ und $\gamma = z_\alpha$ benützt werden müssen, während a, α und $y_a = b$ gegeben sind. Weil aber zur Bestimmung der besagten sechs Stücke nur fünf Gleichungen vorhanden sind; so kann man den Werth von $c = z_a$ vorschreiben; und dann haben alle in Betracht zu ziehenden Linien einen und denselben festen Anfangspunkt. Die Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5 reichen dann hin zur Bestimmung der noch übrigen fünf Stücke H, K, F, $\beta = y_\alpha$ und $\gamma = z_\alpha$.

Dritter Fall. Ist weder hinsichtlich des Anfangspunktes noch hinsichtlich des Endpunktes aller hier in Betracht zu ziehenden Linien etwas vorgeschrieben; so hat man jetzt die Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5, welche bei Bestimmung der sieben Stücke H, K, F, $b = y_a$, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$ und $\gamma = z_\alpha$ benützt werden müssen, während a und α gegeben sind. Aber eben weil nur fünf Gleichungen existiren zur Bestimmung jener sieben Stücke, so bleiben zwei davon unbestimmt, wenn nicht noch andere Bedingungen hinzukommen.

(Man vergleiche die Gränzfälle der 191sten Aufgabe, wo vier willkürliche Constanten, und ebenso die Gränzfälle in der 184sten Aufgabe, wo nur zwei willkürliche Constanten vorkommen.)

Schlussbemerkung. Diese, sowie die Aufgaben 189, 190, 191, 192, 193, wo die Bedingungsgleichung eine Differentialgleichung ist, habe ich mit zwei Auflösungen durchgeführt. Bei der ersten Auflösung habe ich das mittelbar mutable Element schon vor dem Mutiren direct eliminirt. Bei der zweiten habe ich die Multiplicatorenmethode angewendet, und zwar mit solcher Vollständigkeit, dass nichts zu wünschen übrig bleibt, während in andern Schriften, wo bei ähnlichen Aufgaben die Multiplicatorenmethode angewendet wird, noch so Vieles im Unklaren gelassen oder gar ganz unerledigt geblieben ist.

Aufgabe 189.

Man soll unter den auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven, deren Normalebenen alle durch den nemlichen festen Punkt (n, m, l) gehen, diejenige heraussuchen, welche zwischen zwei zu festen Abscissen gehörigen Punkten die kürzeste ist.

Jede räumliche Curve, durch welche die totale Differentialgleichung

$$\text{I)}\quad (n - x) + (m - y) \cdot \frac{dy}{dx} + (l - z) \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

erfüllt wird, hat (man sehe Aufgabe 115) die Eigenschaft, dass alle ihre Normalebenen durch den festen Punkt (n, m, l) gehen. Die Durchführung der Aufgabe wird, ihrer

Digitized by Google

Allgemeinheit unbeschadet, vereinfacht, wenn man den festen Punkt (n, m, l) als Anfang der Coordinaten wählt. Dabei geht Gleichung I über in

$$\text{II)} \quad x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Wenn nach dieser Verlegung des Coordinatenanfangs die festen Gränzabscissen mit a und α bezeichnet werden; so ist die Aufgabe jetzt folgende: Es soll

$$\text{III)} \quad U = \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die gesuchten Functionen y und z nur solche zusammengehörige sein dürfen, dass dabei die Gleichung II identisch wird.

Erste Auflösung.

Man integrire die Gleichung II, welche, weil y und z als Functionen von x gedacht werden müssen, eine totale Differentialgleichung ist; und es gibt sich

$$\text{IV)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Durch diese Gleichung sind aber alle jene unendlichvielen Kugelflächen dargestellt, welche ihren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten haben; die verschiedenen Werthe des willkürtichen Constanten r werden den jedesmaligen Halbmesser dieser Kugeln bestimmen. In jeder dieser unendlichvielen Kugelflächen liegen unendlichviele Curven, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft haben, dass die Normalebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

Aus IV folgt $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, und daraus folgt weiter

$$\mathfrak{p} = - \frac{x + py}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Eliminirt man jetzt $\mathfrak{p}$ aus III, und verfahrt man weiter, wie gewöhnlich; so bekommt man von Stufe zu Stufe dasselbe, was man in der ersten Auflösung der 186[sten] Aufgabe bekommen hat, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt auch r ein willkürlicher Constanter ist, während dort (in der 186[sten] Aufgabe nemlich) der Werth des r vorgeschrieben war.

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis, und zwar ein grösster Kreis derjenigen Kugel, deren Halbmesser r aus gegèbenen Bedingungen noch bestimmt werden muss.

Zweite Auflösung

Man multiplicire Gleichung II mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x; dann ist auch das Product $\mathfrak{N} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p})$ noch eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)} \quad U = \int_a^\alpha [\mathfrak{N} \cdot (x + y \cdot p + z \cdot \mathfrak{p}) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}] \cdot dx$$

Man mutire, führe die gehörige Umformung aus, und setze dann u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$; so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{VI)} \quad \delta U = \left(\mathfrak{N} \cdot y + \frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\mathfrak{N} \cdot z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$
$$- \left(\mathfrak{N} \cdot y + \frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\mathfrak{N} \cdot z + \frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a$$
$$- \int_a^\alpha \left[\left(y \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(z \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, muss die identische Gleichung

$$\text{VII)} \quad z \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 324) zwei der eingehenden Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\ \left(\mathfrak{N}\cdot z+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha=0,\quad \text{und IX)}\ \left(\mathfrak{N}\cdot z+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)_a=0$$

stattfinden. Daher hat man folgende Hauptgleichung

$$\text{X)}\ y\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}+\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)=0$$

und folgende Gränzengleichung

$$\text{XI)}\ \left(\mathfrak{N}y+\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha-\left(\mathfrak{N}y+\frac{p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a=0$$

Eliminirt man aber $\mathfrak{N}_\alpha$ und $\mathfrak{N}_a$, was mittelst VIII und IX geschieht; so geht XI über in

$$\text{XII)}\ \left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_\alpha\cdot\delta y_a-\left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_a\cdot\delta y_a=0$$

Eliminirt man $\frac{d\mathfrak{N}}{dx}$ aus VII und X, so bekommt man

$$\text{XIII)}\ z\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)-y\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)=0$$

Führt man die hier angedeuteten Differentiationen aus, so gibt sich

$$\text{XIV)}\ (z+z\cdot\mathfrak{p}^2+y\cdot p\mathfrak{p})\cdot\frac{dp}{dx}-(y+y\cdot p^2+z\cdot p\mathfrak{p})\cdot\frac{d\mathfrak{p}}{dx}=0$$

Diese totale Differentialgleichung der zweiten Ordnung hat man mit II zu verbinden. Aus II aber folgt $yp=-x-z\cdot\mathfrak{p}$; und wenn man diesen Ausdruck aus XIV eliminirt, so bekommt man

$$(z-\mathfrak{p}\cdot x)\cdot\frac{dp}{dx}-(y-px)\cdot\frac{d\mathfrak{p}}{dx}=0$$

oder, wenn man zur Abkürzung q statt $\frac{dp}{dx}$, und $\mathfrak{q}$ statt $\frac{d\mathfrak{p}}{dx}$ setzt

$$\text{XV)}\ z\cdot q-y\cdot\mathfrak{q}+x\cdot(p\cdot\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\cdot q)=0$$

Dieses ist aber die Differentialgleichung derjenigen räumlichen Curve, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass die Krümmungsebenen alle durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Das allgemeine Integral der Gleichung XV ist aber (man sehe Aufgabe 122. Differentialgleichung I und Integralgleichung II und IV)

$$\text{XVI)}\ z=F\cdot y+H\cdot x$$

Hieraus folgt $\mathfrak{p}=F\cdot p+H$; und wenn man $\mathfrak{p}$ und z aus II eliminirt, so gibt sich

$$x+y\cdot p+(F\cdot y+H\cdot x)\cdot(F\cdot p+H)=0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XVII)}\ x^2+y^2+(F\cdot y+H\cdot x)^2=r^2$$

so dass im Ganzen jetzt die drei Constanten F, H, r zu bestimmen sind. Benützt man Gleichung XVI, so kann man XVII umformen in

$$\text{XVIII)}\ x^2+y^2+z^2=r^2$$

Man hat also genau dasselbe Resultat, wie bei der ersten Auflösung.

Eine andere Integration der Gleichung XIII befindet sich in der zweiten Auflösung der 186sten Aufgabe. (Die betreffende Gleichung ist dort mit XVII bezeichnet.)

Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen VII bis X; so bekommt man

$$\text{XIX)}\ \delta^2U=\left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_\alpha\cdot\delta^2y_\alpha-\left(\frac{pz-\mathfrak{p}y}{u\cdot z}\right)_a\cdot\delta^2y_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[2\mathfrak{N}\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y+\frac{d\delta z}{dx}\delta z\right)+\frac{1}{u^3}\left(\left(\mathfrak{p}\cdot\frac{d\delta y}{dx}-p\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right]\cdot dx$$

Verfahrt man, wie bei der vierten Auflösung der 186sten Aufgabe; so bekommt man

$$2\mathfrak{N}\left(\frac{d\delta y}{dx}\delta y+\frac{d\delta z}{dx}\delta z\right)=\frac{1}{dx}\cdot d\left(\left(\mathfrak{N}+\frac{\mathfrak{p}}{uz}\right)\cdot(\delta y^2+\delta z^2)\right)-\frac{\mathfrak{p}}{u}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1}{z}(\delta y^2+\delta z^2)\right)$$

Digitized by Google

Substituirt man nun die beiden rechts stehenden Theilsätze statt des links stehenden unter das Integralzeichen, und wendet man auf das vollständige Differential die Integration an; so bleibt unter dem Integralzeichen nur noch $-\frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}\ (\delta y^2 + \delta z^2)\right)$ zurück, dagegen ausserhalb tritt folgendes Aggregat auf:

$$\left(\mathfrak{N} + \frac{p}{uz}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha^2 + \delta z_\alpha^2\right) - \left(\mathfrak{N} + \frac{p}{uz}\right)_a \cdot \left(\delta y_a^2 + \delta z_a^2\right)$$

Wegen der Gleichungen VIII und IX ist aber $\left(\mathfrak{N} + \frac{p}{uz}\right)_\alpha = 0$ und $\left(\mathfrak{N} + \frac{p}{uz}\right)_a = 0$; und somit geht Gleichung XIX über in

$$\text{XX)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{pz - py}{u \cdot z}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{pz - py}{u \cdot z}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[-\frac{p}{u} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{z}\,(\delta y^2 + \delta z^2)\right) + \frac{1}{u^3}\left(\left(p\,\frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man noch δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu eliminiren. Aus Gleichung IV folgt

$$\text{XXI)} \quad \delta z = -\frac{y}{z} \cdot \delta y, \quad \text{XXII)} \quad \delta^2 z = -\frac{y}{z} \cdot \delta^2 y - \frac{y^2 + z^2}{z^3} \cdot \delta y^2$$

Daraus folgt weiter

$$\text{XXIII)} \quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{py - pz}{z^2} \cdot \delta y - \frac{y}{z} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Diese zweite Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function $\mathfrak{N}$ von x kennen zu lernen. Man sehe den Schluss des §. 254.

Specieller Gränzfall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) miteinander gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XXI und XXII folgt, dass bei jedem Werthe des x, bei welchem man δy und $\delta^2 y$ verschwinden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden; und somit ist in diesem Falle auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Gleichung XVI geht an den Gränzen über in

$$1) \quad c = F \cdot b + H \cdot a, \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \gamma = F \cdot \beta + H \cdot \alpha$$

Gleichung XVIII geht an den Gränzen über in

$$3) \quad a^2 + b^2 + c^2 = r^2, \qquad \text{und} \qquad 4) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$$

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Man hat also nur die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 zur Bestimmung der fünf Stücke c, γ, r, F, H, so dass eines unbestimmt bleibt, wenn nicht noch eine neue Bedingung hinzukommt.

Man vergleiche die Gränzfälle der vorigen Aufgabe.

Schlussbemerkung. Ist die nemliche, wie die der vorigen Aufgabe; desshalb genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgabe 190.

Unter allen räumlichen Curven, welche die Eigenschaft gemeinschaftlich haben, dass die goniometrische Tangente des von der Berührungslinie und irgend einer festen Ebene gebildeten Winkels eine bestimmte Function der Abscisse wird, sucht man diejenige heraus, deren zu zwei festen Abscissen gehöriger Bogen der kürzeste ist.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man besagte Ebene zur Coordinatenebene XY nimmt. Dann ist des genannten Winkels goniometrische Tangente $= \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$; und wenn die bestimmt gege-

Digitized by Google

bene Function von x, wodurch diese goniometrische Tangente gleichfalls ausgedrückt werden soll, kurzweg mit w bezeichnet wird, so hat man die Gleichung

$$\text{I)}\quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = w$$

Die festen Abscissen, welche der Anfangs- und Endgränze entsprechen, seien a und α; und so hat man jezt folgende Aufgabe: Es soll

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1+p^2+p^2}\right)\cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y und z zu suchenden Functionen von x solche zusammengehörige sein müssen, dass auch noch Gleichung I erfüllt wird.

Erste Auflösung.

Aus I folgt $p = w\cdot\sqrt{1+p^2}$, und somit geht II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)}\right)\cdot dx$$

Man mutire, und forme um, so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left(\frac{p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta y_a$$
$$-\int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad d\left(\frac{p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{VI)}\quad \frac{p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}} = A$$

und daraus folgt weiter

$$\text{VII)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{A}{\sqrt{1+w^2-A^2}}$$

Um diese Gleichung abermals integriren zu können, muss zuvor an die Stelle des w eine bestimmte Function von x gesetzt werden, sei es nun, dass diese für w zu setzende Function nach Willkür genommen werden kann, oder dass sie auf irgend eine Weise vorgeschrieben ist. Durch Integration der Gleichung VII geht noch ein weiterer Constanter B ein. Als Gränzengleichung hat man

$$\text{VIII)}\quad A\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der willkürlichen Constanten noch mit benützt werden muss. Wenn man in Gleichung I das p absondert, so bekommt man $p = w\cdot\sqrt{1+p^2}$; und wenn man hier für p den Ausdruck aus VII einsetzt, so gibt sich $p = w\cdot\sqrt{1+\frac{A^2}{1+w^2-A^2}}$, oder

$$\text{IX)}\quad \frac{dz}{dx} = w\cdot\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+w^2-A^2}}$$

Indem man diese Gleichung integrirt, bekommt man auch z als Function von x, wobei noch ein dritter Constanter C eingeht, so dass man im Ganzen drei willkürliche Constanten hat. Mutirt man abermals, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = A\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \int_a^\alpha \frac{\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)}}{(1+p^2)^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Digitized by Google

Das Radical $\sqrt{(1 + w^2)\,(1 + p^2)}$ ist gleich anfangs nur als positiv vorausgesetzt worden; und man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweite Auflösung.

Man forme Gleichung I in die identische

$$\text{XI)}\quad \mathfrak{p} - w \cdot \sqrt{1 + p^2} = 0$$

um, und multiplicire sie mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; so ist auch noch das Product $L \cdot (\mathfrak{p} - w^2 \sqrt{1 + p^2})$ eine identische Gleichung, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XII)}\quad U = \int_a^\alpha \left[L \cdot (\mathfrak{p} - w \cdot \sqrt{1 + p^2}) + \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right] \cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so gibt sich für die zweite Form des δU

$$\begin{aligned}\text{XIII)}\quad \delta U = &\left(-\frac{L \cdot w \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha \\ &- \left(-\frac{L \cdot w \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a \cdot \delta z_a \\ &- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(-\frac{L \cdot w \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta y \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, muss die identische Gleichung

$$\text{XIV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Damit auch ausserhalb des Integralzeichens das mittelbare δz wegfalle, bestimme man (nach Bd. I. S. 324) zwei der eingehenden fünf Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

$$\text{XV)}\quad \left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha = 0, \quad \text{und XVI)}\quad \left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a = 0$$

stattfinden. Gleichung XIII reducirt sich also auf

$$\begin{aligned}\text{XVII)}\quad \delta U = &\left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a \cdot \delta y_a \\ &- \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) \cdot \delta y \cdot dx\right.\end{aligned}$$

Man hat somit die Hauptgleichung

$$\text{XVIII)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XIX)}\quad \left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(-\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Integrirt man Gleichung XIV, so bekommt man

$$\text{XX)}\quad L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = E$$

d. h. der Ausdruck $\left(L + \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right)$ ist constant bei jedem Werthe des x, und bei jedem Werthe, der durch Integration eingehenden Constanten. Die Gleichungen XV und XVI gehen also über in die einzige

Digitized by Google

$$\text{XXI)}\quad E = 0$$

Dadurch reducirt sich Gleichung XX auf

$$\text{XXII)}\quad L + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = 0$$

Man integrire XVIII, so bekommt man

$$\text{XXIII)}\quad -\frac{Lw \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = A$$

und somit hat man die Gränzengleichung

$$\text{XXIV)}\quad A \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

Wenn man mittelst I, XXII und XXIII das L und das $\mathfrak{p}$ eliminirt, und dann p absondert; so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{A}{\sqrt{1 + w^2 - A^2}}$$

Dieses ist aber genau wieder Gleichung VII, welche, wie gesagt, erst integrirt werden kann, wenn an die Stelle des w eine bestimmte Function kommt.

Man mutire noch einmal, forme um, und beachte die Gleichungen XIV bis XVIII; so bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad \delta^2 U = A \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \int_a^\alpha \Bigg[-\frac{L \cdot w}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\left(\mathfrak{p} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - p \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right)\Bigg] \cdot dx$$

Aus Gleichung I folgt $\mathfrak{p} = w \cdot \sqrt{1 + p^2}$ und $\frac{d\delta z}{dx} = \frac{p \cdot w}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$. Ferner aus Gleichung XXII folgt $L = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}$. Eliminirt man diese drei Stücke aus XXVI, so gibt sich

$$\delta^2 U = A \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \int_a^\alpha \frac{\sqrt{(1 + w^2) \cdot (1 + p^2)}}{(1 + p^2)^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

was genau wieder Gleichung X ist.

Man denke sich Gleichung I integrirt, und z abgesondert; so bekommt man $z = \pi(x, y, c)$, wo c der durch Integration eingegangene Constante ist. Daraus folgt

$$\delta z = \frac{d_y \pi}{dy} \cdot \delta y, \quad \text{und} \quad \delta^2 z = \frac{\delta^2{}_y \pi}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_y \pi}{dy} \cdot \delta^2 y$$

Hierdurch ist die Abhängigkeit gegeben, in welcher δz, $\delta^2 z$, etc. zu δy, $d^2 y$, etc. stehen. Namentlich erkennt man, dass, wenn $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. ist, auch $\delta z_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, etc. sein muss; und so fort.

Hinsichtlich der Bestimmung der drei willkürlichen Constanten A, B und C vergleiche man die in der 188sten Aufgabe befindlichen Gränzfälle.

Diese zweite Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function L von x kennen zu lernen. Man sehe den Schluss des §. 254. Uebrigens hat man hier eine von den in §. 255 bezeichneten Specialitäten.

Schlussbemerkung. Ist die nemliche, wie die der 188sten Aufgabe; desshalb genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgabe 191.

Man soll unter den räumlichen Curven, deren Krümmungsebenen alle mit einer gegebenen Graden parallel laufen, diejenige heraussuchen, welche zwischen zwei zu den Abscissen $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen Punkten die kürzeste ist.

Digitized by Google

Die Gleichungen der gegebenen Graden sind

$$\text{I)}\quad z'' = \mathfrak{A}\cdot x'' + \mathfrak{C},\quad \text{und II)}\quad y'' = \mathfrak{B}\cdot x'' + \mathfrak{E}$$

und jede räumliche Curve, durch welche folgende totale Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\text{III)}\quad \mathfrak{A}\cdot q - \mathfrak{B}\cdot \mathfrak{q} - (\mathfrak{p}\cdot q - p\cdot \mathfrak{q}) = 0$$

identisch wird, hat (man sehe Aufgabe 121) die Eigenschaft, dass alle ihre Krümmungsebenen mit der (durch die Gleichungen I und II) gegebenen Graden parallel laufen. Die Aufgabe ist also: Es soll

$$\text{IV)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right)\cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei die Gleichung III identisch wird.

Erste Auflösung.

Man integrire die Gleichung III, welche, weil y und z Functionen von x sind, eine totale Differentialgleichung ist; und es gibt sich (nach Aufgabe 121)

$$\text{V)}\quad z = ny + (\mathfrak{A} - n\cdot\mathfrak{B})\cdot x + m$$

wo n und m zwei willkürliche Constanten sind. Durch diese Gleichung sind alle möglichen Ebenen dargestellt, die mit der gegebenen Graden parallel laufen. Liegt aber in so einer Ebene eine Curve, so ist diese eine ebene Curve; und somit ist die Ebene auch Krümmungsebene für alle Punkte der in ihr liegenden Curven.

Aus V folgt $\mathfrak{p} = np + \mathfrak{A} - n\mathfrak{B}$; und wenn man $\mathfrak{p}$ aus IV eliminirt, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad U = \int_a^\alpha dx\cdot\sqrt{1 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2 + 2\cdot n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot p + (1 + n^2)\cdot p^2}$$

Man mutire, forme um, und setze zur Abkürzung noch u anstatt

$$\sqrt{1 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2 + 2n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot p + (1 + n^2)\cdot p^2};$$

so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\text{VII)}\quad \delta U = \left(\frac{n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{n(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{n(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IX)}\quad \left(\frac{n(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot p}{u}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Wenn man die in VIII angedeutete Differentiation ausführt, so bekommt man

$$\text{X)}\quad [1 + n^2 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2]\cdot dp = 0$$

Daraus folgt $dp = 0$, $p = A$, und

$$\text{XI)}\quad y = Ax + B$$

und wenn man diese Gleichung mit V verbindet, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad z = (\mathfrak{A} + nA - n\mathfrak{B})\cdot x + (m + nB)$$

Die Gränzengleichung IX geht jetzt über in

$$\text{XIII)}\quad \frac{n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot A}{\sqrt{1 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2 + 2n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot A + (1 + n^2)\cdot A^2}}\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der Constanten noch mitbenützt werden muss.

Digitized by Google

Hier hat man vier willkürliche Constanten A, B, m, n. Zwei davon, nemlich A und B, sind eingegangen durch Integration der Hauptgleichung VIII; und die beiden andern, nemlich m und n, sind eingegangen durch Integration der Bedingungsgleichung III.

Mutirt man noch einmal, und beachtet man alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U = \frac{n\cdot(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})+(1+n^2)\cdot A}{\sqrt{1+(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})^2+2n\cdot(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})\cdot A+(1+n^2)\cdot A^2}}\cdot(\delta^2 y_\alpha-\delta^2 y_a)$$

$$+\frac{1+n^2+(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})^2}{(1+(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})^2+2n\cdot(\mathfrak{A}-n\mathfrak{B})\cdot A+(1+n^2)\cdot A^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Zweite Auflösung.

Man multiplicire Gleichung III mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x; so ist auch das Product $\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{A}q-\mathfrak{B}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q+p\mathfrak{q})$ noch eine identische Gleichung, und man kann es unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XV)}\quad U=\int_a^\alpha\left[\mathfrak{N}\cdot(\mathfrak{A}q-\mathfrak{B}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q+p\mathfrak{q})+\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}\right]\cdot dx$$

Man mutire, forme um, und setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{XVI)}\quad \delta U=$$

$$\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q}+\frac{p}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(\mathfrak{A}\mathfrak{N}-\mathfrak{p}\mathfrak{N})\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha-\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q}+\frac{p}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(\mathfrak{A}\mathfrak{N}-\mathfrak{p}\mathfrak{N})\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$+\mathfrak{N}_\alpha\cdot(\mathfrak{A}-\mathfrak{p})_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha-\mathfrak{N}_a\cdot(\mathfrak{A}-\mathfrak{p})_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

$$+\left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha-\left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})\right)_a\cdot\delta z_a$$

$$+\mathfrak{N}_\alpha\cdot(-\mathfrak{B}+p)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha-\mathfrak{N}_a\cdot(-\mathfrak{B}+p)_a\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[\left(-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q}+\frac{p}{u}\right)+\frac{1}{dx^2}\cdot d^2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}-\mathfrak{p}\mathfrak{N})\right)\cdot\delta y\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{dx}\cdot d\left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)+\frac{1}{dx^2}\cdot d^2(-\mathfrak{B}\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx$$

Hier hat man die beiden identischen Gleichungen

$$\text{XVII)}\quad -\frac{1}{dx}\cdot d\left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}\right)+\frac{1}{dx^2}\cdot d^2(-\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})=0$$

und

$$\text{XVIII)}\quad -\frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q}+\frac{p}{u}\right)+\frac{1}{dx^2}\cdot d^2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}-\mathfrak{p}\mathfrak{N})=0$$

Dieses sind zwei totale Differentialgleichungen der dritten Ordnung. Wenn man XVII integrirt, so gehen drei willkürliche Constanten ein; wenn man XVIII integrirt, so gehen wieder drei willkürliche Constanten ein; und wenn man III integrirt, so gehen zwei willkürliche Constanten ein. Damit nun jede Spur, der von x herrührenden Mutation verschwindet, bestimme man vier dieser acht Constanten so, dass auch noch folgende vier Gleichungen

$$\text{XIX)}\quad \left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})\right)_\alpha=0$$

$$\text{XX)}\quad \left(-\mathfrak{N}q+\frac{\mathfrak{p}}{u}-\frac{1}{dx}\cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N}+p\mathfrak{N})\right)_a=0$$

Digitized by Google

$$\text{XXI)}\quad \mathfrak{N}_\alpha \cdot (-\mathfrak{B} + p)_\alpha{}' = 0$$

$$\text{XXII)}\quad \mathfrak{N}_a \cdot (-\mathfrak{B} + p)_a = 0$$

stattfinden. Es sind also noch vier willkürliche Constanten zu bestimmen.

Gleichung XVI reducirt sich in Folge alles Vorhergehenden auf

$$\text{XXIII)}\quad \delta U =$$

$$\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q} + \frac{p}{u} - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{A}\mathfrak{N} - \mathfrak{p}\mathfrak{N})\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\mathfrak{N}\mathfrak{q} + \frac{p}{u} - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{A}\mathfrak{N} - \mathfrak{p}\mathfrak{N})\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+ \mathfrak{N}_\alpha \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{p})_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \mathfrak{N}_a \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{p})_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Integrirt man Gleichung XVII, so bekommt man

$$\text{XXIV)}\quad \mathfrak{N}q - \frac{p}{u} + \frac{1}{dx} \cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N} + p\mathfrak{N}) = \mathfrak{H}$$

d. h. constant bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe der durch Integration eingehenden Constanten. Die Gleichungen XIX und XX gehen also über in die einzige

$$\text{XXV)}\quad \mathfrak{H} = 0$$

Dadurch reducirt sich XXIV auf

$$\text{XXVI)}\quad \mathfrak{N}q - \frac{p}{u} + \frac{1}{dx} \cdot d(-\mathfrak{B}\mathfrak{N} + p\mathfrak{N}) = 0$$

Man integrire auch Gleichung XVIII, so bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad -\mathfrak{N}\mathfrak{q} - \frac{p}{u} + \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{A}\mathfrak{N} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}) = \mathfrak{G}$$

Führt man in den beiden Gleichungen die angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXVIII)}\quad 2\mathfrak{N}q - \frac{p}{u} + (-\mathfrak{B} + p) \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0$$

und

$$\text{XXIX)}\quad -2\mathfrak{N}\mathfrak{q} - \frac{p}{u} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{p}) \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \mathfrak{G}$$

Gleichung III lässt sich umformen in

$$\text{XXX)}\quad (-\mathfrak{B} + p) \cdot \mathfrak{q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{p}) \cdot q = 0$$

Daraus folgt $(-\mathfrak{B} + p) = -(\mathfrak{A} - \mathfrak{p}) \cdot \frac{q}{\mathfrak{q}}$; und wenn man $(-\mathfrak{B} + p)$ aus XXVIII eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXXI)}\quad 2\mathfrak{N}q \cdot \mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}}{u} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{p}) \cdot q \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0$$

Wenn man ferner XXIX mit q multiplicirt, so bekommt man

$$\text{XXXII)}\quad -2\mathfrak{N}\mathfrak{q}\mathfrak{q} - \frac{pq}{u} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{p}) \cdot q \cdot \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \mathfrak{G} \cdot q$$

Nun addire man XXXI und XXXII, so gibt sich

$$-\frac{pq + \mathfrak{p}\mathfrak{q}}{u} = \mathfrak{G} \cdot q$$

oder

$$\text{XXXIII)}\quad (\mathfrak{G} \cdot u + p) \cdot q + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0$$

Aus XXX folgt aber $\mathfrak{q} = -\frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{p}}{-\mathfrak{B} + p} \cdot q$; und somit geht XXXIII über in

$$\text{XXXIV)}\quad \left(\mathfrak{G} \cdot u + p - \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{p}}{-\mathfrak{B} + p} \cdot \mathfrak{p}\right) \cdot q = 0$$

Daraus folgt $q = 0$, und man hat

$$\text{XXXV)}\quad y = Ax + B$$

was wieder Gleichung XI ist. Verbindet man diese Gleichung mit V, so bekommt man abermals

Digitized by Google

$$\text{XXXVI)}\quad z = (\mathfrak{A} + nA - n\mathfrak{B})\cdot x + (m + n\cdot B)$$

Daraus folgt, dass bei jedem Werthe des x nachstehende Gleichungen gelten

$$p = A,\qquad q = 0,\quad -\mathfrak{B} + p = A - \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A} + nA - n\mathfrak{B},\quad \mathfrak{q} = 0,\quad \mathfrak{A} - \mathfrak{p} = -n\cdot(A - \mathfrak{B})$$

Die Gleichungen XIX bis XXIII gehen also jetzt über in

$$\text{XXXVII)}\quad \left(\frac{p}{u} - (A - \mathfrak{B})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha = 0$$

$$\text{XXXVIII)}\quad \left(\frac{p}{u} - (A - \mathfrak{B})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a = 0$$

$$\text{XXXIX)}\quad (A - \mathfrak{B})\cdot\mathfrak{N}_\alpha = 0$$

$$\text{XL)}\quad (A - \mathfrak{B})\cdot\mathfrak{N}_a = 0$$

und

$$\text{XLI)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u} + n\cdot(A - \mathfrak{B})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} + n\cdot(A - \mathfrak{B})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$- n\cdot(A - \mathfrak{B})\cdot\mathfrak{N}_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + n\cdot(A - \mathfrak{B})\cdot\mathfrak{N}_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Damit XXXIX und XL erfüllt werden, muss sein

$$\mathfrak{N}_\alpha = 0,\qquad \text{und}\qquad \mathfrak{N}_a = 0$$

Aus XXXVII und XXXVIII folgt

$$\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha = \frac{1}{A - \mathfrak{B}}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha,\quad \text{und}\quad \left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a = \frac{1}{A - \mathfrak{B}}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_a$$

Somit reducirt und transformirt Gleichung XLI sich auf

$$\text{XLII)}\quad \delta U = \left(\frac{p + n\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p + n\cdot\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot\delta y_a$$

Eliminirt man jetzt p und $\mathfrak{p}$, so gibt sich die Gränzengleichung

$$\text{XLIII)}\quad \frac{n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2)\cdot A}{\sqrt{1 + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})^2 + 2n\cdot(\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot A + (1 + n^2)\cdot A^2}}\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welches genau wieder Gleichung XIII ist, und bei Bestimmung der noch übrigen vier Constanten mitbenützt werden muss.

Aus Gleichung V folgt

$$\text{XLIV)}\quad \delta z = n\cdot\delta y,\qquad \text{XLV)}\quad \delta^2 z = n\cdot\delta^2 y$$

und daraus folgt weiter

$$\text{XLVI)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = n\cdot\frac{d\delta y}{dx},\ \text{etc.}$$

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht nun keine weitere Schwierigkeit mehr entgegen.

Erster Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien sowohl den Anfangspunkt (a, b, c) als auch den Endpunkt (α, β, γ) miteinander gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Gränzordinaten y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg.

(Aus den Gleichungen XLIV und XLV folgt, dass bei jedem Werthe des x, bei welchem man δy und $\delta^2 y$ verschwinden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden; und somit ist in diesem Falle auch $\delta z_a = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha = 0$, etc.)

Die Gleichung $y = Ax + B$ geht an den Gränzen über in

$$1)\quad b = A\cdot a + B,\qquad \text{und}\qquad 2)\quad \beta = A\cdot\alpha + B$$

und Gleichung V geht an den Gränzen über in

$$3)\quad c = nb + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot a + m$$

und

$$4)\quad \gamma = n\beta + (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B})\cdot\alpha + m$$

Digitized by Google

Nun sind a und α sowie $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ gegeben. Weil aber vier willkürliche Constanten A, B, m, n bestimmt werden sollen; so kann auch noch der Werth von $c = z_a$ und von $\gamma = z_\alpha$ vorgeschrieben sein.

Zweiter Fall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien nur den Anfangspunkt (a, b, c) gemeinschaftlich haben; so kann auch nur der Werth von y_a bestimmt vorgeschrieben werden, dagegen über den Werth von y_α kann man nicht beliebig verfügen. Hier ist $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc., dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc. können nicht zu Null werden.

(Weil $\delta y_a = 0$ und $\delta^2 y_a = 0$ sind, so werden auch $\delta z_a = 0$ und $\delta^2 z_a = 0$; dagegen δz_α und $\delta^2 z_\alpha$ werden nicht zu Null, weil δy_α und $\delta^2 y_\alpha$ nicht zu Null werden. Alles dieses sind Folgen der Gleichungen XLIV und XLV.)

Weil nun δy_α nicht zu Null wird, so fällt die Gränzengleichung nur weg, wenn

$$5)\quad n \cdot (\mathfrak{A} - n\mathfrak{B}) + (1 + n^2) \cdot A = 0$$

stattfindet. Ausserdem hat man noch die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 des vorigen Falles, d. h. man hat jetzt fünf Gleichungen, welche bei Bestimmung der sieben Stücke m, n, A, B, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$, $\gamma = z_\alpha$ benützt werden müssen, während a, α und $b = y_a$ vorgeschrieben sind. Nun sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien den Anfangspunkt gemeinschaftlich haben; und desshalb darf auch der Werth von $c = z_a$ vorgeschrieben werden. Dann hat man nur noch die sechs Stücke m, n, A, B, $\beta = y_\alpha$ und $\gamma = z_\alpha$, zu deren Bestimmung jedoch nur die fünf Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5 vorhanden sind, so dass ein Stück unbestimmt bleibt, wenn nicht noch eine weitere Bedingung hinzukommt.

Dritter Fall. Ist weder hinsichtlich des Anfangspunktes noch hinsichtlich des Endpunktes aller hier in Betracht zu ziehenden Linien etwas vorgeschrieben; so hat man jetzt die fünf Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5, welche bei Bestimmung der acht Stücke m, n, A, B, $b = y_a$, $c = z_a$, $\beta = y_\alpha$ und $\gamma = z_\alpha$ benützt werden müssen, während a und α gegeben sind. Aber eben weil nur fünf Gleichungen existiren zur Bestimmung jener acht Stücke, so bleiben drei davon unbestimmt, wenn nicht noch andere Bedingungen hinzukommen.

(Man vergleiche die Gränzfälle in der 188sten Aufgabe, wo nur drei willkürliche Constanten, und ebenso die Gränzfälle in der 184sten Aufgabe, wo sogar nur zwei willkürliche Constanten vorkommen.)

Schlussbemerkung. Ist die nemliche, wie die in der 188sten Aufgabe; desshalb genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgabe 192.

Man soll unter den räumlichen Curven, deren Krümmungsebenen alle durch den festen Punkt (g, h, k) gehen, diejenige heraussuchen, welche zwischen zwei zu festen Abscissen gehörigen Punkten die kürzeste ist.

Jede räumliche Curve, durch welche folgende totale Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\text{I)}\quad (k - z) \cdot q - (h - y) \cdot \mathfrak{q} - (g - x) \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) = 0$$

identisch wird, hat (nach Aufgabe 122) die Eigenschaft, dass alle ihre Krümmungsebenen durch den festen Punkt (g, h, k) gehen. Die Durchführung der Aufgabe wird, ihrer Allgemeinheit unbeschadet, vereinfacht, wenn man den festen Punkt (g, h, k) als Anfang der Coordinaten wählt. Dabei geht Gleichung I über in

$$\text{II)}\quad -z \cdot q + y \cdot \mathfrak{q} + x \cdot (\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q}) = 0$$

Wenn nach dieser Verlegung des Coordinatenanfangs die festen Abscissen mit a und α bezeichnet werden; so ist die Aufgabe jetzt folgende: Es soll

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\right) \cdot dx$$

Digitized by Google

ein Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen nur solche zusammengehörige sein dürfen, bei welchen Gleichung II identisch wird.

Erste Auflösung.

Man integrire Gleichung II, welche, weil y und z Functionen von x sind, eine totale Differentialgleichung ist; und es gibt sich (nach Aufgabe 122)

$$\text{IV)}\quad mz + ny = x$$

wo n und m zwei willkürliche Constanten sind. Durch diese Gleichungen sind alle möglichen Ebenen dargestellt, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Liegt aber in so einer Ebene eine Curve, so ist diese eine ebene Curve; und somit ist die Ebene auch Krümmungsebene für alle Punkte der in ihr liegenden Curven.

Aus IV folgt $z = \frac{x - ny}{m}$ und $\mathfrak{p} = \frac{1 - np}{m}$; und wenn man $\mathfrak{p}$ aus III eliminirt, so bekommt man

$$\text{V)}\quad U = \frac{1}{m} \cdot \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + m^2 - 2np + (m^2 + n^2) \cdot p^2}\right) \cdot dx$$

Man mutire, forme um, und setze zur Abkürzung noch Q anstatt

$$\sqrt{1 + m^2 - 2np + (m^2 + n^2) \cdot p^2}$$

so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot p}{Q}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot p}{Q}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$- \frac{1}{m} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot p}{Q}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot p}{Q}\right) = 0$$

und wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so bekommt man $m^2 \cdot (1 + m^2 + n^2) \cdot dp = 0$, d. h. $dp = 0$; und daraus folgt

$$\text{VIII)}\quad y = Ax + B$$

Wenn man diese Gleichung mit IV verbindet, so gibt sich

$$\text{IX)}\quad z = \frac{1 - An}{m} \cdot x - \frac{n}{m} \cdot B$$

Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{X)}\quad \frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot A}{m \cdot \sqrt{1 + m^2 - 2An + (m^2 + n^2) \cdot A^2}} \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welche bei Bestimmung der Constanten noch mitbenützt werden muss.

Hier hat man vier willkürliche Constanten A, B, m, n. Zwei davon, nemlich A und B, sind eingegangen durch Integration der Hauptgleichung VII; und die beiden andern, nemlich m und n, sind eingegangen durch Integration der Bedingungsgleichung II.

Mutirt man noch einmal, und beachtet man alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \frac{-n + (m^2 + n^2) \cdot A}{m \cdot \sqrt{1 + m^2 - 2An + (m^2 + n^2) \cdot A^2}} \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a)$$

$$+ \frac{m \cdot (1 + m^2 + n^2)}{(1 + m^2 - 2An + (m^2 + n^2) \cdot A^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Zweite Auflösung.

Man multiplicire Gleichung II mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{R}$ von x; so ist auch das Product $\mathfrak{R} \cdot (-zq + yq + x\mathfrak{p}q - x\mathfrak{p}q)$

Digitized by Google

noch eine identische Gleichung. Diese kann man unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XII)}\quad U = \int_a^\alpha [\mathfrak{N}\cdot(-zq + y\mathfrak{q} + x\mathfrak{p}q - xp\mathfrak{q}) + \sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}]\cdot dx$$

Man mutire, forme um, und setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \delta U =$$

$$\left(\frac{p}{u} - 2\mathfrak{N}x\cdot\mathfrak{q} + (z - x\mathfrak{p})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} - 2\mathfrak{N}x\mathfrak{q} + (z - x\mathfrak{p})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$-\mathfrak{N}_\alpha\cdot(z - x\mathfrak{p})_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \mathfrak{N}_a\cdot(z - x\mathfrak{p})_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

$$+\left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + 2\mathfrak{N}xq - (y - xp)\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha - \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + 2\mathfrak{N}xq - (y - xp)\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a\cdot\delta z_a$$

$$+\mathfrak{N}_\alpha\cdot(y - xp)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha - \mathfrak{N}_a\cdot(y - xp)_a\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha\Bigg[\left(\mathfrak{N}\mathfrak{q} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u} - \mathfrak{N}x\cdot\mathfrak{q}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2(-\mathfrak{N}z + \mathfrak{N}x\mathfrak{p})\right)\cdot\delta y$$

$$+\left(-\mathfrak{N}q - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + \mathfrak{N}xq\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2(\mathfrak{N}y - \mathfrak{N}xp)\right)\cdot\delta z\Bigg]\cdot dx$$

Hier hat man die beiden identischen Gleichungen

$$\text{XIV)}\quad -\mathfrak{N}q - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + \mathfrak{N}xq\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2(\mathfrak{N}y - \mathfrak{N}xp) = 0$$

und

$$\text{XV)}\quad \mathfrak{N}\mathfrak{q} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u} - \mathfrak{N}x\mathfrak{q}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2(-\mathfrak{N}z + \mathfrak{N}x\mathfrak{p}) = 0$$

Dieses sind zwei totale Differentialgleichungen der dritten Ordnung. Wenn man XIV integrirt, so gehen drei willkürliche Constanten ein; wenn man XV integrirt, so gehen wieder drei willkürliche Constanten ein; und wenn man II integrirt, so gehen zwei willkürliche Constanten ein. Damit nun jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man vier dieser acht Constanten so, dass auch noch folgende vier Gleichungen

$$\text{XVI)}\quad \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + 2\mathfrak{N}xq - (y - xp)\,\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha = 0$$

$$\text{XVII)}\quad \left(\frac{\mathfrak{p}}{u} + 2\mathfrak{N}xq - (y - xp)\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a = 0$$

$$\text{XVIII)}\quad \mathfrak{N}_\alpha\cdot(y - xp)_\alpha = 0$$

$$\text{XIX)}\quad \mathfrak{N}_a\cdot(y - xp)_a = 0$$

stattfinden. Es sind also noch vier willkürliche Constanten zu bestimmen.

Gleichung XIII reducirt sich in Folge alles Vorhergehenden jetzt auf

$$\text{XX)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u} - 2\mathfrak{N}x\mathfrak{q} + (z - x\mathfrak{p})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} - 2\mathfrak{N}x\mathfrak{q} + (z - x\mathfrak{p})\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$-\mathfrak{N}_\alpha\cdot(z - x\mathfrak{p})_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \mathfrak{N}_a\cdot(z - x\mathfrak{p})_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Man führe jetzt die in den Gleichungen XIV und XV angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXI)}\quad -\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{u}\right) - 3\mathfrak{N}q - 2\mathfrak{N}x\cdot\frac{dq}{dx} - 3xq\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + (y - xp)\cdot\frac{d^2\mathfrak{N}}{dx^2} = 0$$

$$\text{XXII)}\quad -\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) + 3\mathfrak{N}\mathfrak{q} + 2\mathfrak{N}x\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dx} + 3x\mathfrak{q}\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dx} - (z - x\mathfrak{p})\cdot\frac{d^2\mathfrak{N}}{dx^2} = 0$$

Digitized by Google

Man multiplicire XXI mit $\mathfrak{q}$, und XXII mit q, und addire dann beide Producte; so gibt sich

$$\text{XXIII)}\quad -\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}}\right) + \mathfrak{N}x\cdot\left(q\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dx} - \mathfrak{q}\cdot\frac{dq}{dx}\right)$$

$$+ \left((y - px)\cdot\mathfrak{q} - (z - \mathfrak{p}x)\cdot q\right)\cdot\frac{d^2\mathfrak{N}}{dx^2} = 0$$

Gleichung II lässt sich auch in folgende umformen

$$\text{XXIV)}\quad (y - px)\cdot\mathfrak{q} - (z - \mathfrak{p}x)\cdot q = 0$$

und so erkennt man, dass der bei $\frac{d^2\mathfrak{N}}{dx^2}$ befindliche Factor gleich Null ist, dass also Gleichung XXIII sich zurückzieht auf

$$\text{XXV)}\quad -\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}}\right) + \mathfrak{N}x\cdot\left(q\cdot\frac{d\mathfrak{q}}{dx} - \mathfrak{q}\cdot\frac{dq}{dx}\right) = 0$$

Wenn man Gleichung II differentiirt, so bekommt man

$$\frac{d\mathfrak{q}}{dx} = \frac{z - \mathfrak{p}x}{y - px}\cdot\frac{dq}{dx}$$

Nun eliminire man $\frac{d\mathfrak{q}}{dx}$ aus XXV, so gibt sich

$$-\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}}\right) - \mathfrak{N}x\cdot\frac{(y - xp)\cdot\mathfrak{q} - (z - x\mathfrak{p})\cdot q}{y - xq}\cdot\frac{dq}{dx} = 0$$

so dass auch der bei $\mathfrak{N}$ befindliche Factor zu Null wird (man sehe XXIV), und letztere Gleichung sich zurückzieht auf

$$\text{XXVI)}\quad -\mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) - q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}}\right) = 0$$

Man sondere aus II das $\mathfrak{q}$ ab, so gibt sich

$$\mathfrak{q} = \frac{z - x\mathfrak{p}}{y - xp}\cdot q$$

und wenn man $\mathfrak{q}$ aus XXVI eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad -\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) + \frac{z - x\mathfrak{p}}{y - xp}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{u}}\right)\right)\cdot q = 0$$

d. h. es ist $q = 0$, woraus

$$\text{XXVIII)}\quad y = Ax + B$$

folgt, was wieder Gleichung VIII ist. Verbindet man diese Gleichung mit IV, so bekommt man abermals

$$\text{XXIX)}\quad z = \frac{1 - An}{m}\cdot x - \frac{n}{m}B$$

Daraus folgt, dass bei jedem Werthe des x nachstehende Gleichungen gelten:

$$p = A,\quad q = 0,\quad y - xp = B$$

$$\mathfrak{p} = \frac{1 - An}{m},\quad \mathfrak{q} = 0,\quad z - x\mathfrak{p} = -\frac{n}{m}\cdot B$$

Die Gleichungen XVI bis XX gehen also jetzt über in

$$\text{XXX)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha - B\cdot\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha = 0$$

$$\text{XXXI)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_a - B\cdot\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a = 0$$

$$\text{XXXII)}\quad B\cdot\mathfrak{N}_\alpha = 0$$

$$\text{XXXIII)}\quad B\cdot\mathfrak{N}_a = 0$$

Digitized by Google

$$\text{XXXIV)}\quad \delta U = \left(\frac{p}{u} - \frac{n}{m}\cdot B\cdot\frac{d\mathfrak{R}}{dx}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u} - \frac{n}{m}\cdot B\cdot\frac{d\mathfrak{R}}{dx}\right)_a\cdot\delta y_a$$
$$+ \frac{n}{m}\cdot B\cdot\mathfrak{R}_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha - \frac{n}{m}\cdot B\cdot\mathfrak{R}_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

Damit XXXII und XXXIII erfüllt werden, muss sein

$$\mathfrak{R}_\alpha = 0, \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_a = 0$$

Aus XXX und XXXI folgt

$$\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dx}\right)_\alpha = \frac{1}{B}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha, \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dx}\right)_a = \frac{1}{B}\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_a$$

Somit reducirt und transformirt Gleichung XXXIV sich in folgende

$$\text{XXXV)}\quad \delta U = \left(\frac{mp - n\mathfrak{p}}{m\cdot u}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{mp - n\mathfrak{p}}{m\cdot u}\right)_a\cdot\delta y_a$$

Eliminirt man jetzt p und $\mathfrak{p}$, so gibt sich die Gränzengleichung

$$\text{XXXVI)}\quad \frac{-n + (m^2+n^2)\cdot A}{m\cdot\sqrt{1 + m^2 - 2An + (m^2+n^2)\cdot A^2}}\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

welches genau wieder Gleichung X ist, und bei Bestimmung der noch übrigen vier Constanten mitbenützt werden muss.

Aus Gleichung IV folgt

$$\text{XXXVII)}\quad \delta z = -\frac{n}{m}\cdot\delta y, \qquad \text{XXXVIII)}\quad \delta^2 z = -\frac{n}{m}\cdot\delta^2 y$$

und daraus folgt weiter

$$\text{XXXIX)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = -\frac{n}{m}\cdot\frac{d\delta y}{dx}, \text{ etc.}$$

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht nun keine weitere Schwierigkeit mehr entgegen.

Was die Bestimmung der vier Constanten m, n, A, B betrifft, so kann man sich Gränzfälle bilden, wie bei der vorigen Aufgabe.

Auch bemerke man abermals, dass diese zweite Auflösung durchgeführt werden konnte, ohne dass es nöthig war, die Function $\mathfrak{R}$ von x kennen zu lernen.

Schlussbemerkung. Ist die nemliche, wie die der 188[sten] Aufgabe; desshalb genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgabe 193.

Unter allen räumlichen Curven, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft haben, dass die goniometrische Tangente des von der Berührungslinie und irgend einer festen Ebene gebildeten Winkels immer den nemlichen constanten Werth m behält, sucht man diejenige heraus, deren zu zwei festen Abscissen gehöriger Bogen mit der Curve der Krümmungsmittelpunkte und mit den den beiden Gränzpunkten entsprechenden Krümmungshalbmessern die kleinste Fläche einschliesst.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man besagte feste Ebene zur Coordinatenebene XY nimmt. Dann ist des genannten Winkels goniometrische Tangente $= \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2}}$; und wenn der bestimmte Werth, welchen diese goniometrische Tangente beständig behalten soll, durch m bezeichnet wird, so hat man die Gleichung

$$\text{I)}\quad \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2}} = m$$

Die festen Abscissen, welche der Anfangs- und Endgränze entsprechen, seien a und α;



und da die Krümmungshalbmesser der räumlichen Curven bekanntlich

$$= \frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2}}$$

sind, so ist die Ausdehnung der auf vorgeschriebene Weise begränzten Fläche gegeben durch

$$\text{II)} \quad U = \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \frac{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^2}{\sqrt{(p \cdot \mathfrak{q} - \mathfrak{p} \cdot q)^2 + q^2 + \mathfrak{q}^2}} \cdot dx$$

Dieser Ausdruck soll ein Minimum-stand werden, während die für y und z zu suchenden Functionen von x solche zusammengehörige sein müssen, dass auch noch Gleichung I erfüllt wird.

Erste Auflösung.

Aus I folgt $\mathfrak{p} = m \cdot \sqrt{1 + p^2}$ und $\mathfrak{q} = \frac{m \cdot p \cdot q}{\sqrt{1 + p^2}}$. Eliminirt man $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aus II, so gibt sich

$$\text{III)} \quad U = \frac{1}{2} \cdot (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_a^\alpha \frac{(1 + p^2)^2}{q} \cdot dx$$

Man mutire, und führe die gehörige Umformung aus; so bekommt man für die zweite Form des δU

$$\text{IV)} \quad \delta U = -\frac{1}{2} \cdot (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 \right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\left(\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \right]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot (1 + m^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\left(\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 \right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \right]$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{4p \cdot (1 + p^2)}{q}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 = 0$$

Man bekommt daher (wie in der 173sten Aufgabe) die zwei Gleichungen

$$\text{VI)} \quad x = H + \frac{F \cdot p - E}{4 \cdot (1 + p^2)} + \frac{F}{4} \cdot \text{arc tg } p$$

und

$$\text{VII)} \quad y = K + \frac{p \cdot (F \cdot p - E)}{4 \cdot (1 + p^2)} + \frac{E}{4} \cdot \text{arc tg } p$$

Die in der Coordinatenebene XY liegende Projection der gesuchten Curve ist also eine Cycloide.

Eliminirt man arc tg p, so ergibt sich der Ausdruck für $\sqrt{1 + p^2}$; und Gleichung I geht über in

$$\mathfrak{p} = \frac{m \cdot (F \cdot p - E)}{2 \cdot \sqrt{F \cdot y - E \cdot x + E \cdot H - F \cdot K}}$$

Wenn man wieder $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ bezüglich statt $\mathfrak{p}$ und p zurückführt, mit dx multiplicirt und dann integrirt; so bekommt man

$$z + N = m \cdot \sqrt{F \cdot y - E \cdot x + E \cdot H - F \cdot K}$$

oder

$$\text{VIII)} \quad (z + N)^2 = F \cdot m^2 \cdot (y - K) - E \cdot m^2 \cdot (x - H)$$

Durch diese Gleichung ist die Fläche dargestellt, in welcher unsere Curve mit allen ihren Punkten liegt.

Als Gränzengleichung hat man jetzt

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) - \left(\frac{E\cdot p + F}{2q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{E\cdot p + F}{2q}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Man hat hier fünf willkürliche Constanten. Vier davon, nemlich E, F, H, K, sind eingegangen durch Integration der Hauptgleichung V; und einer, nemlich N, ist eingegangen durch Integration der Bedingungsgleichung I.

Man mutire noch einmal, forme um, und beachte alles Verhergehende; so gibt sich

$$\text{X)}\quad \delta^2 U =$$

$$(1+m^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\int_a^\alpha \frac{1}{q}\cdot\left[2(1+p^2)\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(2p\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{1+p^2}{q}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\right]\cdot dx$$

$$+\frac{1}{2}\cdot(1+m^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\left[E\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) - \left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a\right]$$

Zweite Auflösung.

Man forme Gleichung I um in $\mathfrak{p} = m\cdot\sqrt{1+p^2}$. Quadrirt man, so gibt sich $\mathfrak{p}^2 = m^2\cdot(1+p^2)$; und daraus folgt die identische Gleichung $\mathfrak{p}^2 - m\cdot(1+p^2) = 0$. Wenn man diese mit irgend einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{R}$ multiplicirt; so ist auch das Product $\mathfrak{R}\cdot[\mathfrak{p}^2 - m^2\cdot(1+p^2)]$ eine identische Gleichung. Dieses kann man unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$U = \frac{1}{2}\cdot\int_a^\alpha\left[\mathfrak{R}\cdot[\mathfrak{p}^2 - m^2\cdot(1+p^2)] + \frac{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^2}{\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}}\right]\cdot dx$$

Wenn man jetzt mutirt, und die gehörigen Umformungen ausführt; so werden ausserhalb des Integralzeichens die zu $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$ gehörigen Coefficienten nicht mit $\mathfrak{R}_a$ und $\mathfrak{R}_\alpha$ versehen sein, so dass zur Wegbringung der beiden Ausdrücke $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$ noch eine directe Elimination nöthig wäre. Dieser Weitläufigkeit entgeht man, wenn man (nach Bd. I. S. 327) die identische Gleichung $\mathfrak{p}^2 - m^2(1+p^2) = o$ zuerst differentiirt. Dadurch bekommt man die fernere identische Gleichung

$$\text{XI)}\quad \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q} - m^2\cdot pq = 0$$

Wenn man diese mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x multiplicirt: so ist auch das Product $L\cdot(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - m^2\cdot pq)$ eine identische Gleichung. Dieses kann man unter das Integralzeichen addiren, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XII)}\quad U = \frac{1}{2}\cdot\int_a^\alpha\left[L\cdot(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - m^2\cdot pq) + \frac{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)^2}{\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}}\right]\cdot dx$$

Man mutire, und setze zur Abkürzung R statt $(1+p^2+\mathfrak{p}^2)$, und Q statt $\sqrt{(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)^2+q^2+\mathfrak{q}^2}$; so bekommt man zunächst

$$\text{XIII)}\quad \delta U = \frac{1}{2}\cdot\int_a^\alpha\left[\left(-Lm^2\cdot q + \frac{4pR}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)\,\mathfrak{q}\right)\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right.$$

$$+\left(-Lm^2\cdot p - \frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)\right)\cdot\frac{d^2\delta y}{dx}$$

$$\left.+\left(L\mathfrak{q} + \frac{4\mathfrak{p}R}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,q\right)\cdot\frac{d\delta z}{dx} + \left(L\mathfrak{p} - \frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,p + \mathfrak{q})\right)\cdot\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right]\cdot dx$$

Formt man um, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{XIV)}\quad \delta U =$$

$$\frac{1}{2}\left(-Lm^2\cdot q+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-\mathfrak{p}q)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,\mathfrak{p}+q)\right]\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\left(-Lm^2\cdot q+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-\mathfrak{p}q)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,q+q)\right]\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$+\frac{1}{2}\left(-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,\mathfrak{p}+q)\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\left(-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,\mathfrak{p}+q)\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

$$+\frac{1}{2}\left(Lq+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q-pq)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right]\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha$$

$$-\frac{1}{2}\left(Lq+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q-pq)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right]\right)_a\cdot\delta z_a$$

$$+\frac{1}{2}\left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha-\frac{1}{2}\left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,q+q)\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\alpha\left[\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(-Lm^2\cdot q+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-\mathfrak{p}q)\,q\right)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,\mathfrak{p}+q)\right)\right)\cdot\delta y$$

$$\left.+\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(Lq+\frac{4\mathfrak{p}R}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q\right)-\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right)\right).\delta z\right].dx$$

Hier hat man die beiden identischen Gleichungen

$$\text{XV)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left[Lq+\frac{4\mathfrak{p}R}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q\right]-\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left[L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right]=0$$

und

$$\text{XVI)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left[-Lm^2\cdot q+\frac{4pR}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q\right]$$

$$-\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left[-Lm^2\cdot p-\frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q-pq)\,\mathfrak{p}+q)\right]=0$$

Dieses sind zwei totale Differentialgleichungen der vierten Ordnung. Wenn man XV integrirt, so gehen vier willkürliche Constanten ein; wenn man XVI integrirt, so gehen wieder vier willkürliche Constanten ein; und wenn man I integrirt, so geht ein willkürlicher Constanter ein. Damit nun jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwindet, bestimme man vier dieser neun Constanten so, dass auch noch folgende vier Gleichungen

$$\text{XVII)}\quad \left(Lq+\frac{4\mathfrak{p}R}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right]\right)_\alpha=0$$

$$\text{XVIII)}\quad \left(Lq+\frac{4\mathfrak{p}R}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left[L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right]\right)_a=0$$

$$\text{XIX)}\quad \left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right)_\alpha=0$$

$$\text{XX)}\quad \left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right)_a=0$$

stattfinden. Integrirt man Gleichung XV, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad Lq+\frac{4\mathfrak{p}R}{Q}-\frac{R^2}{Q^3}(pq-pq)\,q-\frac{1}{dx}\cdot d\left(L\mathfrak{p}-\frac{R^2}{Q^3}((pq-\mathfrak{p}q)\,p+q)\right)=G$$

d. h. constant bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe der durch Integration

Digitized by Google

eingehenden Constanten. Die Gleichungen XVII und XVIII gehen also über in die einzige

$$\text{XXII)} \quad G = 0$$

Dadurch reducirt sich auch Gleichung XXI auf

$$\text{XXIII)} \quad L\mathfrak{q} + \frac{4\mathfrak{p}R}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,q - \frac{1}{dx}\cdot d\left[L\mathfrak{p} - \frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,p + \mathfrak{q})\right] = 0$$

Man integrire auch XVI, so bekommt man

$$\text{XXIV)} \quad -Lm^2\cdot q + \frac{4pR}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,\mathfrak{q} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(-Lm^2\cdot p - \frac{R^2}{Q^3}((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q\right) = B$$

Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{XXV)} \quad B\cdot\delta y_\alpha + \left(-Lm^2\cdot p - \frac{R^2}{Q^3}\cdot((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- B\cdot\delta y_a - \left(-Lm^2\cdot p - \frac{R^2}{Q^3}\cdot((\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

welche bei Bestimmung der noch übrigen fünf Constanten mitbenützt werden muss.

Wenn man in Gleichung XXIII bei $L\mathfrak{p}$ die angezeigte Differentiation ausführt, so bleibt nur

$$\text{XXVI)} \quad \frac{4\mathfrak{p}R}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\cdot q - \frac{dL}{dx}\cdot\mathfrak{p} + \frac{1}{dx}\cdot d\left[\frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,p + \mathfrak{q})\right] = 0$$

Wenn man ebenso in Gleichung XXIV bei $-Lm^2\cdot p$ die angezeigte Differentiation ausführt, so bleibt nur

$$\text{XXVII)} \quad \frac{4pR}{Q} - \frac{R^2}{Q^3}(p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,\mathfrak{q} + \frac{dL}{dx}\cdot m^2\cdot p + \frac{1}{dx}\cdot d\left[\left(\frac{R^2}{Q^3}(\mathfrak{p}q - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q\right)\right] = B$$

Man multiplicire Gleichung XXVI mit q und Gleichung XXVII mit $\mathfrak{q}$, und addire beide Producte; so gibt sich

$$\text{XXVIII)} \quad \frac{4(p\mathfrak{q} + \mathfrak{p}q)\cdot R}{Q} - \frac{dL}{dx}(\mathfrak{p}q - m^2\cdot p\mathfrak{q}) + \mathfrak{q}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left[\frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\,p + \mathfrak{q})\right]$$

$$+ q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left[\frac{R^2}{Q^3}((p\mathfrak{q} - p\mathfrak{q})\,\mathfrak{p} + q)\right] = B\cdot q$$

Aus Gleichung I folgt $\mathfrak{p} = m\cdot\sqrt{1 + p^2}$ und $\mathfrak{q} = \frac{m\cdot p\cdot q}{\sqrt{1 + p^2}}$. Wenn man nun für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ die Ausdrücke in XXVIII einsetzt, so wird

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} - m^2\cdot p\mathfrak{q} = 0, \qquad \text{und} \qquad (p\mathfrak{q} - \mathfrak{p}q)\cdot p + \mathfrak{q} = 0$$

und es bleibt nur

$$\text{XXIX)} \quad 4p(1 + p^2)\cdot(1 + m^2)^{\frac{3}{2}} + q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(1 + p^2)^2}{q^2}\cdot(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}\right) = B\cdot q$$

Man dividire diese ganze Gleichung mit $q\cdot(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}$; so gibt sich

$$\frac{4p\cdot(1 + p^2)}{q} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1 + p^2}{q}\right)^2 = \frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man E statt $\frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$ setzt, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XXX)} \quad \frac{4p\cdot(1 + p^2)}{q} + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{1 + p^2}{q^2}\right)^2 = E$$

was genau wieder die Gleichung ist, welche sich als erstes Integral der Gleichung V ergeben hat.

Aus XIX und XX folgt

Digitized by Google

$$\text{XXXI)}\quad L_\alpha = \left(\frac{R^2}{p\cdot Q^3}\cdot[(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)\cdot p+\mathfrak{q}]\right)_\alpha$$

und

$$\text{XXXII)}\quad L_\mathfrak{a} = \left(\frac{R^2}{p\cdot Q^3}\cdot[(p\mathfrak{q}-\mathfrak{p}q)\cdot p+\mathfrak{q}]\right)_\mathfrak{a}$$

Eliminirt man jetzt L_α, $L_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ aus XV; so bekommt man

$$\text{XXXIII)}\quad B\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_\mathfrak{a}) - (1+m^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1+p^2}{q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$
$$+ (1+m^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2_\mathfrak{a}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\mathfrak{a} = 0$$

Wenn man diese ganze Gleichung mit $(1+m^2)^{\frac{3}{2}}$ dividirt, und dann E statt $\frac{B}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$ setzt, so geht sie über in

$$\text{XXXIV)}\quad E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_\mathfrak{a}) - \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2_\mathfrak{a}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\mathfrak{a} = 0$$

Wenn man (wie in Aufgabe 173 geschehen ist) Gleichung XXX integrirt, so gibt sich

$$\left(\frac{1+p^2}{q}\right)^2 = \frac{Ep+F}{2q}$$

und somit geht Gleichung XXXIV über in

$$\text{XXXV)}\quad E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_\mathfrak{a}) - \left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{Ep+F}{2q}\right)_\mathfrak{a}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\mathfrak{a} = 0$$

was genau wieder Gleichung IX ist.

Wenn man $\mathfrak{p} = m\cdot\sqrt{1+p^2}$ mutirt, so bekommt man

$$\text{XXXVI)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{mp}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{XXXVII)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{mp}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{m}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

etc. etc.

Wenn man $\mathfrak{p} = m\cdot\sqrt{1+p^2}$ differentiirt, so bekommt man $\mathfrak{q} = \frac{m\cdot p\cdot q}{\sqrt{1+p^2}}$; und wenn man diese Gleichung mutirt, so bekommt man

$$\text{XXXVIII)}\quad \frac{d^2\delta z}{dx^2} = \frac{mq}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{m\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht nun keine weitere Schwierigkeit mehr entgegen.

Man denke sich Gleichung I integrirt, und z abgesondert; so bekommt man $z = \mathfrak{z}(x, y, N)$, wo N der durch Integration eingegangene Constante ist. Daraus folgt

$$\delta z = \frac{d_y\mathfrak{z}}{dy}\cdot\delta y,\quad \delta^2 z = \frac{d_y\mathfrak{z}}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_y^2\mathfrak{z}}{dy^2}\cdot\delta y^2$$

Hierdurch ist die Abhängigkeit gegeben, in welcher δz, $\delta^2 z$, etc. zu δy, $\delta^2 y$, etc. stehen. Namentlich erkennt man, dass, wenn $\delta y_\mathfrak{a} = 0$, $\delta^2 y_\mathfrak{a} = 0$, etc. ist, auch nothwendig $\delta z_\mathfrak{a} = 0$, $\delta^2 z_\mathfrak{a} = 0$, etc. sein muss; und so fort.

Bei Bestimmung der fünf willkürlichen Constanten E, F, H, K, N verfahrt man nach Analogie der frühern Aufgaben.

Auch bemerke man abermals, dass diese zweite Auflösung durchgeführt werden konnte, ohne dass es nöthig war, die Function L von x kennen zu lernen.

Digitized by Google

Schlussbemerkung. Ist die nemliche, wie die der 188sten Aufgabe; desshalb genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgabe 194.

Man sucht eine Curve, welche, wenn sie um die Axe X rotirt, eine Rotationsfläche erzeugt, die, während sie nach der Richtung dieser Axe in einem flüssigen Mittel sich bewegt, den geringsten Widerstand erleidet.

Der Widerstand, welchen eine auf vorgeschriebene Weise sich bewegende Rotationsfläche erleidet, ist (nach der Theorie der Hydrodynamik) proportional mit

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \frac{2\pi \cdot y \cdot p^3}{1 + p^2} \cdot dx$$

Daraus folgt für die zweite Form des δU

$$\text{II)}\quad \delta U = 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{p^3}{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y \cdot p^2 \cdot (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ 2\pi \cdot \left(\frac{y \cdot p^2 \cdot (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2\pi \cdot \left(\frac{y \cdot p^2 \cdot (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}\right)_a \cdot \delta y_a$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{III)}\quad \frac{p^3}{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y \cdot p^2 \cdot (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}\right) = 0$$

Wenn man die angedeutete Differentiation ausführt, so bekommt man eine Differentialgleichung, welche man auf folgende Weise zerlegen kann

$$\text{IV)}\quad -\frac{dy}{y} = \frac{3 \cdot dp}{p} - \frac{4p \cdot dp}{1 + p^2}$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$\text{V)}\quad \lg\text{nat}\,\frac{1}{y} = \lg\text{nat}\,p^3 - \lg\text{nat}\,(1 + p^2) + A$$

Daraus folgt mit Aenderung des Constanten

$$\text{VI)}\quad y = B \cdot \frac{(1 + p^2)^2}{p^3}$$

Da $\frac{dy}{dx} = p$, so ist

$$\text{VII)}\quad dx = \frac{1}{p} \cdot dy$$

Nun folgt aus VI, dass $dy = d\left(B \cdot \frac{(1 + p^2)^2}{p^3}\right)$; und somit geht Gleichung VII über in

$$\text{VIII)}\quad dx = \frac{1}{p} \cdot d\left(B \cdot \frac{(1 + p^2)^2}{p^3}\right)$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad x = C + B \cdot \left(\frac{3}{4 \cdot p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \lg\text{nat}\,p\right)$$

Die gesuchte Curve ist also durch zwei Gleichungen (VI und IX) gegeben, und kann durch ihre Tangenten construirt werden.

Die Gränzengleichung geht nun über in

$$\text{X)}\quad B \cdot \left(\frac{3 + p^2}{p}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - B \cdot \left(\frac{3 + p^2}{p}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Alles Weitere wie gewöhnlich.

Schlussbemerkung. Dieses Problem ist das erste unter denen, wo sogar die Curve selbst, welche einen von ihr auf bestimmte Weise abhängigen Ausdruck zu einem

Digitized by Google

Maximum-stande oder Minimum-stande macht, gesucht wird. Newton ist es, der, noch ehe eine andere Untersuchung solcher Art angestellt war, die hiesige Aufgabe gelöst hat, man weiss aber nicht, auf welche Weise. Wer Newton's Schriften vergleichen will, lese: „Principia philos. naturalis mathematica. Sect. II. prop. 35. Sch. Ausgabe von 1687." (In den neuern Ausgaben aber prop. 34. Sch.)

Auch findet sich diese Aufgabe in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. S. 51).

Aufgabe 195.

Zwischen zwei, in einer verticalen Ebene liegenden, horizontalen (also parallelen) Graden sucht man diejenige ebene Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der oberen Graden zur unteren herabfällt, wenn dabei weder Reibung noch ein widerstehendes Mittel stattfindet.

Die hier gesuchte Linie wird die Brachystochrone genannt, d. h. Linie des schnellsten Falles. Denselben Namen führen auch die Linien in den acht folgenden Aufgaben.

Der fallende Punkt unterliegt hier nur dem Gesetze der Schwere g, und ist ausserdem gezwungen, in einer ebenen Curve zu bleiben, die aber noch gesucht werden soll.

Man nehme die Axe X horizontal und die Axe Y vertical. Ferner alle positiven y sollen von oben nach unten gerichtet sein, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen. t sei die Zeit, s sei die während der Zeit t durchlaufene Bahn, v sei die am Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit, und ξ sei die bei der Geschwindigkeit v wirkende Kraft. Die Grundgleichungen der Bewegung sind bekanntlich

$$\text{I)}\quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{und} \quad \text{II)}\quad \xi = \frac{dv}{dt}$$

Daraus folgt weiter

$$\text{III)}\quad \xi = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{v \cdot dv}{ds}$$

wobei s, v und ξ Functionen der Zeit t sind. Aus I folgt nun $dt = \frac{ds}{v}$, oder, was dasselbe ist

$$\text{IV)}\quad dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$$

so dass zur Herstellung der Aufgabe nur noch v als Function von y zu bestimmen ist.

Jede Kraft lässt sich in andere zerlegen, welche mit den Coordinatenaxen parallel wirken. Diejenige Kraft Q, welche den sich bewegenden Punkt zwingt, in der festen Bahn zu bleiben, wirkt senkrecht auf die jedesmalige Tangente, d. h. in der Richtung der jedesmaligen Normale, welche mit der Axe X den (von den Coordinaten abhängigen) Winkel ε, und mit der Axe Y den (gleichfalls von den Coordinaten abhängigen) Winkel ε' bilden mag. Die mit den Coordinatenaxen parallel wirkenden Kräfte sind also jetzt:

$$\text{V)}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = Q \cdot \cos\varepsilon, \quad \text{und} \quad \text{VI)}\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g + Q \cdot \cos\varepsilon'$$

Man multiplicire die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, und addire beide Producte; so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2} = g \cdot dy + Q \cdot ((\cos\varepsilon) \cdot dx + (\cos\varepsilon') \cdot dy)$$

Nun folgt aus der Gleichung der Normale, dass $(\cos\varepsilon) \cdot dx + (\cos\varepsilon') \cdot dy = 0$ ist. Ferner ist $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$; und daraus folgt $\frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2} = v \cdot dv$. Die Gleichung VII geht also über in

$$\text{VIII)}\quad v \cdot dv = g \cdot dy$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{IX)}\quad v^2 = 2g \cdot y + 2k$$

oder

$$\text{X)}\quad v = \sqrt{2g \cdot y + 2k}$$

Digitized by Google

Hier ist 2k der durch die Integration eingegangene Constante. Man hat also, schon ehe man die gesuchte Curve kennt, für die Geschwindigkeit v eine ganz bestimmte und nur von der Fallhöhe y abhängige Function. Man erkennt sonach:

„Beim Falle, wo weder ein widerstehendes Mittel noch Reibung stattfindet, hat „der fallende Punkt in irgend einer Stelle der gesuchten Curve dieselbe Ge„schwindigkeit, wie wenn er rein vertical bis in eine dieser Stelle gleichkom„mende Tiefe herabgefallen wäre."

Setzt man w statt $\frac{dx}{dy}$, so geht Gleichung IV über in

$$dt = \frac{\sqrt{1 + w^2}}{v} \cdot dy$$

Wenn nun die obere horizontale Grade durch $y = b$ und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist die Zeit, in welcher der schwere Punkt seine Bahn durchfällt, dargestellt durch

$$\text{XI)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{v} \cdot dy$$

Eliminirt man v, so geht letzterer Ausdruck über in

$$\text{XII)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{2gy + 2k}} \cdot dy$$

und unsere Aufgabe ist jetzt nur folgende: Man soll für x eine solche Function von y suchen, dass der in XII aufgestellte Ausdruck ein Minimum-stand wird.

Da die Differenz $(\beta - b)$ positiv ist, so muss auch die erste Ableitung der Zeit positiv sein; und somit ist gerechtfertigt, den mit der Ableitung $\frac{dt}{dy}$ gleichbedeutenden Ausdruck $\frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{2g \cdot y + 2k}}$ als positiv vorausgesetzt zu haben. Man mutire, so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad \delta t = \int_b^\beta \frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}} \cdot \left(\frac{d\delta x}{dy}\right) \cdot dy$$

Man forme um, so bekommt man

$$\text{XIV)} \quad \delta t = -\int_b^\beta \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy$$

$$+ \left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right)_b \cdot \delta x_b$$

Untersuchung der ersten Form des δt. Hier kann man nur $w = 0$ setzen. Man hat also die Gleichung $\frac{dx}{dy} = 0$, woraus

$$\text{XV)} \quad x = E$$

folgt, so dass man die mit der Axe Y parallele, d. h. die verticale Grade hat. Diese Linie ist aber in allen den Fällen unzulässig, wo der Endpunkt der Fallbahn nicht mit dem Anfangspunkte in einer und derselben verticalen Graden liegen darf. (Man vergleiche den zweiten Gränzfall dieser Aufgabe.)

Untersuchung der zweiten Form des δt. Hier bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{XVI)} \quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XVII)} \quad \left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

Integrirt man Gleichung XVI, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XVIII)}\quad \frac{w}{\sqrt{(2gy+2k)\cdot(1+w^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}$$

Man sondere w ab, so bekommt man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{gy+k}}{\sqrt{c-(gy+k)}} \text{ oder } \frac{dx}{dy} = \frac{gy+k}{\sqrt{c\cdot(gy+k)-(gy+k)^2}}$$

Wenn man nochmals integrirt, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad x = E - \frac{1}{g}\cdot\sqrt{c(gy+k)-(gy+k)^2} + \frac{c}{g}\cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{gy+k}}{\sqrt{c-(gy+k)}}$$

Man hat also jetzt drei willkürliche Constanten. Einer davon, nemlich k, ist eingegangen durch Integration der Gleichung VIII; und die beiden andern, nemlich E und c, sind eingegangen durch Integration der Gleichung XVI.

Bei dem Falle, wo weder widerstehendes Mittel noch Reibung stattfindet, ist also die Cycloide die Curve des schnellsten Niederganges.

Die Gränzengleichung XVII geht jetzt über in

$$\text{XX)}\quad \frac{1}{\sqrt{2c}}\cdot(\delta x_\beta - \delta x_h) = 0$$

welche bei Bestimmung der Integrationsconstanten mitbenützt werden muss.

Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, hat man nur den zu $\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)^2$ gehörigen Factor zu untersuchen. Dieser ist $\frac{1}{(1+w^2)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2gy+2k}}$, also positiv, weil der Quotient $\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2gy+2k}}$ nur als positiv vorausgesetzt ist. Es findet daher ein Minimum-stand statt.

Erster Fall. Es seien zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, welche sich zwar in einer verticalen Ebene befinden, aber nicht auch in einer *rein* verticalen, sondern in einer schiefen Linie liegen; und man sucht diejenige Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von dem oberen Punkte (a, b) bis zu dem unteren (α, β) herabfällt. Hier ist $x_h = a$ und $x_\beta = \alpha$; und somit ist $\delta x_h = 0$, $\delta x_\beta = 0$, $\delta^2 x_h = 0$, $\delta^2 x_\beta = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg, und Gleichung XIX geht an den Gränzen über in

$$\text{XXI)}\quad a = E - \frac{1}{g}\cdot\sqrt{c(gb+k)-(gb+k)^2} + \frac{c}{g}\cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{gb+k}}{\sqrt{c-(gb+k)}}$$

$$\text{XXII)}\quad \alpha = E - \frac{1}{g}\cdot\sqrt{c(g\beta+k)-(g\beta+k)^2} + \frac{c}{g}\cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{g\beta+k}}{\sqrt{c-(g\beta+k)}}$$

Soll zugleich die Bewegung in einem Punkte, dessen Ordinate = h, beginnen; so ist v = 0, wenn y = h. Dabei geht Gleichung X über in

$$\text{XXIII)}\quad 2gh + 2k = 0$$

Die drei letzten Gleichungen reichen hin, die drei Constanten E, c, k zu bestimmen.

Legt man z. B. den Anfang der Coordinaten in den Anfangspunkt der gesuchten Curve, so ist a = 0, b = 0. Soll zugleich die Bewegung im Anfangspunkte der Curve beginnen, so ist auch h = 0. Wenn aber h = 0, so ist auch k = 0, wie aus XXIII erhellet. Dabei folgt aus XXI, dass auch E = 0; und XXII geht über in

$$\text{XXIV)}\quad \alpha = -\frac{1}{g}\cdot\sqrt{c\cdot g\beta - g^2\cdot\beta^2} + \frac{c}{g}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{g\beta}}{\sqrt{c-g\beta}}$$

Die gesuchte Zeit ist also in diesem Falle

$$\text{XXV)}\quad \int_0^\beta \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2gy}}\cdot dy = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{c\cdot y - g\cdot y^2}} = \frac{\sqrt{2c}}{g}\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{g\beta}}{\sqrt{c-g\beta}}$$

Nun folgt aus XXIV, dass

Digitized by Google

$$\text{arc tg}\ \frac{\sqrt{g\beta}}{\sqrt{c - g\beta}} = \frac{\alpha \cdot g + \sqrt{c \cdot g\beta - g^2 \cdot \beta^2}}{c}$$

Also kann die gesuchte Zeit auch dargestellt werden durch

$$\text{XXVI)}\quad \int_0^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{2gy}} \cdot dy = \frac{\left(\alpha \cdot g + \sqrt{c \cdot g\beta - g^2 \cdot \beta^2}\right) \cdot \sqrt{2}}{g \cdot \sqrt{c}}$$

Zähler und Nenner des rechts stehenden Ausdruckes werden homogen, sobald man den willkürlichen Constanten c bestimmt. Diese Bestimmung geschieht aber mittelst Gleichung XXIV.

Zweiter Fall. Es sei der Punkt, in welchem die Bewegung anfängt, fest vorgeschrieben durch $y = b$ und $x_b = a$; dagegen für den Punkt, wo die Bewegung aufhören soll, sei nur $y = \beta$, aber nicht auch x vorgeschrieben. Dabei verlangt man diejenige Curve, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von dem festen Punkte (a, b) bis zu der durch $y = \beta$ gegebenen horizontalen (übrigens, wie auch die Aufgabe verlangt, mit dem Punkte (a, b) in einer verticalen Ebene gelegenen) Graden herabfällt. Hier ist wieder $dx_b = 0$, $d^2x_b = 0$, etc., dagegen δx_β, $\delta^2 x_\beta$, etc. sind dem Werthe nach willkürlich. Die Gränzengleichung XX wird also nur dadurch erfüllt, dass man $\frac{1}{\sqrt{2c}} = 0$, oder, was dasselbe ist, dass man $\sqrt{2c} = \frac{1}{0}$ setzt. Da hierbei das Integral XIX Null in den Nenner bekommt, so muss man die Integration für diesen Fall besonders vornehmen. Gleichung XVIII geht also für diesen Fall über in $\frac{w}{\sqrt{(2gy + 2k) \cdot (1 + w^2)}} = 0$, woraus aber nur $w = 0$ folgt. Integrirt man $w = 0$, so gibt sich

$$\text{XXVII)}\quad x = E$$

Die gesuchte Curve ist also eine in der Entfernung $x = E$ mit der Axe Y parallele, d. h. eine verticale Grade, wie sich erwarten liess. Da aber diese Grade durch den Punkt (a, b) gehen soll, so geht Gleichung XXVII über in

$$\text{XXVIII)}\quad x = a$$

Die Zeit, in welcher hier der schwere Punkt herabfällt, ist

$$t = \int_b^\beta \frac{1}{\sqrt{2gy + 2k}} \cdot dy = \frac{1}{g}\left(\sqrt{2g\beta + 2k} - \sqrt{2gb + 2k}\right)$$

Der Constante k kann bestimmt werden, wie im vorigen Falle. Dieser zweite Fall hat also zu dem nemlichen Resultate geführt, wie die erste Form des δt.

Dritter Fall. Ist weder $x_b = a$ noch $x_\beta = \alpha$ gegeben, aber festgesetzt, dass immer

$$\text{XXIX)}\quad x_\beta - x_b = \mathfrak{K}$$

d. h. constant sein solle; so ist jetzt $\delta x_\beta = \delta x_b$, $\delta^2 x_\beta = \delta^2 x_b$, etc. Die Gränzengleichung XX geht also über in

$$\frac{1}{\sqrt{2c}} \cdot (\delta x_b - \delta x_b) = 0$$

d. h. die Gränzengleichung wird von selbst erfüllt. Statt Gleichung XXIX kann man auch setzen

$$\text{XXX)}\quad \alpha - a = \mathfrak{K}$$

Nun sind b und β gegeben. Man hat also noch fünf Stücke a, α, k, c, E zu bestimmen, wozu jedoch nur drei Gleichungen XXI, XXII und XXX existiren. Bestimmt man k so, wie im ersten Falle, so muss immer noch eine weitere Bedingung hinzugefügt werden, damit sich für alle jene fünf Stücke etwas Bestimmtes ergibt. (Man vergleiche den vierten Fall Seite 225.)

Die Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Der Folge nach ist dieses Problem das zweite unter denen, wo sogar die Curve selbst, welche einen von ihr auf bestimmte Weise abhängigen Ausdruck zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht, gesucht wird. (Man sehe die Schlussbemerkung der vorigen Aufgabe.)

Das hiesige Problem kann aber als der Anlass zu jener langen Reihe von Arbeiten

Digitized by Google

betrachtet werden, welche nach und nach zu dem (sogenannten) Variationscalcul geführt haben.

Schon Galilæi hat es sich gestellt, und behauptet, der Kreis sei die gesuchte Curve. (Man sehe dessen liber de motu et mech.; dial. II.; prop. XXXVI; schol. pag. 209.)

Johann Bernoulli hat zuerst (1693) gefunden, dass, wenn weder Reibung noch widerstehendes Mittel stattfindet, die Cycloide die Curve des schnellsten Niederganges sei. Die Acta Eruditorum Lipsiensia (von 1696, Seite 269) enthalten folgende von ihm gemachte Aufforderung:

Problema novum
ad cujus solutionem mathematici invitantur.

„Datis in plano verticale duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per „quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore „perveniat ad alterum punctum B."

Es wurde gelöst von Leibnitz, Newton, Jakob Bernoulli und vom Marquis de l'Hôpital.

Es kommt auch vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 49 und 50). Daselbst findet sich nemlich folgende Formel:

$$t = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

welche von der gesuchten Curve zu einem Minimum-stande gemacht werden soll. Die mit der Richtung der Schwere parallelen Coordinaten sind dabei mit x bezeichnet, während ich dieselben mit y bezeichne, und zwar bei allen hier von mir über die Brachystochrone mitgetheilten Aufgaben. Die Euler'sche Formel leidet aber an einer sehr bedeutenden Unvollkommenheit, welche in der Schlussbemerkung der 200sten Aufgabe, wo die für den freien Raum geltende Brachystochrone gesucht wird, näher auseinandergesetzt werden soll. (Man vergleiche also besagte Schlussbemerkung.)

Bei allen diesen Lösungen konnten aber, weil der (sogenannte) Variationscalcul noch nicht erfunden war, keine Gränzbedingungen gestellt werden.

Ich habe hier nur drei Gränzfälle beigegeben. Andere kann man sich bilden, z. B. nach dem Vorgange derer, welche ich in der 158sten Aufgabe aufgestellt habe.

Ich habe auch die erste Form des δt untersucht; erwähne aber dieses Umstandes hier nur desshalb, weil die erste Form, obgleich sie sehr oft zu Resultaten führt, bis jetzt von allen andern Schriftstellern unbeachtet geblieben ist.

Aufgabe 196.

In einer verticalen Ebene liegen zwei durch $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebene Curven. In der ersten bewegt sich ein schwerer Punkt, und zwar so, dass er an einer gewissen Stelle dieser Curve eine bestimmte Geschwindigkeit hat. Man sucht eine dritte Curve, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt, unter der Veraussetzung, dass weder Reibung noch widerstehendes Mittel vorhanden sei.

Wie bei früheren Aufgaben, so müssen auch hier sowohl die beiden Gränzcurven als die gesuchte dritte Curve auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen werden. Man nehme die Abscissen horizontal und die Ordinaten vertical, und zwar so, dass alle positiven Ordinaten von oben nach unten gerichtet sind, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen.

Wenn nun die positiven (d. h. abwärts gerichteten) Ordinaten der ersten Gränzcurve durch b bezeichnet werden, und v die bei irgend einer Fallhöhe herrschende Geschwindigkeit ist; so ist die zwischen ihnen stattfindende Relation durch folgende Gleichung

$$\text{I)} \quad v^2 = 2g \cdot b + 2k$$

gegeben, wie aus voriger Aufgabe erhellet. Hier ist k ein noch unbestimmter Constanter. Nun sei die (in der ersten Gränzcurve gelegene) Stelle, wo der schwere Punkt eine bestimmte Geschwindigkeit $= e$ hat, gegeben durch die Ordinate h; so geht Gleichung I über in

$$\text{II)} \quad e^2 = 2g \cdot h + 2k.$$

Daraus folgt $k = \frac{1}{2} \cdot (e^2 - 2g \cdot h)$; und man hat jetzt zwischen der Geschwindigkeit und Fallhöhe folgende Relation:

Digitized by Google

$$\text{III)}\quad v^2 = 2g\cdot(b-h)+e^2$$

wo kein unbestimmter Constanter mehr vorkommt.

Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, wo in der besagten Stelle der ersten Gränzcurve die Bewegung erst beginnt, d. h. die daselbst herrschende Geschwindigkeit $e = 0$ ist. Dabei reducirt sich Gleichung III auf

$$\text{IV)}\quad v^2 = 2g\cdot(b-h)$$

Weil nun der schwere Punkt in einer gewissen Stelle der ersten Gränzcurve eine bestimmte Geschwindigkeit hat, so ist die im Anfangspunkte der gesuchten dritten Curve herrschende Geschwindigkeit von der Fallhöhe abhängig, d. h. je tiefer dieser Anfangspunkt liegt, desto grösser ist die in ihm herrschende Geschwindigkeit; und in dem Augenblicke, wo die Bewegung aus der ersten Gränzcurve in die gesuchte Curve übergeht, geht auch Gleichung III über in

$$\text{V)}\quad v^2 = 2g\cdot(y-h)+e^2$$

Die Aufgabe ist also jetzt: Man sucht für x eine solche Function von y, und für b und β solche Werthe, dass das Integral

$$\text{VI)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}\cdot dy$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Diesen Ausdruck hat man nun einer gemischten Mutation zu unterwerfen, wobei sowohl b als auch β Werthänderungen erleiden. Für die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}t$ ergibt sich

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}t = \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta - \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}\right)_b\cdot\vartheta b$$
$$+\int_b^\beta \frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\cdot\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)\cdot dy$$

Da man aber, wie schon früher (in der Einleitung zur 160sten Aufgabe) auseinandergesetzt ist, die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}t$ nicht weiter beachten darf; so stelle man gradezu die zweite her, und es gibt sich

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}t = -\int_b^\beta\left(\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)\right)\cdot\delta x\cdot dy$$
$$+\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta$$
$$-\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_b\cdot\delta x_b - \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}\right)_b\cdot\vartheta b$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right) = 0$$

Integrirt man, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-h)+e^2]\cdot(1+w^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4rg}}$$

wo r der durch die Integration eingegangene Constante ist. Sondert man w ab, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2g\cdot(y-h)+e^2}}{\sqrt{4rg-[2g\cdot(y-h)+e^2]}}$$

Integrirt man diese Gleichung weiter, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{XII)}\quad x = E - \frac{1}{2g} \cdot \sqrt{4rg \cdot [2g \cdot (y-h) + e^2] - [2g \cdot (y-h) + e^2]^2}$$
$$+ r \cdot \text{arc sin vers } \frac{2g \cdot (y-h) + e^2}{2rg}$$

Man hat also auch jetzt die Cycloide, wie in voriger Aufgabe, wo die Gränzen unveränderlich waren.

In dem Falle, wo $e = 0$, reducirt sich XII auf

$$\text{XIII)}\quad x = E - \sqrt{2r \cdot (y-h) - (y-h)^2} + r \cdot \text{arc sin vers } \frac{y-h}{r}$$

Als Gränzengleichung hat man zunächst

$$\text{XIV)}\quad \left(\frac{w}{\sqrt{[2g\,(y-h) + e^2] \cdot (1+w^2)}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\,(y-h) + e^2}}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta$$
$$- \left(\frac{w}{\sqrt{[2g\,(y-h) + e^2] \cdot (1+w^2)}}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\,(y-h) + e^2}}\right)_b \cdot \vartheta b = 0$$

Aus Gleichung X folgt

$$\text{XV)}\quad \frac{1}{\sqrt{2g\,(y-h) + e^2}} = \frac{1}{\sqrt{4rg}} \times \frac{\sqrt{1+w^2}}{w}$$

Diese Gleichung gilt bei jedem Werthe des y, also auch bei $y = b$ und bei $y = \beta$; daher geht XIV über in

$$\text{XVI)}\quad \frac{1}{\sqrt{4rg}} \cdot \left[\delta x_\beta + \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - \delta x_b - \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_b \cdot \vartheta b\right] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{4rg}}$ auch hätte weglassen können.

Nun wäre noch die allgemeine Form des Prüfungsmittels herzustellen, wie dieses in früheren Aufgaben (man sehe z. B. Gleichung III, Seite 246) geschehen ist. In dieser Beziehung wird aber nicht die geringste Schwierigkeit entgegentreten; und desshalb sollen nur noch einige Gränzfälle aufgestellt werden.

Erster Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man unter allen möglichen Curven diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt.

Da die gesuchte Curve die beiden Gränzcurven schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittspunkten die Gleichungen

$$1)\quad x_b = a, \qquad \text{und} \qquad 2)\quad x_\beta = \alpha$$

stattfinden. Hier sind, wie schon einmal (Seite 247) auseinandergesetzt wurde, vier verschiedene Auflösungen möglich. Man löse aber diesen ersten Fall dadurch, dass man b und β als die dem Werthe nach willkürlichen, und a und α als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandelt. Unterwirft man die Gleichungen 1 und 2 einer gemischten Mutation; so bekommt man

$$3)\quad dx_b + \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \cdot \vartheta b = \vartheta a, \text{ und } 4)\quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta = \vartheta\alpha$$

Aus den Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ folgt bezüglich

$$5)\quad \vartheta a = \frac{da}{db} \cdot \vartheta b, \qquad \text{und} \qquad 6)\quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

Eliminirt man ϑa und $\vartheta\alpha$ aus den Gleichungen 3 und 4, so bekommt man bezüglich

$$7)\quad \delta x_b = \left(\frac{da}{db} - w_b\right) \cdot \vartheta b, \qquad \text{und} \qquad 8)\quad \delta x_\beta = \left(\frac{d\alpha}{d\beta} - w_\beta\right) \cdot \vartheta\beta$$

Gleichung XVI geht also über in

Digitized by Google

$$9)\quad \frac{1}{w_\beta}\cdot\left(1+w_\beta\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta-\frac{1}{w_b}\cdot\left(1+w_b\cdot\frac{da}{db}\right)\cdot\vartheta b=0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor weggelassen hat. Weil aber $\vartheta\beta$ und ϑb ganz unabhängig untereinander sind, so zerfällt letztere Gleichung in folgende zwei

$$10)\quad 1+w_\beta\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}=0,\qquad \text{und}\qquad 11)\quad 1+w_b\cdot\frac{da}{db}=0$$

Man hat also dieselben Gleichungen, welche bereits (S. 249) für die absolut kürzeste Entfernung zweier in einer und derselben Ebene liegenden Curven gefunden sind. Nun ist w_b die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der die gesuchte Cycloide im gesuchten Punkte (a, b) berührenden Graden und von der Axe Y gebildet wird. Ebenso ist $\frac{da}{db}$ die goniometrische Tangente des Winkels, welcher von der die erste Gränzcurve im gesuchten Punkte (a, b) berührenden Graden und von der Axe Y gebildet wird. Somit erkennt man aus Gleichung 11; dass diese beiden berührenden Graden sich unter einem rechten Winkel schneiden, d. h. dass die gesuchte Cycloide auf der ersten Gränzcurve senkrecht steht. (Den näheren Nachweis findet man S. 236.) Ebenso folgt aus Gleichung 10, dass die gesuchte Cycloide auch auf der zweiten Gränzcurve senkrecht steht. Hieraus folgt:

„Wenn die im gesuchten Anfangspunkte der Brachystochrone herrschende Geschwin-„digkeit von der Tiefe dieses Punktes abhängig ist, so werden beide Gränzcurven von „der Brachystochrone rechtwinkelig durchschnitten.“

Die vier Gleichungen 1, 2, 10, 11, verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke a, b, α, β, r, E.

Zweiter Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man nicht unter allen möglichen Curven, sondern nur unter allen jenen, bei welchen die Differenz der Gränzabscissen den nemlichen Werth K behält, diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten Gränzcurve bis zur zweiten herabfällt.

Dieser Fall verlangt, dass für die Gränzpunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende drei Gleichungen

$$12)\quad x_b=a,\qquad 13)\quad x_\beta=\alpha,\qquad 14)\quad x_\beta-x_b=K$$

stattfinden sollen. Unterwirft man Gleichung 14 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$15)\quad \delta x_\beta+\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta-\delta x_b-\left(\frac{dx}{dy}\right)_b\cdot\vartheta b=0$$

Eliminirt man δx_β und δx_b, was mittelst der Gleichungen 7 und 8 geschieht; so bekommt man

$$16)\quad \frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\vartheta\beta-\frac{da}{db}\cdot\vartheta b=0$$

Durch diese Gleichung ist dargestellt, wie ϑb und $\vartheta\beta$ voneinander abhangen. Behandelt man ϑb als abhängig, und eliminirt man δx_b, δx_β, ϑb aus XVI; so bekommt man

$$17)\quad \left[\left(\frac{1}{w_\beta}\times\frac{da}{db}-\frac{1}{w_b}\times\frac{d\alpha}{d\beta}\right):\frac{db}{db}\right]\cdot\vartheta\beta=0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$18)\quad \frac{1}{w_\beta}\times\frac{da}{db}-\frac{1}{w_b}\times\frac{d\alpha}{d\beta}=0$$

oder, was dasselbe ist

$$19)\quad w_b\cdot\frac{da}{db}=w_\beta\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}$$

oder

Digitized by Google

$$20)\quad \frac{1}{w_\beta} : \frac{1}{w_b} = \frac{d\alpha}{d\beta} : \frac{da}{db}$$

Die vier Gleichungen 12, 13, 14 und 18 (oder 19 oder 20), verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke $a, b, \alpha, \beta, r, E$.

Man vergleiche den zweiten Fall der folgenden Aufgabe.

Auch vergleiche man in der 161sten Aufgabe den dritten Fall. Dort steht (S. 256) die Bedingungsgleichung

$$y_\alpha - y_a = K$$

welche der hiesigen Gleichung 14 entspricht, indem x und y vertauscht sind.

Dritter Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man wieder nicht unter allen möglichen Curven, sondern nur unter allen jenen, bei welchen die Summe der Gränzabscissen den nemlichen Werth K behält, diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten Gränzcurve bis zur zweiten herabfällt.

Dieser Fall verlangt also, dass für die Gränzpunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende drei Gleichungen

$$21)\quad x_b = a, \qquad 22)\quad x_\beta = \alpha, \qquad 23)\quad x_\beta + x_b = K$$

stattfinden sollen. Unterwirft man Gleichung 23 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$24)\quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta + \delta x_b + \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \cdot \vartheta b = 0$$

Eliminirt man δx_β und δx_b, was mittelst der Gleichungen 7 und 8 geschieht; so bekommt man

$$25)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{da}{db} \cdot \vartheta b = 0$$

Durch diese Gleichung ist dargestellt, wie $\vartheta\beta$ und ϑb voneinander abhangen. Behandelt man ϑb als abhängig, und eliminirt man δx_b, δx_β, ϑb aus XVI; so bekommt man

$$26)\quad \left[\left(\frac{1}{w_\beta} \times \frac{da}{db} + \frac{1}{w_b} \times \frac{d\alpha}{d\beta} + 2 \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) : \frac{da}{db}\right] \cdot \vartheta\beta = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$27)\quad \frac{1}{w_\beta} \times \frac{da}{db} + \frac{1}{w_b} \times \frac{d\alpha}{d\beta} + 2 \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

oder, was dasselbe ist

$$28)\quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \times \frac{da}{db} + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \times \frac{d\alpha}{d\beta} + 2 \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \times \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \times \frac{da}{db} \times \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Die vier Gleichungen 21, 22, 23 und 27 (oder 28), verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin, die sechs Stücke $a, b, \alpha, \beta, r, E$ zu bestimmen.

Man vergleiche den dritten Fall der folgenden Aufgabe.

Auch vergleiche man in der 161sten Aufgabe den vierten Fall. Dort steht (S. 257) die Bedingungsgleichung

$$y_a + y_\alpha = K$$

welche der hiesigen Gleichung 23 entspricht, indem x und y vertauscht sind.

Diese Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Probleme, wo auch die Gränzelemente veränderlich sind, konnten erst gelöst werden, nachdem der Variationscalcul erfunden war; und das im ersten Gränzfalle dieser Aufgabe mitgetheilte Resultat ist auch bereits von Lagrange ausgesprochen im vierten Bande der Miscellanea Taurinensia. (Man sehe Seite 186 und 187 der zweiten Abtheilung dieses vierten Bandes.)

Ich habe noch zwei weitere Gränzfälle beigefügt. Andere kann man sich bilden, z. B. nach dem Vorgange derer, welche ich in der 161sten Aufgabe aufgestellt habe.

Ueber die Methode, welche ich bei dergleichen Auflösungen anwende, habe ich mich

Digitized by Google

bereits (in der Seite 245 befindlichen Schlussbemerkung) ausgesprochen; wesshalb ich dahin verweise.

Ausserdem verweise ich noch auf die zur nächstfolgenden Aufgabe gehörige Schlussbemerkung, wo Manches vorkommt, was auch die hiesige Aufgabe angeht, und zwar nicht nur in theoretischer, sondern auch in historischer Beziehung.

Aufgabe 197.

In einer verticalen Ebene liegen zwei durch $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebene Curven. Man sucht eine dritte Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt, unter der Voraussetzung, dass weder Reibung noch widerstehendes Mittel stattfinde, und dass in dem gesuchten Anfangspunkte (a, b) der gesuchten Curve, dieser Anfangspunkt mag hoch oder tief liegen, eine bestimmt vorgeschriebene Geschwindigkeit herrsche.

Wie bei früheren Aufgaben, so müssen auch hier sowohl die beiden Gränzcurven als die gesuchte dritte Curve auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen werden. Man nehme die Abscissen horizontal, und die Ordinaten vertical, und zwar so, dass die positiven Ordinaten von oben nach unten gerichtet sind, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen.

Wenn nun v die in irgend einer Stelle der gesuchten Curve herrschende Geschwindigkeit, und y die zu der nemlichen Stelle der gesuchten Curve gehörige Ordinate vorstellt; so ist die zwischen y und v stattfindende Relation (wie in der 195sten Aufgabe) gegeben durch

$$\text{I)} \quad v^2 = 2g \cdot y + 2k$$

wo $2k$ ein noch unbestimmter Constanter ist.

Die bestimmt vorgeschriebene Geschwindigkeit, welche im gesuchten Anfangspunkte der gesuchten Curve herrschen soll, sei durch e bezeichnet.

Der Anfangspunkt der gesuchten und aller mit ihr zu vergleichenden Curven liegt in der ersten Gränzcurve, er hat also die Ordinate b. Man muss daher das in Gleichung I befindliche k so bestimmen, dass $v = e$ wird, wenn man $y = b$ setzt. Gleichung I geht dabei über in

$$\text{II)} \quad e^2 = 2g \cdot b + 2k$$

Daraus folgt $k = \frac{1}{2} \cdot (e^2 - 2g \cdot b)$; und man hat jetzt zwischen v und y folgende Relation

$$\text{III)} \quad v^2 = 2g \cdot (y - b) + e^2$$

Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, bei welchem im Anfangspunkte der gesuchten Curve die Bewegung erst beginnt, d. h. die in diesem Punkte herrschende Geschwindigkeit $e = 0$ ist. Dabei reducirt sich Gleichung III auf

$$\text{IV)} \quad v^2 = 2g \cdot (y - b)$$

Weil nun die im Anfangspunkte der gesuchten Curve herrschende Geschwindigkeit bestimmt vorgeschrieben ist, so ist sie unabhängig von der höheren oder tieferen Lage dieses Punktes; und grade diese Unabhängigkeit ist es, wodurch sich die hiesige Aufgabe von der vorigen unterscheidet.

Man hat also für x eine solche Function von y, und für b und β solche Werthe aufzusuchen, dass folgendes Integral

$$\text{V)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{2g \cdot (y - b) + e^2}} \cdot dy$$

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Diesen Ausdruck hat man nun einer gemischten Mutation zu unterwerfen, wobei sowohl b als auch β Werthänderungen erleiden. Man beachte, dass die Ordinate b der Anfangsgränze schon im Nenner vorkommt, und dass desshalb die Mutation der Anfangsgränze zusammengesetzter ausfällt, als die der Endgränze. (Man vergleiche Aufgabe 157.) Es gibt sich nun für die erste Form des δt folgender Ausdruck

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{)}t = \int_b^\beta \frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\cdot\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)\cdot dy + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta$$

$$+\left(-\left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}\right)_b + \int_b^\beta \frac{g\cdot\sqrt{1+w^2}}{[2g\cdot(y-b)+e^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot dy\right)\cdot\vartheta b$$

Da man aber, wie schon früher (in der 160sten Aufgabe) auseinander gesetzt ist, diese erste Form des ${}_{(}\delta_{)}t$ nicht beachten darf; so stelle man geradezu die zweite her, und es gibt sich

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}t =$$

$$-\int_b^\beta\left(\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)\right)\cdot\delta x\cdot dy + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta$$

$$+\left(-\left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}\right)_b + \int_b^\beta \frac{g\cdot\sqrt{1+w^2}}{[2g\cdot(y-b)+e^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot dy\right)\cdot\vartheta b$$

$$+\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_b\cdot\delta x_b$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right) = 0$$

Durch Integration bekommt man

$$\text{IX)}\quad \frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4rg}}$$

wo r der durch Integration eingegangene Constante ist. Sondert man w ab, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}{\sqrt{4rg-[2g\cdot(y-b)+e^2]}}$$

Integrirt man diese Gleichung weiter, so gibt sich

$$\text{XI)}\quad x = E - \frac{1}{2g}\cdot\sqrt{4rg\cdot[2g\cdot(y-b)+e^2]-[2g\cdot(y-b)+e^2]^2}$$

$$+ r\cdot\text{arc sin vers}\,\frac{2g\cdot(y-b)+e^2}{2rg}$$

Man hat also auch jezt die Cycloide, wie in der 195sten Aufgabe, wo die Gränzen unveränderlich waren.

In dem Falle, wo $e = 0$, d. h. wo die Bewegung erst im Anfangspunkte der gesuchten Curve beginnt, reducirt sich Gleichung XI auf

$$\text{XII)}\quad x = E - \sqrt{2r\cdot(y-b)-(y-b)^2} + r\cdot\text{arc sin vers}\,\frac{y-b}{r}$$

Als Gränzengleichung bekommt man zunächst

$$\text{XIII)}\quad \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g(y-b)+e^2}}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta + \left(-\left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g(y-b)+e^2}}\right)_b\right.$$

$$\left.+\int_b^\beta \frac{g\cdot\sqrt{1+w^2}}{[2g(y-b)+e^2]^{\frac{3}{2}}}\cdot dy\right)\cdot\vartheta b + \left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta$$

$$-\left(\frac{w}{\sqrt{[2g\cdot(y-b)+e^2]\cdot(1+w^2)}}\right)_b\cdot\delta x_b = 0$$

Wenn man für w seinen Ausdruck aus X entnimmt, so bekommt man

Digitized by Google

$$\int_b^\beta \frac{g \cdot \sqrt{1+w^2}}{[2g(y-b)+e^2]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4rg}}\left[\left(\frac{\sqrt{4rg-[2g(y-b)+e^2]}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}}\right)_\beta - \left(\frac{\sqrt{4rg-[2g(y-b)+e^2]}}{\sqrt{2g(y-b)+e^2}}\right)_b\right]$$

Schaut man wieder auf Gleichung X zurück, so sieht man, dass

$$\frac{\sqrt{4rg-[2g\cdot(y-b)+e^2]}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}} = \frac{1}{w}$$

ist und somit kann man auch setzen

$$\text{XIV)} \quad \int_b^\beta \frac{g \cdot \sqrt{1+w^2}}{[2g(y-b)+e^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{4rg}}\cdot\left(\frac{1}{w_\beta}-\frac{1}{w_b}\right)$$

Multiplicirt man Gleichung IX beiderseits mit $\frac{1+w^2}{w}$, so bekommt man

$$\text{XV)} \quad \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{2g\cdot(y-b)+e^2}} = \frac{1}{\sqrt{4rg}} \times \frac{1+w^2}{w}$$

Mittelst der Gleichungen IX, XIV, XV kann man also der Gränzengleichung XIII folgende Form geben

$$\frac{1}{\sqrt{4rg}}\cdot\left[\left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta + \left(-\left(\frac{1+w^2}{w}\right)_b - \frac{1}{w_\beta} + \frac{1}{w_b}\right)\cdot\vartheta b + \delta x_\beta - \delta x_b\right] = 0$$

Man reducire den bei ϑb befindlichen Coefficient, und lasse den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{4rg}}$ weg; so bekommt man

$$\text{XVI)} \quad \delta x_\beta + \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta\cdot\vartheta\beta - \delta x_b - \left(w_b + \frac{1}{w_\beta}\right)\cdot\vartheta b = 0$$

Dieses ist eine sehr einfache und bequeme Form der Gränzengleichung.

Nun wäre noch die allgemeine Form des Prüfungsmittels herzustellen. In dieser Beziehung wird aber nicht die geringste Schwierigkeit entgegentreten; und desshalb sollen nur noch einige Gränzfälle aufgestellt werden.

Erster Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man unter allen möglichen Curven diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt.

Da die gesuchte Curve die beiden Gränzcurven schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittspunkten die Gleichungen

$$1)\ x_b = a, \quad \text{und} \quad 2)\ x_\beta = \alpha$$

stattfinden. Hier sind, wie schon einmal (Seite 247) auseinander gesetzt wurde, vier verschiedene Auflösungen möglich. Man löse aber diesen ersten Fall dadurch, dass man b und β als die dem Werthe nach willkürlichen, dagegen a und α als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandelt. Unterwirft man die Gleichungen 1 und 2 einer gemischten Mutation, so bekommt man (wie im ersten Falle der vorigen Aufgabe)

$$3)\ \delta x_b = \left(\frac{da}{db} - w_b\right)\cdot\vartheta b, \quad \text{und} \quad 4)\ \delta x_\beta = \left(\frac{d\alpha}{d\beta} - w_\beta\right)\cdot\vartheta\beta$$

Gleichung XVI geht also jetzt über in

$$5)\ \frac{1}{w_\beta}\cdot\left(1 + w_\beta\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}\right)\cdot\vartheta\beta - \left(\frac{da}{db} + \frac{1}{w_\beta}\right)\cdot\vartheta b = 0$$

Weil aber ϑb und $\vartheta\beta$ ganz unabhängig untereinander sind, so zerfällt letztere Gleichung in folgende zwei

$$6)\ 1 + w_\beta\cdot\frac{d\alpha}{d\beta} = 0, \quad \text{und} \quad 7)\ \frac{da}{db} + \frac{1}{w_\beta} = 0$$

Digitized by Google

Untersucht man Gleichung 6 nach dem Vorgange des ersten Falles der vorigen Aufgabe, so erkennt man, dass die gefundene Brachystochrone auf der zweiten Gränzcurve senkrecht steht.

Aus Gleichung 7 folgt, dass die Berührende der ersten Gränzcurve (im Anfangspunkte der gesuchten Bahn nemlich) senkrecht steht auf der Berührenden, welche dem Endpunkte der Bahn selbst angehört. Die beiden Berührenden der Gränzcurven in den gesuchten Punkten (a, b) und (α, β) laufen also miteinander parallel, wie sich auch noch daraus ergibt, dass man aus den Gleichungen 6 und 7 gradezu

$$8) \quad \frac{da}{db} = \frac{d\alpha}{d\beta}$$

bekommt.

„Wenn also die im gesuchten Anfangspunkte der Brachystochrone herrschende Ge-„schwindigkeit von der Tiefe dieses Punktes unabhängig ist, so findet zweierlei statt:"

1) Nur die zweite Gränzcurve, nicht aber auch die erste, wird von der Brachystochrone rechtwinkelig durchschnitten; dagegen sind
2) die zwei zu den Punkten der beiden Gränzcurven, wo die Brachystochrone einschneidet, gehörigen Berührenden parallel.

Die vier Gleichungen 1, 2, 6, 7, verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke a, α, b, β, r, E.

In dem Falle, wo $e = 0$, d. h. wo die Bewegung erst im Anfangspunkte der Brachystochrone beginnt, reducirt sich Gleichung X auf

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2g \cdot (y - b)}}{\sqrt{4rg - 2g \cdot (y - b)}}$$

und daraus folgt

$$9) \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)_b = 0$$

d. h. die gefundene Brachystochrone hat in ihrem eigenen Anfangspunkte eine verticale Berührende, oder, was dasselbe ist, der schwere Punkt fällt im ersten Augenblicke rein vertical.

„Wenn also die Bewegung erst im Anfangspunkte der Brachystochrone beginnt, „so findet dreierlei statt:"

1) Der schwere Punkt fällt im ersten Augenblicke rein vertical.
2) Nur die zweite Gränzcurve, nicht aber auch die erste, wird von der Brachystochrone rechtwinkelig durchschnitten; dagegen sind
3) die zu den Punkten der beiden Gränzlinien, wo die Brachystochrone einschneidet, gehörigen Berührenden parallel.

Zweiter Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man nicht unter allen möglichen Curven, sondern nur unter allen jenen, bei welchen die Differenz der Gränzabscissen den nemlichen Werth K behält, diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten Gränzcurve zur zweiten herabfällt.

Dieser Fall verlangt, dass für die Gränzpunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende drei Gleichungen

$$10) \quad x_b = a, \qquad 11) \quad x_\beta = \alpha, \qquad 12) \quad x_\beta - x_b = K$$

stattfinden sollen. Unterwirft man Gleichung 12 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$13) \quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - \delta x_b - \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \cdot \vartheta b = 0$$

Eliminirt man δx_b und δx_β, was mittelst der Gleichungen 3 und 4 geschieht, so bekommt man

$$14) \quad \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta - \frac{da}{db} \cdot \vartheta b = 0$$

Digitized by Google

Durch diese Gleichung ist dargestellt, wie ϑb und $\vartheta\beta$ voneinander abhangen. Behandelt man ϑb als abhängig, und eliminirt man δx_b, δx_β, ϑb aus XVI; so bekommt man

$$15)\quad \frac{1}{w_\beta} \cdot \left[\left(\frac{da}{db} - \frac{d\alpha}{d\beta}\right) : \frac{da}{db}\right] \cdot \vartheta\beta = 0$$

Daraus folgt

$$16)\quad \frac{da}{db} - \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Diese Gleichung sagt: Die beiden Berührenden der Gränzcurven in den gesuchten Punkten (a, b) und (α, β) sind parallel.

Die vier Gleichungen 10, 11, 12, 16, verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke a, b, α, β, r, E.

Man vergleiche den zweiten Fall der vorhergehenden Aufgabe.

Auch vergleiche man in der 161sten Aufgabe den dritten Fall. Dort steht (S. 256) die Bedingungsgleichung

$$y_\alpha - y_a = K$$

welche der hiesigen Gleichung 12 entspricht, indem x und y vertauscht sind.

Dritter Fall.

Während die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen gelten, sucht man wieder nicht unter allen möglichen Curven, sondern nur unter allen jenen, bei welchen die Summe der Gränzabscissen den nemlichen Werth K behält, diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt.

Dieser Fall verlangt, dass für die Gränzpunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende drei Gleichungen

$$17)\quad x_b = a, \qquad 18)\quad x_\beta = \alpha, \qquad 19)\quad x_b + x_\beta = K$$

gelten sollen. Unterwirft man Gleichung 19 einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$20)\quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta + \delta x_b + \left(\frac{dx}{dy}\right)_b \cdot \vartheta b = 0$$

Eliminirt man δx_β und δx_b, was mittelst der Gleichungen 3 und 4 geschieht; so bekommt man

$$21)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta + \frac{da}{db} \cdot \vartheta b = 0$$

Durch diese Gleichung ist dargestellt, wie ϑa und $\vartheta\beta$ voneinander abhangen. Behandelt man ϑb als abhängig, und eliminirt man δx_b, δx_β, ϑb aus XVII; so bekommt man

$$22)\quad \left[\left(\frac{1}{w_\beta} \cdot \left(\frac{da}{db} + \frac{d\alpha}{d\beta}\right) + 2 \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta}\right) : \frac{da}{db}\right] \cdot \vartheta\beta = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$23)\quad \frac{1}{w_\beta} \cdot \left(\frac{da}{db} + \frac{d\alpha}{d\beta}\right) + 2 \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

oder, was dasselbe ist

$$24)\quad \frac{da}{db} + \frac{d\alpha}{d\beta} + 2 \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \frac{da}{db} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Die vier Gleichungen 17, 18, 19 und 23 (oder 24), verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der sechs Stücke a, b, α, β, r, E.

Man vergleiche den dritten Fall der vorigen Aufgabe.

Auch vergleiche man in der 161sten Aufgabe den vierten Fall. Dort steht (S. 257) die Bedingungsgleichung

$$y_a + y_\alpha = K$$

welche der hiesigen Gleichung 19 entspricht, indem x und y vertauscht sind.

Diese Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.


Digitized by Google

Schlussbemerkung. Als Lagrange seine neue Methode zum ersten Male unter dem Titel „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies" öffentlich bekannt machte, hat er die Aufgabe „von der Brachystochrone im leeren Raume" als erstes Beispiel hinzugefügt. Man sehe Miscellanea Taurinensia. Tomus alter. pro annis 1760 et 1761. pag. 176. etc.

(Dieser zweite Band besteht aus drei Abtheilungen. Jede fangt mit Seite 1 an. Lagrange's Abhandlung steht in der zweiten Abtheilung.)

Daselbst stellt er folgende Integralformel

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$$

auf, welche von der gesuchten Brachystochrone zu einem Minimum-stande gemacht werden soll. Dabei sind die mit der Richtung der Schwere parallelen Coordinaten mit x bezeichnet, während ich dieselben mit y bezeichne, und zwar bei allen hier von mir über die Brachystochrone mitgetheilten Aufgaben.

Obige Formel des Lagrange passt aber nur für den Fall, dass die Bewegung grade da, wo $x = 0$ ist, beginne, und sie ist unpassend für alle jene Fälle, bei denen die Bewegung an irgend einer andern Stelle beginnen soll. **Diese Bemerkung beachte man sorgfältig.** (Auch sehe man die Schlussbemerkung zur 200sten Aufgabe.)

Als nun Lagrange (a. a. O. Seite 180) die „Brachystochrone im leeren Raume zwischen zwei Flächen" suchte, war die in dem Punkte, wo die erste Gränzfläche von der Brachystochrone getroffen wird, herrschende Geschwindigkeit abhängig von der Tiefe dieses Punktes. Das Resultat, welches Lagrange bekam, konnte daher kein anderes sein, als: „die gesuchte Brachystochrone steht auf den beiden gegebenen Gränzflächen senkrecht." Dieses Resultat ist dem analog, welches sich im ersten Gränzfalle der vorigen Aufgabe befindet.

Lagrange's Formel musste also noch vervollkommnet, d. h. noch so eingerichtet werden, dass man vorschreiben kann, welche Geschwindigkeit in irgend einer Stelle der gesuchten Brachystochrone herrschen, oder in welcher Stelle die Bewegung beginnen soll.

Bei dieser Vervollkommnung ist es dann auch möglich, folgende Vorschriften zu machen:

1) In dem, vorerst noch unbekannten, Punkte, wo die erste Gränzcurve (oder Fläche) von der gesuchten Brachystochrone geschnitten werden wird, soll eine bestimmte Geschwindigkeit herrschen. Diese Geschwindigkeit, weil sie vorgeschrieben ist, ist also unabhängig von der höheren oder tieferen Lage des besagten Punktes.

2) In dem, vorerst noch unbekannten, Punkte, wo die erste Gränzcurve (oder Fläche) von der gesuchten Brachystochrone geschnitten wird, soll die Bewegung grade beginnen. Dieser Anfang der Bewegung, weil er vorgeschrieben ist, ist also gleichfalls unabhängig von der höheren oder tieferen Lage des besagten Punktes. (Diese zweite Vorschrift ist aber in der vorigen enthalten, wie man im ersten Gränzfalle der hiesigen Aufgabe gesehen hat.)

Macht man nun eine dieser beiden Vorschriften, so kommt die mit der Richtung der Schwere parallele Coordinate der ersten Gränzcurve (oder Fläche) schon von Anfange her unter das Integralzeichen; und wenn man dann die Integralformel einer gemischten Mutation unterwirft, so wird die der Anfangsgränze zusammengesetzter ausfallen, als die der Endgränze; es muss sich also auch für die Anfangsgränze ein anderes Resultat ergeben, als für die Endgränze.

Borda hat die Unvollkommenheit der Lagrange'schen Formel zuerst bemerkt, und in einer im Jahre 1767 geschriebenen Abhandlung den Gegenstand aufgeklärt. Dieses ist also nicht gar lange nach der öffentlichen Bekanntmachung von Lagrange's neuer Erfindung geschehen. (Borda's Abhandlung befindet sich in den Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris. 1767 et 1768. pag. 551.)

Lagrange schrieb hierauf (zu Berlin im Mai 1770) über seine Methode, welche unterdessen von Euler den Namen calculus variationum erhalten hatte, eine zweite Abhandlung, die sich im vierten Bande der Miscellanea Taurinensia befindet. (Dieser Band ist eigentlich für die Jahre 1766—1769 gedruckt, obgleich er sogar eine Abhandlung vom Jahre 1771 enthält, wie Seite 250 der zweiten Abtheilung zu sehen ist.) Dieser Abhandlung fügte er (S. 183) folgende Aufgabe bei: „In einer verticalen Ebene sind zwei bestimmte Curven „gegeben. Man sucht eine dritte Curve, in welcher ein schwerer Körper am schnellsten „von der ersten zur zweiten Gränzcurve herabfällt, unter der Voraussetzung, dass weder „Reibung noch widerstehendes Mittel stattfinde." Dann macht er (S. 186 und 187) folgende zwei Unterscheidungen:

1) Der Körper besitze in dem Punkte, wo die Brachystochrone die erste Gränzcurve schneidet, eine Geschwindigkeit, welche von einer bereits durchfallenen Höhe abhangt. Hierfür bekommt Lagrange das Resultat, dass beide Gränzcurven von der Brachystochrone rechtwinkelig durchschnitten werden; und er spricht: Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches wir in dem (schon citirten) zweiten Bande der Miscellanea Taurinensis gefunden haben.

2) Der Körper habe in dem Punkte der Brachystochrone, wo sie die erste Gränzcurve schneidet, noch keine Geschwindigkeit, d. h. fange daselbst erst an, sich zu bewegen.

Digitized by Google

Hierfür bekommt Lagrange das Resultat, dass die Berührenden der beiden Gränzcurven parallel sein müssen; und er spricht: Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches uns von Borda in dem schon citirten Memoire mitgetheilt ist. (Dieses ist, wie ich oben gesagt, der specielle Fall, welcher im ersten Gränzfalle der hiesigen Aufgabe enthalten ist.)

Ich habe noch einen zweiten und dritten Gränzfall hinzugefügt, welche nicht möglich gewesen wären, wenn ich nicht der Gränzengleichung XVI eine so bequeme und zweckmässige Form gegeben hätte. Und grade diese meine Form lässt es zu, dass man alle beliebigen Gränzfälle, wie ich dergleichen schon in der 161sten Aufgabe aufgestellt habe, mit der grössten Leichtigkeit durchführen kann.

Aufgabe 198.

Zwischen zwei, in einer verticalen Ebene liegenden, horizontalen (also parallelen) Graden sucht man diejenige Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der oberen Graden zur untern herabfällt, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegen wirkt, dagegen keine Reibung vorhanden sei.

Man nehme die Axe X horizontal, und die Axe Y vertical. Ferner alle positiven y sollen von oben nach unten gerichtet sein, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen. Die jedesmalige Normale der gesuchten Curve mache mit der Axe X den Winkel ε, und mit der Axe Y den Winkel ε'. Wenn das Mittel, in welchem die Bewegung stattfindet, nicht entgegenwirken würde; so wären die in der Richtung der Coordinatenaxen wirkenden Kräfte gegeben durch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Q \cdot \cos\varepsilon, \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g + Q \cdot \cos\varepsilon'$$

wie dieses früher (in der 195sten Aufgabe) der Fall war. Allein der herrschende Widerstand $m \cdot v^2$, wobei m constant ist, wirkt in der Richtung der jedesmaligen Tangente verzögernd, so dass $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ noch eine Verminderung erleiden. Wenn nun η und η' die Winkel sind, welche die jedesmalige Tangente bezüglich mit den Axen X und Y macht; so ist $\cos\eta = \frac{dx}{ds}$ und $\cos\eta' = \frac{dy}{ds}$. Es ist also

$$\text{I)} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = Q \cdot \cos\varepsilon - m \cdot v^2 \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\text{II)} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g + Q \cdot \cos\varepsilon' - m \cdot v^2 \cdot \frac{dy}{ds}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, und addirt beide Producte; so bekommt man

$$\text{III)} \quad \frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2} = g \cdot dy + Q \cdot ((\cos\varepsilon) \cdot dx + (\cos\varepsilon') \cdot dy) - m \cdot v^2 \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{ds}$$

Aus der Gleichung der Normale folgt $(\cos\varepsilon) \cdot dx + (\cos\varepsilon') \cdot dy = 0$. Ferner ist

$$\frac{dx^2 + dy^2}{ds} = \frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = (\sqrt{1 + w^2}) \cdot dy$$

Weil endlich $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$ ist, so folgt daraus $\frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2} = v \cdot dv$.

Gleichung III geht somit über in

$$\text{IV)} \quad v \cdot dv = g \cdot dy - m \cdot v^2 \cdot (\sqrt{1 + w^2}) \cdot dy$$

Man hat hiermit eine Gleichung, durch welche dargestellt ist, wie die Geschwindigkeit v von den Coordinaten x und y der gesuchten Curve abhangt. Wenn nun die obere horizontale Grade durch $y = b$, und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist unsere Aufgabe folgende: Man sucht für x und v solche zusammengehörige Functionen von y, dass dadurch der Gleichung IV identisch genügt, und folgender Ausdruck

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{v} \cdot dy$$

ein Minimum-stand wird.

Die Anfangspunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven liegen, wie die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Graden. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist der schnellste Niedergang rein von der Gestalt der Curve abhängig. Zwischen der Geschwindigkeit, welche im Anfangspunkte der gesuchten Curve, und zwischen den Geschwindigkeiten, welche in den Anfangspunkten aller nächstanliegenden Nachbarcurven herrschen, besteht also folgende Gleichung

$$\text{VI)}\quad v_b = v_b + \varkappa \cdot \delta v_b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v_b + \ldots\ldots\ldots$$

d. h. es muss einzeln stattfinden $\delta v_b = 0$; $\delta^2 v_b = 0$, $\delta^3 v_b = 0$, etc.; und grade hierdurch ist eine der Grundbedingungen der ganzen Aufgabe mitausgesprochen.

Den Umstand, dass in den Anfangspunkten aller in Betracht zu ziehenden Curven einerlei Geschwindigkeit herrschen muss, kann man dazu benützen, ihr einen festen Werth beizulegen. (Dieses ist z. B. der Fall, wenn man vorschreibt, dass die Bewegung erst im Anfangspunkte beginne, d. h. dass die Geschwindigkeit im Anfangspunkte Null sei.)

Erste Auflösung.

Man integrire Gleichung IV, und sondere v ab; so bekommt man

$$\text{VII)}\quad v = \pi(x, y, k)$$

wo k der durch die Integration eingegangene Constante ist. Man eliminire v aus Gleichung V, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\pi(x, y, k)} \cdot dy$$

Man setze W statt $\frac{\sqrt{1 + w^2}}{\pi(x, y, k)}$, mutire, und forme um, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \delta t = \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b + \int_b^\beta \left(\frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy$$

Somit hat man jetzt die Hauptgleichung

$$\text{X)}\quad \frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XI)}\quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b = 0 .$$

Die Hauptgleichung X ist von der zweiten Ordnung. Durch deren Integration gehen also zwei willkürliche Constanten ein. Durch Integration der Gleichung IV ist bereits ein solcher eingegangen. Man hat daher im Ganzen drei willkürliche Constanten. Ebensoviele hat man in der 195sten Aufgabe bekommen, welche eigentlich ein besonderer Fall der hiesigen ist; denn diese geht in jene über, wenn man $m = 0$ setzt.

Die Gränzengleichung XI kann zur Bestimmung zweier Constanter benützt, der dritte aber muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Zweite Auflösung.

Die Geschwindigkeit v ist, wie gesagt, von den Coordinaten der Curve abhängig, d. h. die Geschwindigkeit v ist das mittelbar mutable Element. Man eliminire die mittelbaren Mutationen mittelst eines Multiplicators.

Digitized by Google

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man Π statt v^2 setzt. Dabei geht Gleichung IV über in

$$\text{XII)} \quad d\Pi = 2g \cdot dy - 2m\Pi \cdot (\sqrt{1 + w^2}) \cdot dy$$

und Gleichung V geht über in

$$\text{XIII)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{\Pi}} \cdot dy$$

Man beachte, dass Π das Quadrat der Geschwindigkeit vorstellt. Da (wie bereits in der Einleitung näher begründet) in den Anfangspunkten aller in Betracht zu ziehenden Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen muss, wenn unsere Aufgabe einen Sinn haben soll; so hat auch das Quadrat der in allen diesen Anfangspunkten herrschenden Geschwindigkeiten einerlei (entweder gegebenen oder nichtgegebenen) Werth. Zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche im Anfangspunkte der gesuchten Curve, und zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeiten, welche in den Anfangspunkten der nächstanliegenden Nachbarcurven herrschen, besteht also folgende Gleichung

$$\text{XIV)} \quad \Pi_b = \Pi_b + \varkappa \cdot \delta\Pi_b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\Pi_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\Pi_b + \ldots\ldots$$

d. h. es muss einzeln stattfinden $\delta\Pi_b = 0$, $\delta^2\Pi_b = 0$, $\delta^3\Pi_b = 0$, etc.; und grade hierdurch ist eine der Grundbedingungen der ganzen Aufgabe mitausgesprochen.

Man verwandle Gleichung XII in folgende

$$\text{XV)} \quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1 + w^2} = 0$$

Diese Gleichung ist eine nach y identische; und wenn man sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y multiplicirt, so ist auch das Product $L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1 + w^2}\right)$ noch eine identische Gleichung, und man kann es unter das Integralzeichen addiren, ohne dass t sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XVI)} \quad t = \int_b^\beta \left[\frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{\Pi}} + L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1 + w^2}\right)\right] \cdot dy$$

Wenn man die erste Form des δt nicht weiter beachten will, so stelle man die zweite her; und dann bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XVII)} \quad \delta t = \int_b^\beta \Bigg[\Bigg(&- \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{\Pi \cdot (1 + w^2)}} + \frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\Bigg) \cdot \delta x \\ &- \left(\frac{\sqrt{1 + w^2}}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} + \frac{dL}{dy} - 2Lm \cdot \sqrt{1 + w^2}\right) \cdot \delta\Pi\Bigg] \cdot dy \\ &+ \left(\frac{w}{\sqrt{\Pi \cdot (1 + w^2)}} + \frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta \\ &- \left(\frac{w}{\sqrt{\Pi \cdot (1 + w^2)}} + \frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b - L_b \cdot \delta\Pi_b\end{aligned}$$

Damit das mittelbare $\delta\Pi$ unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man L eine solche Function von y sein, dass die identische Gleichung

$$\text{XVIII)} \quad - \frac{\sqrt{1 + w^2}}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} - \frac{dL}{dy} + 2Lm \cdot \sqrt{1 + w^2} = 0$$

stattfindet Man hat also folgende Hauptgleichung

$$\text{XIX)} \quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{\Pi \cdot (1 + w^2)}} + \frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right) = 0$$

Gleichung XVIII ist von der ersten Ordnung, und durch ihre Integration geht ein

Digitized by Google

willkürlicher Constanter ein. Gleichung XIX ist von der zweiten Ordnung, und durch ihre Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Durch Integration der Gleichung XII geht auch ein willkürlicher Constanter ein. Man hat daher im Ganzen vier solcher Constanter, von denen jedoch einer zuviel ist; denn es wären nur drei eingegangen, wenn man das mittelbar mutable Element Π schon vor dem Mutiren direct eliminirt hätte. (Ist aus der ersten Auflösung bekannt.)

Nun ist $\delta\Pi_b = 0$, weil dieses eine Grundbedingung unserer Aufgabe ist.

Damit aber jede Spur der von Π herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man von den vier eingegangenen Constanten denjenigen, welcher zuviel ist, in der Weise, dass die Gleichung

$$\text{XX)}\quad L_\beta = 0$$

stattfindet. Gleichung XIV reducirt sich somit auf

$$\text{XXI)}\quad \delta t =$$

$$\left(\frac{w}{\sqrt{\Pi\cdot(1+w^2)}} + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1+w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{w}{\sqrt{\Pi\cdot(1+w^2)}} + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1+w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b$$

Integrirt man Gleichung XIX, so gibt sich

$$\text{XXII)}\quad \frac{w}{\sqrt{\Pi\cdot(1+w^2)}} + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1+w^2}} = A$$

Gleichung XXI geht also über in $\delta t = A\cdot\delta x_\beta - A\cdot\delta x_b$; und man hat folgende Gränzengleichung

$$\text{XXIII)}\quad A\cdot\delta x_\beta - A\cdot\delta x_b = 0$$

Von den vier eingegangenen Constanten ist derjenige, welcher zuviel ist, durch Gleichung XX bestimmt. Man hat also noch drei solcher Constanten. Zwei derselben können bestimmt werden, indem man die Gränzengleichung XXIII benützt; der letztere muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Es ist also alles, wie bei der ersten Auflösung.

Nun wäre noch zu bestimmen, was x, Π und L für Functionen von y sind. Zu dem Ende sondere man L aus XXII ab, und man bekommt

$$\text{XXIV)}\quad L = \frac{A\cdot\sqrt{1+w^2}}{2m\Pi\cdot w} - \frac{1}{2m\cdot\sqrt{\Pi^3}}$$

Man differentiire nach allem y, so gibt sich

$$\text{XXV)}\quad \frac{dL}{dy} = \frac{3}{4m\cdot\sqrt{\Pi^5}}\cdot\frac{d\Pi}{dy} - \frac{A}{2m\Pi\cdot w^2\cdot\sqrt{1+w^2}}\cdot\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{A\cdot\sqrt{1+w^2}}{2m\cdot\Pi^2\cdot w}\cdot\frac{d\Pi}{dy}$$

Substituirt man diese für L und $\frac{dL}{dy}$ gefundenen Ausdrücke in XVIII, so bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad -\frac{3\cdot\sqrt{1+w^2}}{2\cdot\sqrt{\Pi}} + \frac{A\cdot(1+w^2)}{w} - \frac{3}{4m\cdot\sqrt{\Pi^3}}\cdot\frac{d\Pi}{dy} + \frac{A}{2m\cdot w^2\cdot\sqrt{1+w^2}}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}$$

$$+\frac{A\cdot\sqrt{1+w^2}}{2m\Pi\cdot w}\cdot\frac{d\Pi}{dy} = 0$$

Aus dieser Gleichung ist nun noch Π und $\frac{d\Pi}{dy}$ zu eliminiren, weil man eine Gleichung zwischen x und y herstellen soll. Man eliminire aus XV und XXVI zunächst das $\frac{d\Pi}{dy}$, so ergibt sich

$$\text{XXVII)}\quad -\frac{3g}{2\cdot\sqrt{\Pi^3}} + \frac{A}{2w^2\cdot\sqrt{1+w^2}}\cdot\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{Ag\cdot\sqrt{1+w^2}}{\Pi\cdot w} = 0$$

Man eliminire nun das L aus XVIII und XXII; so bekommt man

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{dL}{dy} = \frac{A\cdot(1+w^2)}{\Pi\cdot w} - \frac{3\cdot\sqrt{1+w^2}}{2\cdot\sqrt{\Pi^3}}$$

Digitized by Google

Nun folgt aus Gleichung XXVII

$$\frac{A \cdot (1 + w^2)}{\Pi \cdot w} = \frac{3 \cdot \sqrt{1 + w^2}}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} - \frac{A}{2g \cdot w^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2}$$

und wenn man diesen Ausdruck in XXVIII einsetzt, so bekommt man

$$\text{XXIX)} \quad \frac{dL}{dy} = - \frac{A}{2 \cdot g \cdot w^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{A}{2g \cdot w^2} \cdot \frac{dw}{dy}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XXX)} \quad L = E + \frac{A}{2gw}$$

Aus XXX und XXIV folgt also

$$\text{XXXI)} \quad 2Em + \frac{Am}{g \cdot w} + \frac{1}{\sqrt{\Pi^3}} - \frac{A \cdot \sqrt{1 + w^2}}{\Pi \cdot w} = 0$$

Mittelst der beiden Gleichungen XXXI und XXVII kann man auf algebraischem Wege das Π eliminiren, und hat dann zwischen x und y eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche durch Integration noch zwei neue Constanten einführt, so dass man, wie bereits bemerkt, im Ganzen vier willkürliche Constanten hat, von welchen aber einer zuviel ist.

Hat man integrirt, und zwischen x und y eine Gleichung $x = \varphi(y)$ gefunden; so bestimme man hierauf $\Pi = \zeta(y)$, was (durch Gleichung XXVII oder XXXI) auf algebraischem Wege geschieht. Zuletzt bestimme man auch $L = F(y)$, was (durch Gleichung XXIV oder XXX) gleichfalls auf algebraischem Wege geschieht. Gleichung XX geht jetzt über in

$$\text{XXXII)} \quad F(\beta) = 0$$

Aber eben weil diese Gleichung zur Bestimmung des Constanten, welcher zuviel ist, dienen soll; so muss sie stattfinden, unabhängig von den Gränzbedingungen, welche noch aufgestellt werden mögen.

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht nun keine weitere Schwierigkeit mehr entgegen.

Gränzfall. Der Anfangspunkt (a, b) und der Endpunkt (α, β) sollen fest vorgeschrieben sein. Hierbei ist $\delta x_b = 0$, $\delta x_\beta = 0$, $\delta^2 x_b = 0$, $\delta^2 x_\beta = 0$, etc. Die Gränzengleichung XXIII fällt also von selbst hinweg. Soll zugleich die im Anfangspunkte herrschende Geschwindigkeit den festen Werth e haben, so hat man die Gleichung $v_b = e$, welche, eben weil $\Pi = v^2$ ist, übergeht in

$$\Pi_b = \zeta(b) = e^2$$

Für den festen Anfangspunkt und Endpunkt bestehen folgende Gleichungen

$$a = \varphi(b), \qquad \text{und} \qquad \alpha = \varphi(\beta)$$

Die drei letzten Gleichungen dienen dazu, den drei willkürlichen Constanten eine Bestimmung zu geben, so dass in diesem speciellen Falle nichts Unbestimmtes zurück bleibt.

Schlussbemerkung. Die Aufgabe, die Linie des schnellsten Niederganges im widerstehenden Mittel zu finden, wurde von Euler gestellt und gelöst.

I) Zuerst an folgenden zwei Orten:

1) im siebenten Bande der älteren Petersburger Commentarien,
2) im zweiten Bande seiner Mechanik. Petersb. 1736.

An beiden Orten ist aber das angewendete Verfahren nicht als richtig zu betrachten, wie sich auch Lagrange in seinem Werke „Leçons sur le Calcul des fonctions“ ausspricht. (Man sehe die 21te Vorlesung. Geschichte des isoperimetrischen Problems. Nr. 343.)

II) Hierauf bringt er diese Aufgabe an zwei Stellen seines Werkes (methodus inveniendi, etc.) wieder

1) Seite 126 stellt er die Aufgabe auf folgende Weise: Man sucht die Curve des schnellsten Niederganges, wenn die Bewegung in einem Mittel stattfindet, das nach Verhältniss der 2nten Potenz der Geschwindigkeit entgegenwirkt.
2) Seite 214 stellt er die Aufgabe noch allgemeiner: Man sucht die Curve des schnellsten Niederganges, wenn die Bewegung in einem Mittel stattfindet,

Digitized by Google

das nach Verhältniss irgend einer beliebigen Function der Geschwindigkeit entgegenwirkt.

Das Verfahren an den beiden letzten Stellen ist richtig.

Diese zwei Aufgaben von Euler sind also allgemeiner, aber ihre Durchführung ist nicht viel schwieriger, als bei der hier von mir durchgeführten Aufgabe, wo ich die Bewegung in einem Mittel geschehen lasse, welches nach dem Verhältnisse der zweiten Potenz der Geschwindigkeit entgegenwirkt.

Fast alle Schriftsteller, die über den sogenannten Variationscalcul schrieben, haben diese Aufgabe aufgenommen, und mittelst der hier stehenden zweiten Auflösung durchgeführt. Dabei haben sie aber die Bedeutung der eingehenden Constanten ganz und gar misskannt. Ich habe nun

1) dadurch, dass ich die zweite mit der ersten Auflösung verglich, nachgewiesen, dass bei der zweiten Auflösung ein Constanter eingeht, welcher seiner wahren Bedeutung nach zuviel ist; und desshalb muss seine Bestimmung immer auf die nemliche Weise geschehen, unabhängig von den verschiedenen Gränzfällen, welche man aufstellen mag.

2) Ausserdem habe ich genau hervorgehoben, dass die Aufgabe nur dann einen Sinn hat, wenn in den Anfangspunkten aller zu betrachtenden Curven einerlei Geschwindigkeit, sei sie nun gegeben oder nichtgegeben, herrscht; und diesen Umstand habe ich als Grundbedingung der Aufgabe vorangestellt.

Aufgabe 199.

In einer verticalen Ebene ist eine horizontale Grade und eine durch die Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ bestimmte Curve gegeben. Man sucht die Bahn, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von jener horizontalen Graden bis zu dieser Curve herabfällt, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt, dagegen keine Reibung vorhanden sei.

Die Einleitung ist, wie in voriger Aufgabe. Man gebrauche die Multiplicatorenmethode, und setze zu diesem Ende

$$\text{I)}\quad t = \int_b^\beta \left[\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}} + L\cdot\left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1+w^2}\right)\right]\cdot dy$$

Diesen Ausdruck muss man einer gemischten Mutation unterwerfen, wobei aber das b constant ist; und da man (nach der Einleitung zur 160sten Aufgabe) die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}t$ nicht beachten darf, so stelle man gradezu die zweite her, für welche sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned}\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}t = \int_b^\beta \Bigg[&\left(-\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{\Pi\cdot(1+w^2)}} + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1+w^2}}\right)\right)\cdot\delta x \\ &- \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{2\cdot\sqrt{\Pi^3}} + \frac{dL}{dy} - 2Lm\cdot\sqrt{1+w^2}\right)\cdot\delta\Pi\Bigg]\cdot dy \\ &+ \left(\frac{w + 2Lm\cdot w\cdot\sqrt{\Pi^3}}{\sqrt{\Pi}\cdot(1+w^2)}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta + L_\beta\cdot\delta\Pi_\beta \\ &+ \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}} + L\cdot\left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1+w^2}\right)\right)_\beta\cdot\vartheta\beta \\ &- \left(\frac{w + 2Lmw\cdot\sqrt{\Pi^3}}{\sqrt{\Pi}\cdot(1+w^2)}\right)_b\cdot\delta x_b - L_b\cdot\delta\Pi_b\end{aligned}$$

Man bekommt zunächst folgende zwei nach y identische Gleichungen:

$$\text{III)}\quad -\frac{\sqrt{1+w^2}}{2\cdot\sqrt{\Pi^3}} - \frac{dL}{dy} + 2Lm\cdot\sqrt{1+w^2} = 0$$

und

$$\text{IV)}\quad \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{\Pi\cdot(1+w^2)}} + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1+w^2}}\right) = 0$$

Digitized by Google

Dieses sind dieselben Gleichungen, wie in voriger Aufgabe; man bekommt also auch wieder für x und Π ganz die nemlichen Functionen von y.

Hinsichtlich der ausserhalb des Integralzeichens stehenden Theilsätze beachte man:

1) Es ist $\delta\Pi_b = 0$, weil dieses eine Grundbedingung der Aufgabe ist, wie man in der vorigen Aufgabe ersehen kann.

2) Es ist $L_\beta = o$, damit jede Spur der von Π herrührenden Mutationen wegfällt.

3) Weil $\left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1+w^2}\right)$ bei jedem Werthe des y zu Null wird; so wird auch $\left(L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1+w^2}\right)\right)_\beta = 0.$

Sonach reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{V)} \quad {}_{(}\delta_{)}t = \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{\sqrt{\Pi} \cdot (1+w^2)}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{\sqrt{\Pi} \cdot (1+w^2)}\right)_b \cdot \delta x_b$$

Integrirt man Gleichung IV, so gibt sich

$$\text{VI)} \quad \frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{\sqrt{\Pi} \cdot (1+w^2)} = A$$

Gleichung V geht also über in

$$\text{VII)} \quad {}_{(}\delta_{)}t = A \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - A \cdot \delta x_b$$

Man hat daher die Gränzengleichung

$$\text{VIII)} \quad A \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - A \cdot \delta x_b = 0$$

Gleichung VI gilt bei jedem Werthe des y, also auch bei $y = \beta$. Wenn man aber beachtet, dass $L_\beta = 0$ ist, so reducirt bei $y = \beta$ die Gleichung VI sich auf

$$\text{IX)} \quad \left(\frac{w}{\sqrt{\Pi} \cdot (1+w^2)}\right)_\beta = A$$

Daraus folgt

$$\text{X)} \quad \left(\frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\Pi}}\right)_\beta = A \cdot \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta$$

Sonach geht Gleichung VIII über in

$$\text{XI)} \quad A \cdot \delta x_\beta + A \cdot \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta - A \cdot \delta x_b = 0$$

Dieses ist eine sehr einfache und bequeme Form der Gränzengleichung

Hat man endlich $x = \varphi(y)$, $\Pi = \zeta(y)$ und $L = F(y)$ gefunden; so muss man vor Allem

$$\text{XII)} \quad F(\beta) = 0$$

setzen. Diese Gleichung dient zur Bestimmung des Constanten, welcher zuviel ist; und sie muss stattfinden, und abhängig von den verschiedenen Gränzbedingungen, welche noch aufgestellt werden mögen (ist in der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe hinlänglich erläutert). Hat man aber durch $F(\beta) = 0$ einen Constanten bestimmt, so sind immer noch drei derselben vorhanden, welche eine Bestimmung erwarten.

Erster Fall. Der Anfangspunkt (a, b) sei fest vorgeschrieben; und man sucht diejenige Curve, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von diesem festen Punkte durch das widerstehende Mittel bis zur Gränzcurve herabfällt.

Hier ist $\delta x_b = 0$, $\delta^2 x_b = 0$, etc.; und die Gränzengleichung XI, wenn man den constanten Factor A weglässt, reducirt sich auf

$$1) \quad \delta x_\beta + \left(\frac{1+w^2}{w}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta = 0$$

Digitized by Google

Da die gegebene Gränzcurve von der gesuchten Curve geschnitten wird, so muss bei diesem Durchschnittspunkte

$$2)\quad x_\beta = \alpha$$

sein. Unterwirft man diese Gleichung einer gemischten Mutation, so bekommt man

$$3)\quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta = \vartheta\alpha$$

etc. etc.

Man kann von hier an diesen ersten Fall auf zweierlei Weise durchführen, je nachdem man $\vartheta\alpha$ oder $\vartheta\beta$ als abhängig behandelt. Man behandle $\vartheta\alpha$ als abhängig. Aus $f(\alpha, \beta) = 0$ folgt

$$4)\quad \vartheta\alpha = \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$$

etc.

Eliminirt man $\vartheta\alpha$ aus Gleichung 3, so bekommt man

$$5)\quad \delta x_\beta = \left(\frac{d\alpha}{d\beta} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta\right) \cdot \vartheta\beta$$

Eliminirt man δx_β aus Gleichung 1, so bekommt man

$$6)\quad \left(\frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta}\right) \cdot \vartheta\beta = 0$$

Wegen der Willkürlichkeit des $\vartheta\beta$ folgt aus letzterer Gleichung

$$7)\quad \frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta} = 0$$

Diese Gleichung, welche mit folgender $1 + \frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta = 0$ ganz gleichbedeutend ist, zeigt an, dass die gesuchte Curve auf der gegebenen Gränzcurve senkrecht steht, wie wenn kein widerstehendes Mittel vorhanden wäre. (Man sehe den ersten Fall der 196sten und 197sten Aufgabe.)

Macht man noch die Vorschrift, dass die Bewegung im Anfangspunkte (a, b) erst beginne, d. h. dass in diesem Punkte die Geschwindigkeit Null sei; so hat man die Gleichung

$$8)\quad \mathfrak{z}(b) = 0$$

Nun sind a und b gegeben. Die Gleichungen 7 und 8, verbunden mit $a = \varphi(b)$, $\alpha = \varphi(\beta)$ und $f(\alpha, \beta) = 0$, reichen also hin, um α und β und die drei noch vorhandenen Constanten zu bestimmen.

Zweiter Fall. Der Anfangspunkt (a, b) sei nicht fest vorgeschrieben; und man sucht unter allen jenen Curven, bei welchen die Summe der Gränzabscissen den nemlichen Werth K behält, diejenige heraus, in welcher der schwere Punkt in der kürzesten Zeit von der horizontalen Graden durch das widerstehende Mittel bis zur Gränzcurve herabfällt.

Dieser Fall verlangt, dass für die Gränzpunkte der gesuchten Curve folgende zwei Gleichungen

$$9)\quad x_\beta = \alpha, \qquad \text{und} \qquad 10)\quad x_\beta + x_b = K$$

stattfinden sollen. Unterwirft man Gleichung 10 einer gemischten Mutation, so hat man zu beachten, dass b constant ist. Man bekommt also

$$11)\quad \delta x_\beta + \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta \cdot \vartheta\beta + \delta x_b = 0$$

Nun ist $\delta x_\beta = \left(\frac{d\alpha}{d\beta} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta\right) \cdot \vartheta\beta$; und somit folgt aus 11, dass $\delta x_b = -\frac{d\alpha}{d\beta} \cdot \vartheta\beta$.

Eliminirt man jetzt δx_β und δx_b aus XI, und lässt man den constanten Factor A weg; so bekommt man

Digitized by Google

$$12)\quad \left(2\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta}\right)\cdot\vartheta\beta=0$$

Daraus folgt

$$13)\quad 2\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta}=0$$

oder, was dasselbe ist

$$14)\quad 1+2\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)_\beta=0$$

Macht man noch die Vorschrift, dass die im Anfangspunkte herrschende Geschwindigkeit den festen Werth e habe; so hat man die Gleichung $v_b = e$, welche, eben weil $\Pi = v^2$ ist, übergeht in

$$15)\quad \Pi_b=\zeta(b)=e^2$$

Nun ist der Werth des b gegeben. Die Gleichungen 10, 14, 15, verbunden mit $f(\alpha,\beta)=0$, $a=\varphi(b)$ und $\alpha=\varphi(\beta)$, reichen also hin, um a, α, β, und die drei noch vorhandenen Constanten zu bestimmen.

Man vergleiche in der 160sten Aufgabe den vierten Fall. Dort steht (S. 242) die Bedingungsgleichung

$$y_a+y_\alpha=K$$

welche der hiesigen Gleichung 10 entspricht, indem x und y vertauscht sind.

Diese Gränzfälle kann man beliebig vermehren.

Ebenso steht der herstellung des Prüfungsmittels in jedem einzelnen Falle nicht die geringste Schwierigkeit entgegen.

Schlussbemerkung. In Lagrange's Werke „Leçons sur le Calcul des fonctions" befindet sich folgende Aufgabe: „In einer verticalen Ebene liegen zwei Curven. Man sucht zwischen beiden die Brachystochrone, aber unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches nach Verhältniss irgend einer Function der Geschwindigkeit entgegenwirkt." (Man sehe das fünfte Beispiel in der 22sten Vorlesung.)

Ich habe hier in dieser Aufgabe den Widerstand des Mittels ebenso vorausgesetzt, wie in der vorigen, um mich kürzer fassen zu können. Und weil ich schon in der 196sten und 197sten Aufgabe die Brachystochrone zwischen zwei gegebenen Gränzcurven gesucht habe, so habe ich diesmal eine feste Grade zur Anfangsgränze genommen, besonders desshalb, damit jetzt die Mutationen der Gränzbedingungen nicht wieder ebenso ausfallen, als in den citirten zwei Aufgaben.

Indem ich wiederhole, dass ich der Gränzengleichung XI eine sehr einfache und bequeme Form gegeben habe; bemerke ich noch, dass ohne diese Form es unmöglich gewesen wäre, den zweiten Gränzfall durchzuführen, und dass gerade bei dieser Form alle beliebigen Gränzfälle, wie dergleichen schon in der 160sten Aufgabe vorkommen, mit der grössten Leichtigkeit durchgeführt werden können.

Auch vergleiche man noch die zwei letzten Punkte in der Schlussbemerkung zur vorigen Aufgabe.

Aufgabe 200.

Man sucht zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen diejenige räumliche Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der oberen Ebene zur unteren herabfällt, wenn dabei weder Reibung noch ein widerstehendes Mittel stattfindet.

Der herabfallende Punkt unterliegt hier nur dem Gesetze der Schwere g, und ist ausserdem gezwungen, in einer räumlichen Curve zu bleiben, die aber noch gesucht werden soll.

Man nehme die Axe X horizontal, also parallel mit den gegebenen Ebenen; und die Axe Z nehme man auch horizontal und senkrecht auf die Axe X. Die Axe Y nehme man vertical, also senkrecht auf X und Z zugleich. Ferner alle positiven y sollen von oben nach unten gerichtet sein, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen.

Digitized by Google

Die Kraft Q, welche den fallenden Punkt in seine feste Bahn zwingt, wirkt senkrecht auf die Bahn, d. h. senkrecht auf die jedesmalige Tangente; und wenn diese Kraft mit den Coordinatenaxen X, Y, Z bezüglich die Winkel ε, ε', ε'' macht; so bekommt man folgende mit den Coordinatenaxen parallel wirkenden Kräfte:

$$\text{I)}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = Q \cdot \cos \varepsilon$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g + Q \cdot \cos \varepsilon'$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Q \cdot \cos \varepsilon''$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit dx, dy, dz, und addirt dann die Producte; so gibt sich

$$\text{IV)}\quad \frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z}{dt^2} = g \cdot dy + Q\left((\cos \varepsilon)\, dx + (\cos \varepsilon')\, dy + (\cos \varepsilon'') \cdot dz\right)$$

Aus der Gleichung für die Normalebene ist bereits bekannt, dass

$$(\cos \varepsilon) \cdot dx + (\cos \varepsilon') \cdot dy + (\cos \varepsilon'') \cdot dz = 0$$

ist. Ferner ist $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$; daraus folgt

$$\frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z}{dt^2} = v \cdot dv$$

Gleichung IV geht also jetzt über in

$$\text{V)}\quad v \cdot dv = g \cdot dy$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{VI)}\quad v^2 = 2gy + 2k$$

oder

$$\text{VII)}\quad v = \sqrt{2gy + 2k}$$

Hier ist 2k der durch die Integration eingegangene Constante. Man hat also, schon ehe man die gesuchte räumliche Curve kennt, für die Geschwindigkeit v eine ganz bestimmte und nur von der Fallhöhe y abhängige Function. Man erkennt sonach:

„Beim Falle, wo weder ein widerstehendes Mittel noch Reibung stattfindet, hat „der fallende Punkt in irgend einer Stelle der gesuchten räumlichen Curve dieselbe Geschwindigkeit, wie wenn er rein vertical bis in eine dieser Stelle „gleichkommende Tiefe herabgefallen wäre."

Nun ist (man vergleiche die Einleitung zur 195sten Aufgabe)

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{v}$$

und setzt man zur Abkürzung noch w und $\mathfrak{w}$ bezüglich statt $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dz}{dy}$, so bekommt man

$$dt = \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{v} \cdot dy$$

Wenn nun die obere horizontale Ebene durch $y = b$, und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist die Zeit, in welcher der schwere Punkt seine Bahn durchfällt, dargestellt durch

$$\text{VIII)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{v} \cdot dy$$

Eliminirt man v, so geht letzterer Ausdruck über in

$$\text{IX)}\quad t = \int^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{2gy + 2k}} \cdot dy$$

und unsere Aufgabe ist jetzt nur noch folgende: Man soll für x und z solche Functionen von y suchen, dass der in IX aufgestellte Ausdruck ein Minimum-stand wird. Da

Digitized by Google

die Differenz (β — b) positiv ist, so muss auch die erste Ableitung der Zeit positiv sein; und somit ist gerechtfertigt, den mit der Ableitung $\frac{dt}{dy}$ gleichbedeutenden Ausdruck $\frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{2gy + 2k}}$ als positiv vorausgesetzt zu haben. Man mutire, und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$; so gibt sich

$$\text{X)} \quad \delta t = \int_b^\beta \left(\frac{w}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}} \cdot \frac{d\delta x}{dy} + \frac{\mathfrak{w}}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}} \cdot \frac{d\delta z}{dy}\right) \cdot dy$$

Man forme um, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad \delta t =$$

$$-\int_b^\beta \left[\left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{u \cdot \sqrt{2gy+2k}}\right)\right) \cdot \delta x + \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{w}}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dy$$

$$+ \left(\frac{w}{u\sqrt{2gy+2k}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy+2k}}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta$$

$$- \left(\frac{w}{u\sqrt{2gy+2k}}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy+2k}}\right)_b \cdot \delta z_b$$

Untersuchung der ersten Form des δt. Hier muss man $w = 0$ und $\mathfrak{w} = 0$ setzen. Man hat also die Gleichungen $\frac{dx}{dy} = 0$ und $\frac{dz}{dy} = 0$, woraus

$$\text{XII)} \quad x = G, \qquad \text{und} \qquad \text{XIII)} \quad z = F$$

folgt, so dass man die mit der Axe Y parallele, d. h. die verticale Grade hat. Diese Linie ist aber in allen den Fällen unzulässig, wo der Endpunkt der Fallbahn nicht mit dem Anfangspunkte in einer und derselben verticalen Graden liegen darf.

Untersuchung der zweiten Form des δt. Hier bekommt man die beiden Hauptgleichungen

$$\text{XIV)} \quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}}\right) = 0, \quad \text{und} \quad \text{XV)} \quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{w}}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}}\right) = 0$$

Integrirt man, so bekommt man bezüglich

$$\text{XVI)} \quad \frac{w}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}} = A, \quad \text{und} \quad \text{XVII)} \quad \frac{\mathfrak{w}}{u \cdot \sqrt{2gy + 2k}} = B$$

Dividirt man diese Gleichungen in einander, so gibt sich

$$\frac{w}{\mathfrak{w}} = \frac{A}{B}, \text{ d. h. es ist } B \cdot \frac{dx}{dy} - A \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

Daraus folgt durch abermalige Integration

$$\text{XVIII)} \quad B \cdot x - A \cdot z = C$$

Dieses ist die Gleichung einer auf der Coordinatenebene XZ senkrechten Ebene.

Die gesuchte Curve ist also eine ebene Curve, und liegt in einer verticalen Ebene, wie zu erwarten war.

Aus Gleichung XVIII folgt $w = \frac{A}{B} \cdot \mathfrak{w}$; und so geht Gleichung XVI über in

$$\text{XIX)} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{B \cdot \sqrt{2gy + 2k}}{\sqrt{1 - (A^2 + B^2) \cdot (2gy + 2k)}}$$

Durch Integration dieser Gleichung geht noch ein weiterer Constanter E ein, so dass man im Ganzen fünf willkürliche Constanten k, A, B, C, E hat.

Integrirt man Gleichung XIX, so ergibt sich die Gleichung einer Cycloide.

Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{XX)} \quad A \cdot \delta x_\beta + B \cdot \delta z_\beta - A \cdot \delta x_b - B \cdot \delta z_b = 0$$

welche bei Bestimmung der Constanten mitbenützt werden muss.

Digitized by Google

Mutirt man noch einmal, so bekommt man

$$\text{XXI)} \quad \delta^2 t = A \cdot \delta^2 x_\beta + B \cdot \delta^2 z_\beta - A \cdot \delta^2 x_b - B \cdot \delta^2 z_b$$

$$+ \int_b^\beta \frac{u}{\sqrt{2gy + 2k}} \cdot \frac{1}{u^4} \cdot \left(\left(\mathfrak{w} \cdot \frac{d\delta x}{dy} - w \cdot \frac{d\delta z}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\delta x}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dy} \right)^2 \right) \cdot dy$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Factor $\frac{u}{\sqrt{2gy + 2k}}$, welcher mit $\frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{2gy + 2k}}$ gleichbedeutend ist, ist gleich anfangs als positiv vorausgesetzt worden. Folglich ist auch $\delta^2 t$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

Sind die beiden Gränzpunkte (a, b, c) und (α, β, γ) der gesuchten Bahn gegeben, so liegt diese ganz in der durch diese Punkte gehenden verticalen Ebene.

Zur Bestimmung der fünf Constanten k, A, B, C, E kann man Bedingungen aufstellen nach Analogie derer, welche in der 195sten Aufgabe gestellt worden sind.

Schlussbemerkung. In der zur 197sten Aufgabe gehörigen Schlussbemerkung ist bereits mitgetheilt, dass Lagrange, als er seine neue Methode zum ersten Male öffentlich bekannt machte, die Aufsuchung der „Brachystochrone im leeren Raume“ als erste Aufgabe hinzugefügt, und folgende Integralformel

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$$

aufgestellt habe, welche von der gesuchten Curve zu einem Minimum gemacht werden soll. Dabei sind die mit der Richtung der Schwere parallelen Coordinaten mit x bezeichnet, während ich dieselben mit y bezeichne, und zwar bei allen hier von mir über die Brachystochrone mitgetheilten Aufgaben.

Obige Formel des Lagrange sollte eigentlich im Nenner noch den constanten Factor $\sqrt{2g}$ enthalten, d. h. sie sollte eigentlich heissen

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{2g \cdot x}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$$

doch das Weglassen dieses constanten Factors ändert nichts an der Curve, die noch gesucht werden soll.

Dagegen passt Lagrange's Formel nur für den Fall, dass die Bewegung grade da, wo $x = 0$ ist, beginne; und sie ist unpassend für alle jene Fälle, bei denen die Bewegung an irgend einer andern Stelle beginnen, oder bei denen an irgend einer Stelle eine bestimmt vorgeschriebene Geschwindigkeit herrschen soll.

Diese Unvollkommenheit wird aber dadurch gehoben, dass man neben das Element x noch einen willkürlichen Constanten hinzutreten lässt, wobei man folgende Formel

$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{2g \cdot (x + k)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x + k}}$$

bekommt. Der willkürliche Constante k lässt sich dann noch so bestimmen, wie es die verschiedenen Bedingungen verlangen werden, und wie bereits in den früheren Aufgaben geschehen ist.

Besagte Verbesserung hat schon Lagrange selbst angebracht, als er die hiesige Aufgabe später noch einmal behandelte. Man sehe dessen Werk: „Théorie des Fonctions analytiques.“ Seconde partie. chap. XIII. Nr. 73.

Aufgabe 201.

Zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen sucht man diejenige räumliche Curve, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der oberen zur unteren Ebene herabfällt, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt, dagegen keine Reibung vorhanden sei.

Man nehme die Axe X horizontal, also parallel mit den gegebenen Ebenen; und die Axe Z nehme man auch horizontal und senkrecht auf die Axe X. Die Axe Y nehme man vertical, also senkrecht auf X und Z zugleich. Ferner alle positiven y sollen

Digitized by Google

von oben nach unten gerichtet sein, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen.

Verfahrt man hier nach Analogie der 198sten Aufgabe, so kommt man zu den drei Gleichungen

$$\text{I)}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = Q \cdot \cos \varepsilon - m \cdot v^2 \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g + Q \cdot \cos \varepsilon' - m \cdot v^2 \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Q \cdot \cos \varepsilon'' - m \cdot v^2 \cdot \frac{dz}{ds}$$

wo ε, ε', ε'' die schon in voriger Aufgabe besagte Bedeutung haben. Aus den Gleichungen I, II, III folgt weiter

$$\text{IV)}\quad v \cdot dv = g \cdot dy - m \cdot v^2 \cdot \left(\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right) \cdot dy$$

wo w und $\mathfrak{w}$ bezüglich statt $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dz}{dy}$ gesetzt ist.

Man hat hiermit eine Gleichung, durch welche dargestellt ist, wie die Geschwindigkeit v von den Coordinaten x, y, z der gesuchten räumlichen Curve abhangt. Wenn nun die obere horizontale Ebene durch $y = b$ und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist unsere Aufgabe folgende: Man sucht für x, z und v solche zusammengehörige Functionen von y, dass dadurch der Gleichung IV identisch genügt, und folgender Ausdruck

$$\text{V)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{v} \cdot dy$$

ein Minimum-stand wird.

Die Anfangspunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven liegen, wie die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Ebene. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist der schnellste Niedergang rein von der Gestalt der Curve abhängig.

Es finden also auch jetzt die Gleichungen

$$\delta v_b = 0, \quad \delta^2 v_b = 0, \quad \delta^3 v_b = 0, \text{ etc.}$$

statt. Durch sie ist eine der Grundbedingungen der ganzen Aufgabe mit ausgesprochen. (Dass aber diese Gleichungen stattfinden müssen, wird bewiesen, wie in der 198sten Aufgabe.)

Den Umstand, dass in den Anfangspunkten aller in Betracht zu ziehenden Curven einerlei Geschwindigkeit herrschen muss, kann man dazu benützen, ihr einen festen Werth beizulegen. (Dieses ist z. B. der Fall, wenn man vorschreibt, dass die Bewegung im Anfangspunkte erst beginne, d. h. dass die Geschwindigkeit im Anfangspunkte Null sei.)

Erste Auflösung.

Man integrire Gleichung IV, und sondere v ab; so bekommt man

$$\text{VI)}\quad v = \pi(x, z, y, k)$$

wo k der durch die Integration eingegangene Constante ist. Man eliminire v aus Gleichung V, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\pi(x, z, y, k)} \cdot dy$$

Man setze W statt $\frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\pi(x, z, y, k)}$, mutire, und forme um; so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad \delta t = \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right)_b \cdot \delta z_b$$

$$+ \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right)\right) \cdot \delta x + \left(\frac{d_z W}{dz} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dy$$

Man bekommt hier die beiden Hauptgleichungen

$$\text{IX)}\quad \frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right) = 0, \quad \text{und} \quad \text{X)}\quad \frac{d_z W}{dz} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XI)}\quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{d_\mathfrak{w} W}{d\mathfrak{w}}\right)_b \cdot \delta z_b = 0$$

Die beiden Hauptgleichungen sind von der zweiten Ordnung. Durch deren Integration gehen also vier willkürliche Constanten ein. Durch Integration der Gleichung IV ist bereits ein solcher eingegangen. Man hat daher im Ganzen fünf willkürliche Constanten. (Ebensoviele hat man in der vorigen Aufgabe bekommen, welche eigentlich ein besonderer Fall der hiesigen ist; denn diese geht in jene über, wenn man $m = 0$ setzt).

Die Gränzengleichung XI kann man zur Bestimmung von vier Constanten benützen; der fünfte muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Zweite Auflösung.

Die Geschwindigkeit v ist, wie gesagt, von den Coordinaten der Curve abhängig, d. h. die Geschwindigkeit v ist das mittelbar mutable Element. Man eliminire die mittelbaren Mutationen mittelst eines Multiplicators.

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man Π statt v^2 setzt. Dabei geht Gleichung IV über in

$$\text{XII)}\quad d\Pi = 2g \cdot dy - 2m\Pi \cdot \left(\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right) \cdot dy$$

und Gleichung V geht über in

$$\text{XIII)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{\Pi}} \cdot dy$$

Man beachte, dass Π das Quadrat der Geschwindigkeit vorstellt. Da, wie bereits in der Einleitung näher begründet ist, in den Anfangspunkten aller in Betracht zu ziehenden Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen muss, wenn unsere Aufgabe einen Sinn haben soll; so hat auch das Quadrat der in allen diesen Anfangspunkten herrschenden Geschwindigkeiten einerlei (entweder gegebenen oder nichtgegebenen) Werth.

Es finden also auch jetzt die Gleichungen

$$\delta\Pi_b = 0, \quad \delta^2\Pi_b = 0, \quad \delta^3\Pi_b = 0, \text{ etc.}$$

statt; und grade hierdurch ist eine der Grundbedingungen der ganzen Aufgabe mit ausgesprochen. (Dass aber diese Gleichungen stattfinden müssen, wird bewiesen, wie in der zweiten Auflösung der 198sten Aufgabe.)

Man verwandle Gleichung XII in folgende

$$\text{XIV)}\quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} = 0$$

Diese Gleichung ist eine nach y identische; und wenn man sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y multiplicirt, so ist auch das Product $L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right)$ noch eine identische Gleichung, und man kann es unter das Integralzeichen addiren, ohne dass t sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

Digitized by Google

$$\text{XV)}\quad t = \int_b^\beta \left[\frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{\Pi}} + L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right)\right] \cdot dy$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$. Wenn man dann die erste Form des δt nicht weiter beachten will, so stelle man die zweite her. Dafür bekommt man

$$\text{XVI)}\quad \delta t =$$

$$\int_b^\beta \left[\left(-\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)\right) \cdot \delta x + \left(-\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)\right) \cdot \delta z\right.$$

$$\left. + \left(2Lm \cdot u - \frac{u}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} - \frac{dL}{dy}\right) \cdot \delta\Pi\right] \cdot dy$$

$$+ \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta + L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta$$

$$- \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_b \cdot \delta z_b - L_b \cdot \delta\Pi_b$$

Damit das mittelbare $\delta\Pi$ unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man L eine solche Function von y sein, dass die identische Gleichung

$$\text{XVII)}\quad 2Lmu - \frac{u}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} - \frac{dL}{dy} = 0$$

stattfinde. Man hat also folgende zwei Hauptgleichungen

$$\text{XVIII)}\quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right) = 0, \quad \text{und} \quad \text{XIX)}\quad \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right) = 0$$

Gleichung XVII ist von der ersten Ordnung, und durch ihre Integration geht ein willkürlicher Constanter ein. Die Gleichungen XVIII und XIX sind von der zweiten Ordnung, und durch ihre Integration gehen vier willkürliche Constanten ein. Durch Integration der Gleichung XIV geht auch ein willkürlicher Constanter ein. Man hat also im Ganzen sechs solcher Constanter, von denen aber einer zuviel ist; denn es wären nur fünf eingegangen, wenn man das mittelbar mutable Element Π schon vor dem Motiren direct eliminirt hätte. (Ist aus der ersten Auflösung bekannt.)

Man bestimme also von den sechs eingegangenen Constanten denjenigen, welcher zuviel ist, auf die Weise, dass die Gleichung

$$\text{XX)}\quad L_\beta = 0$$

stattfindet. Nun muss $\delta\Pi_b = 0$ sein, weil dieses eine Grundbedingung der Aufgabe ist. Es fällt also jede Spur der von Π herrührenden Mutation weg, und Gleichung XVI reducirt sich auf

$$\text{XXI)}\quad \delta t = \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta$$

$$- \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_b \cdot \delta x_b - \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)_b \cdot \delta z_b$$

Integrirt man Gleichung XVIII und XIX, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXII)}\quad \frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} = A, \quad \text{und} \quad \text{XXIII)}\quad \frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} = B$$

Man hat also die Gränzengleichung

$$\text{XXIV)}\quad A \cdot \delta x_\beta + B \cdot \delta z_\beta - A \cdot \delta x_b - B \cdot \delta z_b = 0$$

Von den sechs eingegangenen Constanten ist derjenige, welcher zuviel ist, durch Gleichung XX bestimmt worden. Man hat daher noch fünf solcher Constanten. Vier derselben können bestimmt werden, indem man die Gränzengleichung XXIV benützt.

Digitized by Google

Der letzte muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Es ist also Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Nun wäre noch zu bestimmen, was x, z, Π und L für Functionen von y sind. Dividirt man XXIII in XXII, so bekommt man

$$\text{XXV)} \quad \frac{w}{\mathfrak{w}} = \frac{A}{B}, \text{ oder } B \cdot \frac{dx}{dy} - A \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XXVI)} \quad B \cdot x - A \cdot z = C$$

Diese Gleichung ist aber dieselbe, wie Gleichung XVIII der vorigen Aufgabe, d. h. die gesuchte Curve ist auch jetzt von einfacher Krümmung, und liegt in einer auf der Coordinatenebene XZ senkrechten Ebene.

Aus XXV folgt $\mathfrak{w} = \frac{B}{A} \cdot w$. Wenn man jetzt $\mathfrak{w}$ aus den Gleichungen XIV, XVII, XXII und XXIII eliminirt, so wird man nur zu drei verschiedenen Differentialgleichungen gelangen, indem XXII und XXIII in eine einzige zusammen fallen. Jede dieser drei verschiedenen Differentialgleichungen wird von der ersten Ordnung sein, durch deren Integration drei willkürliche Constanten eingehen, so dass man, ausser A, B, C noch drei weitere, also im Ganzen sechs willkürliche Constanten hat, von denen jedoch einer zuviel ist, welcher aber durch Gleichung XX seine Bestimmung findet.

Das Verfahren, um besagte drei Differentialgleichungen weiter zu behandeln, ist ganz das nemliche, wie in Aufgabe 198.

Hätte man gleich anfangs die Bedingung gestellt, dass die gesuchte Bahn sich in einer gegebenen Curve oder in einer gegebenen Fläche endigen solle; so wäre man zu einer Gränzengleichung und überhaupt zu Resultaten gelangt, welche denen der 199sten Aufgabe analog sind.

Hätte man aber die Bedingung gestellt, dass die gesuchte Bahn zwischen zwei gegebenen Curven (oder Flächen) zu nehmen sey, so wäre man, je nach den gemachten Voraussetzungen, entweder zu Resultaten gekommen, die denen der 196sten Aufgabe, oder zu Resultaten, die denen der 197sten Aufgabe analog sind.

Aufgabe 202.

Zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen sucht man unter allen jenen räumlichen Curven, welche auf der durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

gegebenen Kugelfläche liegen, diejenige heraus, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der höher liegenden Ebene bis zur tiefer liegenden herabfällt, unter der Voraussetzung, dass dabei weder Reibung noch ein widerstehendes Mittel stattfinde.

Der herabfallende Punkt unterliegt hier blos dem Gesetze der Schwere. Wenn alle positiven y von oben nach unten gerichtet sind, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen; so hat man (nach der 200sten Aufgabe) für die in jedem Punkte der gesuchten Curve herrschende Geschwindigkeit folgende Differentialgleichung

$$\text{II)} \quad v \cdot dv = g \cdot dy$$

Wenn nun die höher liegende Ebene durch $y = b$ und die tiefer liegende durch $y = \beta$ gegeben ist, so ist unsere Aufgabe jetzt folgende: Man sucht für x, z und v solche zusammengehörige Functionen von y, dass dadurch den Gleichungen I und II identisch genügt, und zugleich der Ausdruck

$$\text{III)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{v} \cdot dy$$

ein Minimum-stand wird.

Digitized by Google

Man integrire Gleichung II, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad v^2 = 2gy + 2k$$

oder

$$\text{V)}\quad v = \sqrt{2gy + 2k}$$

d. h. v ist eine ganz bestimmte Function von y, wo 2k der durch die Integration eingegangene Constante ist, und der Ausdruck III geht jetzt über in

$$\text{VI)}\quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{2gy + 2k}} \cdot dy$$

Die Aufgabe ist also nur noch folgende: Man sucht für x und z solche zusammengehörige Functionen von y, dass dabei der Gleichung I identisch genügt, und der Ausdruck VI ein Minimum-stand wird.

Erste Auflösung.

Aus I folgt $z = \mathfrak{W}\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$; und daraus folgt weiter $\mathfrak{w} = \frac{-xw - y}{\mathfrak{W}\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$. Man eliminire $\mathfrak{w}$ aus VI, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad t = \int_b^\beta W \cdot dy$$

wo W eine Function von x, y, w und dem Constanten k ist. Man mutire Gleichung VII, und forme um; so gibt sich

$$\text{VIII)}\quad \delta t = \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b + \int_b^\beta \left(\frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy$$

Man hat also jetzt die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad \frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{X)}\quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

Die Gleichung IX ist von der zweiten Ordnung. Durch deren Integration gehen also zwei Constanten ein. Durch Integration der Gleichung II ist bereits der Constante k eingegangen. Man hat daher im Ganzen drei willkürliche Constanten.

Die Gränzengleichung X kann zur Bestimmung zweier derselben benützt, der dritte aber muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkt einen bestimmten Werth beilegt.

Zweite Auflösung.

Wegen Gleichung I muss entweder x oder z als mittelbar mutabel behandelt werden. Man behandle, wie in der ersten Auflösung, das z als mittelbar mutabel, und gebrauche zu dessen Elimination die Multiplicatorenmethode. Um dann die ausserhalb des Integralzeichens erscheinenden Mutationen des z am bequemsten eliminiren zu können; muss man (nach Bd. I. S. 319 und 327) die Gleichung I zuerst nach allem y differentiiren. Dadurch bekommt man die totale Differentialgleichung

$$\text{XI)}\quad x \cdot w + y + z \cdot \mathfrak{w} = 0$$

wo w und $\mathfrak{w}$ bezüglich statt $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dz}{dy}$ gesetzt sind. Diese Gleichung ist eine nach y identische; und wenn man sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von y multiplicirt, so ist auch das Product $M \cdot (xw + y + z\mathfrak{w})$ noch eine nach y identische Gleichung. Man kann es also unter dem Integralzeichen addiren, ohne dass t sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

Digitized by Google

$$\text{XII)}\quad t = \int_a^\beta \left[\frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{\sqrt{2gy + 2k}} + M\cdot(xw + y + z\mathfrak{w})\right]\cdot dy$$

Man mutire, setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$, und forme um; so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \delta t = -\int_b^\beta \left[\left(x\,\frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{u\sqrt{2gy + 2k}}\right)\right)\cdot \delta x + \left(z\,\frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy + 2k}}\right)\right)\cdot \delta z\right]\cdot dy$$

$$+ \left(\frac{w}{u\sqrt{2gy + 2k}} + Mx\right)_\beta\cdot \delta x_\beta + \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy + 2k}} + Mz\right)_\beta\cdot \delta z_\beta$$

$$- \left(\frac{w}{u\sqrt{2gy + 2k}} + Mx\right)_b\cdot \delta x_b - \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy + 2k}} + Mz\right)_b\cdot \delta z_b$$

Damit das mittelbare δz unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man die nach y identische Gleichung

$$\text{XIV)}\quad z\cdot\frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right) = 0$$

gelten. Damit auch das ausserhalb des Integralzeichens stehende δz wegfalle, bestimme man zwei der eingehenden Constanten so, dass noch folgende Gleichungen

$$\text{XV)}\quad \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy + 2k}} + Mz\right)_\beta = 0,\quad \text{und}\quad \text{XVI)}\quad \left(\frac{\mathfrak{w}}{u\sqrt{2gy + 2k}}\right)_b = 0$$

stattfinden. Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{XVII)}\quad x\cdot\frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{u\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XVIII)}\quad \left(\frac{w}{u\cdot\sqrt{2gy + 2k}} + Mx\right)_\beta\cdot \delta x_\beta - \left(\frac{w}{u\sqrt{2gy + 2k}}\right)_b\cdot \delta x_b = 0$$

Aus XV und XVI folgt

$$\text{XIX)}\quad M_\beta = -\left(\frac{\mathfrak{w}}{uz\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right)_\beta,\quad \text{und}\quad \text{XX)}\quad M_b = -\left(\frac{\mathfrak{w}}{uz\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right)_b$$

und somit geht Gleichung XVIII über in

$$\text{XXI)}\quad \left(\frac{wz - \mathfrak{w}x}{uz\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right)_\beta\cdot \delta x_\beta - \left(\frac{wz - \mathfrak{w}x}{uz\cdot\sqrt{2gy + 2k}}\right)_b\cdot \delta x_b = 0$$

Die Gleichung II ist von der ersten Ordnung, und durch deren Integration ist bereits ein willkürlicher Constanter k eingegangen. Die Gleichungen XIV und XVII sind von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen noch vier weitere Constanten ein. Man hat also im Ganzen fünf solcher Constanter, von welchen jedoch zwei zuviel sind; denn es wären nur drei eingegangen, wenn man schon vor dem Mutiren das z und $\frac{dz}{dy}$ direct eliminirt hätte. Diese zwei Constanten, welche zuviel sind, sind aber bereits durch die Gleichungen XV und XVI bestimmt; und so sind nur noch drei zu bestimmen. Zwei davon werden bestimmt, indem man die Gränzengleichung XXI benützt; der letzte muss auf andere Weise bestimmt werden; z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Eliminirt man $\frac{dM}{dy}$ aus XIV und XVII; so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad z\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{w}{u\cdot\sqrt{gy + k}}\right) - x\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy + k}}\right) = 0$$

Digitized by Google

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ weggelassen hat. Letztere Gleichung ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$\left(\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{z\cdot w}{u\cdot\sqrt{gy+k}}\right)-\frac{w\cdot \mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy+k}}\right)-\left(\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{x\cdot \mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy+k}}\right)-\frac{w\cdot \mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy+k}}\right)=0$$

Diese Gleichung reducirt sich gradezu auf

$$\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{zw-x\mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy+k}}\right)=0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XXIII)}\quad \frac{zw-x\mathfrak{w}}{u\cdot\sqrt{gy+k}}=A$$

oder

$$\text{XXIV)}\quad zw-x\mathfrak{w}=A\cdot(\sqrt{gy+k})\cdot\sqrt{1+w^2+\mathfrak{w}^2}$$

Wenn man diese Gleichung quadrirt, so gibt sich

$$\text{XXV)}\quad z^2\cdot w^2-2xz\cdot w\cdot\mathfrak{w}+x^2\cdot\mathfrak{w}^2=A^2\cdot(gy+k)\cdot(1+w^2+\mathfrak{w}^2)$$

Aus Gleichung XI folgt $xw+z\mathfrak{w}=-y$; und wenn man diese Gleichung quadrirt, so gibt sich

$$\text{XXVI)}\quad x^2\cdot w^2+2xz\cdot w\cdot\mathfrak{w}+z^2\cdot\mathfrak{w}^2=y^2$$

Man addire XXV und XXVI, so bekommt man

$$(x^2+z^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2)=y^2+A^2\cdot(gy+k)\cdot(1+w^2+\mathfrak{w}^2)$$

Aus Gleichung I folgt aber $x^2+z^2=r^2-y^2$; und so geht letztere Gleichung über in

$$(r^2-y^2)\cdot(w^2+\mathfrak{w}^2)=y^2+A^2\cdot(gy+k)\cdot(1+w^2+\mathfrak{w}^2)$$

Man addire beiderseits r^2-y^2, so bekommt man

$$(r^2-y^2)\cdot(1+w^2+\mathfrak{w}^2)=r^2+A^2\cdot(gy+k)\cdot(1+w^2+\mathfrak{w}^2)$$

oder

$$\text{XXVII)}\quad 1+w^2+\mathfrak{w}^2=\frac{r^2}{r^2-y^2-A^2\cdot(gy+k)}$$

Gleichung XXIV geht also jetzt über in

$$\text{XXVIII)}\quad zw-x\mathfrak{w}=\frac{Ar\cdot\sqrt{gy+k}}{\sqrt{r^2-y^2-A^2\cdot(gy+k)}}$$

Weil aber $x^2+z^2=r^2-y^2$, so kann man Gleichung XXVIII links mit x^2+z^2 und rechts mit r^2-y^2 dividiren; und wenn man sodann noch überall mit dy multiplicirt, so bekommt man

$$\frac{z\cdot dx-x\cdot dz}{x^2+z^2}=\frac{Ar\cdot\sqrt{gy+k}}{(r^2-y^2)\sqrt{r^2-y^2-A^2\cdot(gy+k)}}\cdot dy$$

Diese Gleichung lässt sich aber noch folgende Form geben

$$\frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2}=\frac{A\cdot r\cdot\sqrt{gy+k}}{(r^2-y^2)\cdot\sqrt{r^2-y^2-A^2\cdot(gy+k)}}\cdot dy$$

So gestaltet lässt sich letztere Gleichung gradezu integriren; und man bekommt

$$\text{XXIX)}\quad \text{arc tg}\,\frac{x}{z}=B+\int\frac{Ar\cdot\sqrt{gy+k}}{(r^2-y^2)\cdot\sqrt{r^2-y^2-A^2\cdot(gy+k)}}\cdot dy$$

Diese Gleichung, verbunden mit I, bestimmen die Projectionen der gesuchten Curve.

Die zweite Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function M von y kennen zu lernen. Man sehe den Schluss des §. 254.

Die hier gefundene Curve hat die Eigenschaft, dass sie sehr leicht rectificirbar ist. Multiplicirt man nemlich Gleichung XXVII beiderseits mit dy^2, und nimmt dann die Quadratwurzel; so bekommt man

Digitized by Google

$$(\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy = \frac{r \cdot dy}{\sqrt{r^2 - y^2 - A^2 \cdot (gy + k)}}$$

Man setze ds statt $(\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy$, und integrire dann; so gibt sich

$$\text{XXX)} \quad s = C + r \cdot \text{arc tg} \frac{2y + A^2 \cdot g}{\sqrt{r^2 - y^2 - A^2 \cdot (gy + k)}}$$

Andere Untersuchungen über die Eigenschaften der hiesigen Curve führen zu weit ab.

Gränzfall. In Folge der Gleichung XXIII geht XXI über in

$$\text{XXXI)} \quad A \cdot \left(\frac{1}{z_\beta} \cdot \delta x_\beta - \frac{1}{z_b} \cdot \delta x_b\right) = 0$$

Ist nun für die (in der gegebenen Fläche liegende) gesuchte Curve weder hinsichtlich des Anfangspunktes noch hinsichtlich des Endpunktes eine weitere Vorschrift gemacht; so sind δx_b und δx_β ganz willkürlich. Die Gränzengleichung XXXI fällt also nur weg, wenn $A = 0$ ist. Dabei geht Gleichung XXIII über in $\frac{z \cdot w - x \cdot \mathfrak{w}}{u \cdot \sqrt{g \cdot y + k}} = 0$, woraus

$$\text{XXXII)} \quad zw - x\mathfrak{w} = 0$$

folgt. Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{XXXIII)} \quad z = H \cdot x$$

Dieses ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht und auf der Coordinatenebene XZ senkrecht steht, d. h. die gefundene Ebene hat eine rein verticale Richtung, und geht durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel; so dass die gesuchte Curve ein vertical stehender Bogen eines grössten Kreises ist.

Gleichung I geht an den Gränzen über in

$$\text{XXXIV)} \quad a^2 + b^2 + c^2 = r^2, \quad \text{und} \quad \text{XXXV)} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$$

Gleichung XXXIII geht an den Gränzen über in

$$\text{XXXVI)} \quad c = H \cdot a, \quad \text{und} \quad \text{XXXVII)} \quad \gamma = H \cdot \alpha$$

Nun sind b und β gegeben. Man hat also zur Bestimmung der fünf Stücke a, α, c, γ, H nur vier Gleichungen (XXXIV—XXXVII), so dass eines dieser Stücke unbestimmt bleibt, wenn nicht noch eine weitere Bedingung hinzukommt.

Ausserdem ist auch noch k zu bestimmen, was z. B. dadurch geschehen kann, dass man festsetzt

1) bei $y = b$ soll $v = 0$ sein, oder
2) bei $y = h$ soll $v = e$ sein,

und so fort.

Aufgabe 203.

Zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen sucht man unter allen jenen räumlichen Curven, welche auf der durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad F(x, y, z) = 0$$

gegebenen Fläche liegen, diejenige heraus, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von der höher liegenden Ebene bis zur tiefer liegenden herabfällt, während die Bewegung in einem nach Verhältniss des Quadrats der Geschwindigkeit widerstehenden Mittel stattfindet, dagegen keine Reibung vorhanden ist.

Wenn alle positiven y von oben nach unten gerichtet sind, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen; so hat man (nach der 201sten Aufgabe) für die in jedem Punkte der gesuchten Curve herrschende Geschwindigkeit folgende Differentialgleichung

$$\text{II)} \quad v \cdot dv = g \cdot dy - m \cdot v^2 \cdot (\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy$$

Digitized by Google

Wenn nun die höher liegende Ebene durch $y = b$ und die tiefer liegende durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist unsere Aufgabe folgende: Man sucht für x, z und v solche Functionen von y, dass dadurch den Gleichungen I und II identisch genügt, und zugleich der Ausdruck

$$\text{III)} \quad t = \int_b^\beta \frac{\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}}{v} \cdot dy$$

ein Minimum-stand wird.

Erste Auflösung.

Man integrire II, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \chi(x, y, z, v, k) = 0$$

wo k der durch die Integration eingegangene Constante ist. Man sondere z aus I ab, so bekommt man

$$\text{V)} \quad z = F'(x, y)$$

Diesen Ausdruck substituire man in IV, und sondere v ab, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad v = \pi(x, y, k)$$

Man eliminire jetzt v und $\mathfrak{w}$ aus III; so bekommt man

$$\text{VII)} \quad t = \int_b^\beta W \cdot dy$$

wo W eine Function von y, x, w und dem Constanten k ist. Man mutire Gleichung VII, und forme um; so gibt sich

$$\text{VIII)} \quad \delta t = \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b + \int_b^\beta \left(\frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy$$

Man hat somit die Hauptgleichung

$$\text{IX)} \quad \frac{d_x W}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{d_w W}{dw}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{X)} \quad \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{d_w W}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

Die Hauptgleichung ist von der zweiten Ordnung. Durch deren Integration gehen also zwei willkürliche Constanten ein. Durch Integration der Gleichung II ist bereits ein willkürlicher Constanter eingegangen. Man hat daher im Ganzen drei willkürliche Constanten. (Ebensoviele hat man auch in der vorigen Aufgabe bekommen.)

Die Gränzengleichung X kann man zur Bestimmung von zwei Constanten benützen; der dritte muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Zweite Auflösung.

Durch Gleichung II ist ausgesprochen, wie die Geschwindigkeit v von den Coordinaten der Curve abhangt; v ist also ein mittelbar mutables Element.

Die Anfangspunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven liegen, wie die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Ebene. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist der schnellste Niedergang rein von der Gestalt der Curve abhängig. Es finden also auch jetzt die Gleichungen

$$\delta v_b = 0, \quad \delta^2 v_b = 0, \quad \delta^3 v_b = 0, \text{ etc.}$$

statt; und durch diese ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe mit ausgesprochen. (Der Beweis findet sich in der 198sten Aufgabe).

Man setze Π statt v^2, so geht Gleichung II über in

Digitized by Google

$$\text{XI)} \quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} = 0$$

Es finden also auch jetzt die Gleichungen

$$\delta\Pi_b = 0, \quad \delta^2\Pi_b = 0, \quad \delta^3\Pi_b = 0, \text{ etc.}$$

statt. (Der Beweis wird geführt, wie in der zweiten Auflösung der 198sten Aufgabe.)

Wegen Gleichung I muss entweder x oder z als mittelbar mutabel behandelt werden. Man behandle, wie in der ersten Auflösung, das z als mittelbar mutabel. Um nun die ausserhalb des Integralzeichens erscheinenden Mutationen des z am bequemsten eliminiren zu können; muss man (nach Bd. I. S. 319 und 327) die Gleichung I zuerst nach allem y differentiiren. Dadurch bekommt man die totale Differentialgleichung

$$\text{XII)} \quad \frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx} \cdot w + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{w} = 0$$

Die Gleichungen XI und XII sind nach y identisch; und wenn man sie bezüglich mit den (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Functionen L und M multiplicirt, so sind auch die Producte

$$L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot u\right) \text{ und } M \cdot \left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx} \cdot w + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{w}\right)$$

noch identische Gleichungen. Man kann sie also unter das Integralzeichen addiren, ohne dass t sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$t = \int_b^\beta \left[\frac{u}{\sqrt{\Pi}} + L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g - 2m\Pi \cdot u\right) + M \cdot \left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx} \cdot w + \frac{d_zF}{dz} \cdot \mathfrak{w}\right)\right] \cdot dy$$

wo man, wie gewöhnlich, u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$ gesetzt hat. Man mutire, und forme um, so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad \delta t =$$

$$\left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)_b \cdot \delta x_b$$

$$+ \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_zF}{dz}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta - \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_zF}{dz}\right)_b \cdot \delta z_b$$

$$+ L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta - L_b \cdot \delta\Pi_b + \int_b^\beta \left[\left(-\frac{dM}{dy} \cdot \frac{d_xF}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)\right) \cdot \delta x\right.$$

$$\left.+ \left(-\frac{dM}{dy} \cdot \frac{d_zF}{dz} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right)\right) \cdot \delta z + \left(2Lmu - \frac{dL}{dy} - \frac{u}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}}\right) \cdot \delta\Pi\right] \cdot dy$$

Man hat also hier die drei nach y identischen Gleichungen

$$\text{XIV)} \quad \frac{dM}{dy} \cdot \frac{d_xF}{dx} + \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right) = 0$$

$$\text{XV)} \quad \frac{dM}{dy} \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}\right) = 0$$

$$\text{XVI)} \quad 2Lmu - \frac{dL}{dy} - \frac{u}{2 \cdot \sqrt{\Pi^3}} = 0$$

Die zwei ersten dieser Gleichungen sind von der zweiten Ordnung. Die dritte aber ist nur von der ersten Ordnung. Ausserdem hat man noch Gleichung XI, welche auch von der ersten Ordnung ist. Durch Integration dieser vier Gleichungen gehen also sechs willkürliche Constanten ein, von welchen jedoch drei zuviel sind; denn es wären nur drei eingegangen, wenn man Π und z schon vor dem Mutiren direct eliminirt hätte.

Nun ist $\delta\Pi_b = 0$, weil dieses eine Grundbedingung unserer Aufgabe ist.

Digitized by Google

Damit jede Spur der von Π herrührenden Mutation wegfalle, bestimme man einen der eingegangenen sechs Constanten so, dass die Gleichung

$$\text{XVII)}\quad L_{\beta} = 0$$

stattfindet. Damit ferner auch jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man ausserdem noch zwei dieser Constanten so, dass auch die Gleichungen

$$\text{XXVIII)}\quad \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_zF}{dz}\right)_{\beta} = 0$$

und

$$\text{XIX)}\quad \left(\frac{\mathfrak{w} + 2Lm\mathfrak{w} \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_zF}{dz}\right)_{b} = 0$$

stattfinden. Sonach bleibt für die Gränzengleichung nur

$$\text{XX)}\quad \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)_{\beta} \cdot \delta x_{\beta} - \left(\frac{w + 2Lmw \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}} + M \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)_{b} \cdot \delta x_{b} = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man jetzt M_{β} und M_b eliminiren, was mittelst XVIII und XIX geschieht.

Die fünf Gleichungen I, XI, XIV, XV, XVI reichen hin, zu bestimmen, was x, z, Π, L, M für Functionen von y sind.

Nun ist man soweit gekommen, dass man, um die Aufgabe ausführen zu können, für die noch unbestimmte Gleichung I eine bestimmte nehmen muss.

Soll z. B. unsere Linie des schnellsten Niederganges in der durch die Gleichung

$$\text{XXI)}\quad \mathfrak{A} \cdot x + \mathfrak{B} \cdot y + \mathfrak{C} \cdot z - \mathfrak{E} = 0$$

gegebenen schiefen Ebene liegen; so ist jetzt $\frac{d_xF}{dx} = \mathfrak{A}$ und $\frac{d_zF}{dz} = \mathfrak{C}$; und wenn man zur Abkürzung noch $\mathfrak{F}(y)$ anstatt $\frac{1 + 2Lm \cdot \sqrt{\Pi^3}}{u \cdot \sqrt{\Pi}}$ setzt, so gehen die Gleichungen XIV und XV über in

$$\text{XXII)}\quad \mathfrak{A} \cdot \frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy} \cdot d(w \cdot \mathfrak{F}(y)) = 0$$

$$\text{XXIII)}\quad \mathfrak{C} \cdot \frac{dM}{dy} + \frac{1}{dy} \cdot d(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{F}(y)) = 0$$

Ausser diesen beiden Gleichungen hat man noch Gleichung XXI und die daraus sich ergebende totale Differentialgleichung

$$\text{XXIV)}\quad \mathfrak{A} \cdot w + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{w} = 0$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \cdot w$$

Eliminirt man $\mathfrak{w}$ aus XXIII, so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \mathfrak{C}^2 \cdot \frac{dM}{dy} - \mathfrak{B} \cdot \frac{1}{dy} \cdot d\mathfrak{F}(y) - \mathfrak{A} \cdot \frac{1}{dy} \cdot d(w \cdot \mathfrak{F}(y)) = 0$$

Wenn man $\frac{1}{dy} \cdot d(w \cdot \mathfrak{F}(y))$ aus XXII und XXV eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad \frac{dM}{dy} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} \cdot \frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy}$$

Die Gleichungen XXII und XXIII gehen also über in

$$\text{XXVII)}\quad \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} \cdot \frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy} + \frac{d(w \cdot \mathfrak{F}(y))}{dy} = 0$$

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} \cdot \frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy} + \frac{d(\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{F}(y))}{dy} = 0$$

Integrirt man beide Gleichungen, so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{XXIX)}\quad \frac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2)\cdot w}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot\mathfrak{F}(y) = G$$

$$\text{XXX)}\quad \frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2)\cdot\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot\mathfrak{F}(y) = H$$

Man dividire diese beiden Gleichungen ineinander, und setze A statt $\frac{G}{H}$, so bekommt man

$$\frac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2)\cdot w}{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2)\cdot\mathfrak{w}} = A$$

Daraus folgt

$$w - A\cdot\mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} = 0$$

Integrirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$\text{XXXI)}\quad x - Az + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot y = B.$$

Dieses ist wieder die Gleichung einer Ebene mit zwei willkürlichen Constanten A und B.

Aus den Gleichungen XXI und XXXI folgt, dass unsere Brachystochrone diesmal eine grade Linie ist.

Aus den Gleichungen XXIV und XXXI folgt $w = -\frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}$ und $\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}$; und so geht Gleichung XI über in

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}}{g\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} - m\Pi\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}\cdot d\Pi = 2\cdot dy$$

Integrirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$\text{XXXII)}\quad \lg\text{nat}\,\frac{k}{g\cdot\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2} - m\Pi\cdot\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}} = \frac{2m\cdot\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}}\cdot y$$

Durch diese Gleichung, wo k der durch die Integration eingegangene Constante ist, ist dargestellt, wie Π von der Fallhöhe abhangt.

Man beachte, dass dieser specielle Fall durchgeführt werden konnte, ohne dass es nöthig war, die Functionen L und M kennen zu lernen. (Man vergleiche den Schluss des §. 254.)

Gränzfall. Sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Linien den Anfangspunkt (a, b, c) und den Endpunkt (α, β, γ) gemeinschaftlich haben, und sind die Werthe der unmittelbar mutablen Elemente x_b und x_β bestimmt vorgeschrieben; so ist $\delta x_b = 0$, $\delta x_\beta = 0$, $\delta^2 x_b = 0$, $\delta^2 x_\beta = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also von selbst weg.

(Wenn man Gleichung XXI mutirt, so erkennt man, dass bei jedem Werthe des y, bei welchem man δx und $\delta^2 x$ verschwinden lässt, auch nothwendig δz und $\delta^2 z$ zu Null werden.)

Gleichung XXI geht an den Gränzen über in

1) $\mathfrak{A}\cdot a + \mathfrak{B}\cdot b + \mathfrak{C}\cdot c - \mathfrak{G} = 0$, und 2) $\mathfrak{A}\cdot\alpha + \mathfrak{B}\cdot\beta + \mathfrak{C}\cdot\gamma - \mathfrak{G} = 0$

Gleichung XXXI geht an den Gränzen über in

$$3)\quad a - A\cdot c + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot b = B$$

und

$$4)\quad \alpha - A\cdot\gamma + \frac{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} - A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot\beta = B$$

Nun sind b und β sowie $a = x_b$ und $\alpha = x_\beta$ gegeben. Die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 reichen also hin, die vier Stücke A, B, c, γ zu bestimmen. Zugleich erkennt man, dass, weil schon a und α vorgeschrieben sind, nicht auch noch die Werthe von $c = z_b$ und $\gamma = z_\beta$ beliebig vorgeschrieben werden können, sondern so hingenommen werden müssen, wie sie sich ergeben.

Digitized by Google

Es ist noch der Constante k zu bestimmen. Setzt man zu diesem Ende fest, dass die Bewegung im Anfangspunkte (a, b, c) erst beginnen solle, d. h. dass die im Anfangspunkte herrschende Geschwindigkeit Null sei; so ist $\Pi = 0$, wenn $y = b$. Gleichung XXXII geht dabei über in

$$\lg \text{nat} \frac{k}{g \cdot \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}} = \frac{2m \cdot \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}} \cdot b$$

woraus sich k ohneweiters bestimmen lässt, wenn man die logarithmische Gleichung in eine exponentielle verwandelt.

Aufgabe 204.

Es sei die Gleichung

$$\text{I)} \quad u + c \cdot \frac{du}{dx} - p \cdot y - 2c \cdot p^2 = 0$$

gegeben; und man sucht für y eine solche Function von x, dass, während u_a den bestimmt vorgeschriebenen Werth A hat, u_α ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die Gleichung I ist eine identische, d. h. gilt bei jedem Werthe des x. Multiplicirt man dieselbe mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x, so ist auch das Product

$$\mathfrak{N} \cdot \left(u + c \cdot \frac{du}{dx} - p \cdot y - 2c \cdot p^2\right)$$

noch eine identische Gleichung. Desshalb ist auch noch

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{N} \cdot \left(u + c \cdot \frac{du}{dx} - p \cdot y - 2c \cdot p^2\right) \cdot dx = 0$$

Man mutire, so bekommt man zunächst

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \left[\mathfrak{N} \cdot \delta u + c \cdot \mathfrak{N} \cdot \frac{d\delta u}{dx} - \mathfrak{N}p \cdot \delta y - (\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot dx = 0$$

Man forme um, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad (c\mathfrak{N})_\alpha \cdot \delta u_\alpha - (c\mathfrak{N})_a \cdot \delta u_a - (\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + (\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\mathfrak{N} - \frac{1}{dx} \cdot d(c\mathfrak{N})\right) \cdot \delta u - \left(\mathfrak{N}p - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dx = 0$$

Weil aber das mittelbare δu nicht unter dem Integralzeichen vorkommen darf, so denke man sich unter $\mathfrak{N}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{V)} \quad \mathfrak{N} - \frac{1}{dx} \cdot d(c \cdot \mathfrak{N}) = 0$$

stattfindet. Da ferner der Werth von u_a ein bestimmt vorgeschriebener ist, so ist $\delta u_a = 0$, $\delta^2 u_a = 0$, etc.; und Gleichung IV reducirt sich auf

$$(c \cdot \mathfrak{N})_\alpha \cdot \delta u_\alpha - (\mathfrak{N} \cdot y + 4\mathfrak{N} \cdot cp)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + (\mathfrak{N} \cdot y + 4\mathfrak{N}cp)_a \cdot \delta y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[-\left(\mathfrak{N}p - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N} \cdot cp)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dx = 0$$

Daraus folgt

$$\text{VI)} \quad \delta u_\alpha = \frac{1}{(c \cdot \mathfrak{N})_\alpha} \cdot \left[(\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N}cp)_a \cdot \delta y_a\right.$$
$$\left. + \int_a^\alpha \left(\mathfrak{N}p - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{N}y + 4\mathfrak{N} \cdot cp)\right) \cdot \delta y \cdot dx\right]$$

Digitized by Google

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VII)}\quad \mathfrak{R} \cdot p - \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R} \cdot cp) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VIII)}\quad (\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R}cp)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R}cp)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Wenn man die in V angedeutete Differentiation ausführt, so bekommt man $\frac{d\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}} = \frac{dx}{c}$; und daraus folgt

$$\text{IX)}\quad \mathfrak{R} = B \cdot e^{\frac{x}{c}}$$

Wenn man die in VII angedeutete Differentiation ausführt, so bleibt nur

$$y \cdot \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + 4c \cdot p \cdot \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + 4c\mathfrak{R} \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

Und wenn man $\mathfrak{R}$ aus dieser Gleichung eliminirt, so gibt sich

$$\left(\frac{y}{c} + 4p + 4c \cdot \frac{dp}{dx}\right) \cdot B \cdot e^{\frac{x}{c}} = 0$$

oder

$$\text{X)}\quad y + 4c \cdot p + 4c^2 \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

Diese lineäre Differentialgleichung der zweiten Ordnung reducirt sich auf die erste Ordnung, wenn man $y = e^{\int w \cdot dx}$ setzt; denn daraus folgt

$$p = w \cdot e^{\int w \cdot dx}, \quad \text{und } \frac{dp}{dx} = \left(w^2 + \frac{dw}{dx}\right) \cdot e^{\int w \cdot dx}$$

Führt man diese Ausdrücke in X ein, und lässt man dann den gemeinschaftlichen Factor $e^{\int w \cdot dx}$ weg; so bekommt man

$$1 + 4c \cdot w + 4 \cdot c^2 \cdot w^2 + 4c^2 \cdot \frac{dw}{dx} = 0$$

oder

$$-\frac{dw}{(1 + 2cw)^2} = \frac{dx}{4 \cdot c^2}$$

Daraus folgt zunächst durch Integration

$$\frac{1}{2c \cdot (1 + 2cw)} = E + \frac{x}{4c^2}$$

und daraus folgt weiter

$$w = \frac{1}{x + 4 \cdot c^2 \cdot E} - \frac{1}{2c}$$

Somit ist

$$y = e^{\int w \cdot dx} = e^{-\frac{x}{2c}} \cdot e^{\lg nat \frac{x + 4c^2 \cdot E}{m}}$$

oder auch

$$\text{XI)}\quad y = \frac{x + 4c^2 \cdot E}{m} \cdot e^{-\frac{x}{2c}}$$

wo E und m die beiden durch die Integration eingegangenen Constanten sind. Eliminirt man jetzt y und p aus Gleichung I, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad u + c \cdot \frac{du}{dx} - \frac{2c - (x + 4c^2 \cdot E)}{m^2} \cdot e^{-\frac{x}{c}} = 0$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $e^{\frac{x}{c}}$ multiplicirt; sie geht nemlich über in

$$(u \cdot dx + c \cdot du) \cdot e^{\frac{x}{c}} = \frac{1}{m^2} (2c - x - 4c^2 \cdot E) \cdot dx$$

Digitized by Google

Daraus folgt durch Integration zunächst

$$c \cdot u \cdot e^{\frac{x}{c}} = \frac{1}{m^2} \cdot \left(2cx - 4c^2 \cdot E \cdot x - \frac{x^2}{2}\right) + F$$

und wenn man $\frac{H}{m^2}$ statt F setzt, so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad u = \frac{1}{c \cdot m^2} \cdot \left(2cx - 4c^2 \cdot Ex - \frac{x^2}{2} + H\right) \cdot e^{-\frac{x}{c}}$$

Weil bei $x = a$ das u den Werth A haben soll, so dient die Gleichung

$$\text{XIV)} \quad \frac{1}{c \cdot m^2} \cdot \left(2c \cdot a - 4c^2 \cdot E \cdot a - \frac{a^2}{2} + H\right) \cdot e^{-\frac{a}{c}} = A$$

dazu, um einen der drei Constanten m, E, H durch die zwei andern auszudrücken; diese zwei werden dann durch die Gränzengleichung VIII bestimmt.

Um beurtheilen zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man Gleichung III noch einmal; und man bekommt zunächst

$$\text{XV)} \quad \int_a^\alpha \left[\mathfrak{R} \cdot \delta^2 u + c\mathfrak{R} \cdot \frac{d\delta^2 u}{dx} - \mathfrak{R}p \cdot \delta^2 y - (\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R}cp) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} \right.$$
$$\left. - 2\mathfrak{R} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} - 4\mathfrak{R}c \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Man forme um, und beachte die Gleichungen V und VII, sowie auch $\delta^2 u_a = 0$; so kekommt man

$$\text{XVI)} \quad (c\mathfrak{R}_\alpha) \cdot \delta^2 u_\alpha - (\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R}cp)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + (\mathfrak{R}y + 4\mathfrak{R}cp)_a \cdot \delta^2 y_a$$
$$- \int_a^\alpha \left[2\mathfrak{R} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 4\mathfrak{R}c \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx = 0$$

Führt man $B \cdot e^{\frac{x}{c}}$ statt $\mathfrak{R}$ ein, und sondert man $\delta^2 u_\alpha$ ab; so bekommt man nach den gehörigen Reductionen

$$\text{XVII)} \quad \delta^2 u_\alpha = \frac{1}{c} (y + 4cp)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \frac{1}{c} \cdot e^{\frac{a-\alpha}{c}} \cdot (y + 4cp)_a \cdot \delta^2 y_a$$
$$+ \int_a^x \cdot e^{\frac{x-\alpha}{c}} \cdot \left(\frac{2}{c} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Nun ist e als Basis des natürlichen Logarithmensystems eine positive Zahl. Desshalb ist auch die Potenz $e^{\frac{x-\alpha}{c}}$ positiv. Somit ist der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor positiv, und es findet ein Minimum-stand statt. Um diese Wahrheit wieder einmal zu veranschaulichen, setze man

$$\int_a^x e^{\frac{x-\alpha}{c}} \cdot \left(\frac{2}{c} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 4 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx = e^{\frac{x-\alpha}{c}} \cdot \zeta(x) \cdot \delta y_x^2 - e^{\frac{a-\alpha}{a}} \cdot \zeta(a) \cdot \delta y_a^2$$
$$+ \int_a^x 4 \cdot e^{\frac{x-\alpha}{c}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \varkappa(x) \cdot \delta y\right)^2 \cdot dx$$

wo $\zeta(x)$ und $\varkappa(x)$ zwei noch zu bestimmende Functionen von x sind. Differentiirt man beiderseits, und bringt man Alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so ergeben sich folgende zwei identische Gleichungen:

$$\text{XVIII)} \quad \frac{1}{c} \cdot \zeta(x) + \frac{d\zeta(x)}{dx} + 4 \cdot (\varkappa(x))^2 = 0$$

$$\text{XIX)} \quad \zeta(x) + 4 \cdot \varkappa(x) - \frac{1}{c} = 0$$

Digitized by Google

Eliminirt man $\varkappa(x)$, so bekommt man nach und nach

$$\text{XX)}\quad \frac{c\cdot d\zeta(x)}{(1+c\cdot\zeta(x))^2} = -\frac{dx}{4c}$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XXI)}\quad -\frac{1}{1+c\cdot\zeta(x)} = -\frac{m+x}{4c}$$

wo m der durch die Integration eingegangene Constante ist. Sondert man $\zeta(x)$ ab, so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad \zeta(x) = \frac{4c-(m+x)}{c\cdot(m+x)}$$

Sonach gibt sich auch

$$\text{XXIII)}\quad \varkappa(x) = -\frac{2c-(m+x)}{2c\cdot(m+x)}$$

Gleichung XVII geht also jetzt über in

$$\text{XXIV)}\quad \delta^2 u_\alpha = \frac{1}{c}\cdot(y+4cp)_\alpha\cdot\delta^2 y_\alpha + \frac{4c-(m+\alpha)}{c\cdot(m+\alpha)}\cdot\delta y_\alpha^2$$

$$-\frac{1}{c}\cdot e^{\frac{a-\alpha}{c}}\cdot(y+4cp)_a\cdot\delta^2 y_a - e^{\frac{a-\alpha}{c}}\cdot\frac{4c-(m+a)}{c\cdot(m+a)}\cdot\delta y_a^2$$

$$+\int_a^\alpha 4\cdot e^{\frac{x-\alpha}{c}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}-\frac{2c-(m+x)}{2c\cdot(m+x)}\cdot\delta y\right)^2\cdot dx$$

Ueber die Behandlung des Constanten m vergleiche man z. B. die Aufgaben 158 und 159.

Aufgabe 205.

Zwischen zwei, in einer verticalen Ebene liegenden, horizontalen (also parallelen) Graden sucht man diejenige ebene Curve, in welcher ein herabfallender schwerer Punkt am Ende seiner Bahn die grösste Geschwindigkeit erlangt, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt, dagegen keine Reibung vorhanden sei.

Von der Zeit ist hier keine Rede, sondern nur von der Geschwindigkeit im Endpunkte der Bahn; und diese Geschwindigkeit soll, wie die Aufgabe vorschreibt, von der Beschaffenheit der Bahn abhängig sein.

Wenn alle positiven y von oben nach unten gerichtet sind, also mit der Richtung der Schwere parallel laufen; so ist (nach Einleitung zur 198sten Aufgabe) die Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit und zwischen der Bahn gegeben durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad v\cdot dv - g\cdot dy + m\cdot v^2\cdot\left(\sqrt{1+w^2}\right)\cdot dy = 0$$

Die Anfangspunkte aller in Betracht zu ziehenden Curven liegen, wie gleichfalls die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Graden. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist die Endgeschwindigkeit rein von der Gestalt der Curve abhängig.

Wenn nun die obere horizontale Grade durch $y = b$ und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist, so ist die Anfangsgeschwindigkeit $= v_b$ und die Endgeschwindigkeit $= v_\beta$.

Da aber in den Anfangspunkten aller hier in Betracht zu ziehenden Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen soll; so muss zwischen der Geschwindigkeit, welche im Anfangspunkte der gesuchten Curve, und zwischen den Geschwindigkeiten, welche in den Anfangspunkten aller nächstanliegenden Nachbarcurven herrschen, folgende Gleichung

$$\text{II)}\quad v_b = v_b + \varkappa\cdot\delta v_b + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 v_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 v_b + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

bestehen, d. h. es muss einzeln stattfinden $\delta v_b = 0$, $\delta^2 v_b = 0$, $\delta^3 v_b = 0$, etc. Unsere Aufgabe ist also jetzt folgende: Man soll unter allen jenen ebenen Curven, bei denen die Gleichung II stattfindet, diejenige heraussuchen, bei welchen der Ausdruck v_β ein Maximum-stand wird.

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man Π statt v^2 setzt. Hier wird also durch Π das Quadrat der Geschwindigkeit bezeichnet; und Gleichung I geht über in

$$\text{III)}\quad d\Pi - 2g \cdot dy + 2m \cdot \Pi \cdot (\sqrt{1 + w^2}) \cdot dy = 0$$

Da, wie gesagt, in den Anfangspunkten aller zu betrachtenden Curven einerlei (entweder gegebenen oder nichtgegebenen) Geschwindigkeit herrschen muss, wenn die Aufgabe einen Sinn haben soll; so hat auch das Quadrat der in allen diesen Anfangspunkten herrschenden Geschwindigkeiten einerlei (entweder gegebenen oder nichtgegebenen) Werth. Es muss also zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche im Anfangspunkte der gesuchten Curve, und zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeiten, welche in den Anfangspunkten der nächstanliegenden Nachbarcurven herrschen, folgende Gleichung

$$\text{IV)}\quad \Pi_b = \Pi_b + \varkappa \cdot \delta\Pi_b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\Pi_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\Pi_b + \ldots\ldots$$

bestehen, d. h. es muss einzeln stattfinden, $\delta\Pi_b = 0$, $\delta^2\Pi_b = 0$, $\delta^3\Pi_b = 0$, etc.; und so ist unsere Aufgabe jetzt folgende: Man soll unter allen jenen Curven, bei denen Gleichung IV stattfindet, diejenige heraussuchen, bei welcher Π_β ein Maximum-stand wird.

Es ist also nöthig, dass man $\delta\Pi_\beta$ entwickelt, welches geschieht, wie folgt. Man forme Gleichung III um in

$$\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2} = 0$$

Diese Gleichung ist eine nach y identische. Man multiplicire sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y, so ist auch das Product

$$L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2}\right) = 0$$

eine nach y identische Gleichung. Somit findet auch noch für das von $y = b$ bis $y = \beta$ erstreckte Integral die Gleichung

$$\int_b^\beta L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2}\right) \cdot dy = 0$$

statt. Man mutire, so bekommt man zunächst

$$\text{V)}\quad \int_b^\beta \left(L \cdot \frac{d\delta\Pi}{dy} + 2Lm \cdot (\sqrt{1 + w^2}) \cdot \delta\Pi + \frac{2Lm \cdot \Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}} \cdot \frac{d\delta x}{dy}\right) \cdot dy = 0$$

Man forme um, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta - L_b \cdot \delta\Pi_b + \left(\frac{2Lm \cdot \Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{2Lm \cdot \Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b$$
$$+ \int_b^\beta \left[\left(\left(- \frac{dL}{dy} + 2Lm \cdot \sqrt{1 + w^2}\right) \cdot \delta\Pi - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm \cdot \Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\right) \cdot \delta x\right] \cdot dy$$

Weil aber das mittelbare $\delta\Pi$ nicht unter dem Integralzeichen stehen darf, so denke man sich unter L eine solche Function von y, dass identisch stattfindet

$$\text{VII)}\quad - \frac{dL}{dy} + 2Lm \cdot \sqrt{1 + w^2} = 0$$

Weil ferner durch die Gleichungen

$$\delta\Pi_b = 0,\quad \delta^2\Pi_b = 0,\ \text{etc.}$$

eine Grundbedingung der Aufgabe mit ausgesprochen ist, so reducirt sich VI auf

Digitized by Google

$$L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta + \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b$$

$$- \int_b^\beta \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy = 0$$

Daraus folgt

$$\text{VIII)} \quad \delta\Pi_\beta = \frac{1}{L_\beta} \cdot \left[- \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b \right.$$

$$\left. + \int_b^\beta \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\right) \cdot \delta x \cdot dy \right]$$

Somit hat man die Hauptgleichung

$$\text{IX)} \quad \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{X)} \quad \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

Führt man die in IX angedeutete Differentiation aus, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dy} = \left(- \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2m\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\right) : \frac{2m\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}$$

Aus VII ergibt sich

$$\text{XII)} \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dy} = 2m \cdot \sqrt{1 + w^2}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\text{XIII)} \quad 2m \cdot \sqrt{1 + w^2} = \left(- \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2m\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)\right) : \frac{2m\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}$$

Wenn man den rechts stehenden Divisor wegmultiplicirt, und dann den gemeinschaftlichen Factor 2m unterdrückt; so bekommt man

$$\text{XIV)} \quad 2m\Pi \cdot w = - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{\Pi \cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)$$

Führt man die hier angedeutete Differentiation aus, so kann man sich folgende Differentialgleichung der zweiten Ordnung bilden

$$\text{XV)} \quad \frac{d\Pi}{\Pi} + \frac{dw}{w} - \frac{w \cdot dw}{1 + w^2} + 2m \cdot (\sqrt{1 + w^2}) \cdot dy = 0$$

Diese Gleichung ist von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Sie muss mit Gleichung III, welche von der ersten Ordnung ist, und durch deren Integration noch ein dritter Constanter eingeht, verbunden werden. Man wird also im Ganzen drei willkürliche Constanten bekommen. Zwei davon werden durch die Gränzengleichung bestimmt, der dritte aber muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der Geschwindigkeit im Anfangspunkte einen bestimmten Werth beilegt.

Eliminirt man $d\Pi$ aus III und XV, so gibt sich

$$\text{XVI)} \quad \Pi = - 2g \cdot w \cdot (1 + w^2) \cdot \frac{dy}{dw}$$

Man hat nun diese Gleichung zu differentiiren, und dann Π und $d\Pi$ aus III zu eliminiren. Man setze aber vererst zur Abkürzung P anstatt $- 2g \cdot \frac{dy}{dw}$, so geht XVI über in

$$\text{XVII)} \quad \Pi = P \cdot w \cdot (1 + w^2)$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{XVIII)} \quad d\Pi = w \cdot (1 + w^2) \cdot dP + P \cdot (1 + 3 \cdot w^2) \cdot dw$$

Digitized by Google

Substituirt man diese Ausdrücke in III, so gibt sich

$$\text{XIX)}\quad w(1 + w^2)\cdot dP + (1 + 3w^2)\,P\cdot dw - 2g\cdot dy + 2mPw\cdot(1 + w^2)^{\frac{3}{2}}\cdot dy = 0$$

Da nun $P = -2g\cdot\frac{dy}{dw}$ ist, so kann man das $2g\cdot dy$ entfernen; und man bekommt

$$\text{XX)}\quad w(1 + w^2)\cdot dP + (2 + 3w^2)\,P\cdot dw + 2mPw\cdot(1 + w^2)^{\frac{3}{2}}\cdot dy = 0$$

Wenn man mit $w^3\cdot P^2\cdot(1 + w^2)^{\frac{3}{2}}$ dividirt, so gibt sich

$$\frac{dP}{P^2\cdot w^2\cdot\sqrt{1+w^2}} + \frac{(2 + 3w^2)\cdot dw}{P\cdot w^3\cdot(1 + w^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2m\cdot dy}{P\cdot w^2} = 0$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit folgender

$$d\left(\frac{-1}{P\cdot w^2\cdot\sqrt{1 + w^2}}\right) + \frac{2m\cdot dy}{P\cdot w^2} = 0$$

Man führe statt P den ursprünglichen Ausdruck zurück, und integrire; so gibt sich

$$\text{XXI)}\quad \frac{1}{2g\cdot w^2\cdot\sqrt{1 + w^2}}\cdot\frac{dw}{dy} + \frac{m}{g\cdot w} + B = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XXII)}\quad dy = -\frac{dw}{w\cdot(2m + 2Bgw)\cdot\sqrt{1 + w^2}}$$

und, wenn man beiderseits mit $\frac{dx}{dy} = w$ multiplicirt,

$$\text{XXIII)}\quad dx = -\frac{dw}{(2m + 2Bgw)\cdot\sqrt{1 + w^2}}$$

Integrirt man beide Gleichungen, so geht in jede noch ein Constanter ein; dann hat man noch w zu eliminiren. So bekommt man eine Gleichung zwischen x und y und drei willkürlichen Constanten. Ist bereits (hinter Gleichung XV) näher besprochen.

Aus XVI und XXI folgt

$$\text{XXIV)}\quad \Pi = \frac{g\cdot\sqrt{1 + w^2}}{m + Bg\cdot w}$$

Also ist

$$\text{XXV)}\quad \delta\Pi = \frac{mg\cdot w - B\cdot g^2}{(m + Bgw)^2\cdot\sqrt{1 + w^2}}\cdot\frac{d\delta x}{dy}$$

Um entscheiden zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man Gleichung V noch einmal, forme dann um, und beachte die Gleichungen VII und IX, sowie auch, dass $\delta\Pi_b = 0$, $\delta^2\Pi_b = 0$, etc. Dadurch bekommt man

$$L_\beta\cdot\delta^2\Pi_\beta + \left(\frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta\cdot\delta^2x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b\cdot\delta^2x_b$$
$$+\int_b^\beta\left[\frac{2Lmw}{\sqrt{1+w^2}}\cdot\delta\Pi\cdot\frac{d\delta x}{dy} + \frac{2Lm\Pi}{(1 + w^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)^2\right]\cdot dy = 0$$

Man setze die in XXIV und XXV für Π und $\delta\Pi$ gefundenen Ausdrücke hier ein, und sondere $\delta^2\Pi_\beta$ ab, so bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad \delta^2\Pi_\beta = -\frac{1}{L_\beta}\cdot\left[\left(\frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_\beta\cdot\delta^2x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi\cdot w}{\sqrt{1 + w^2}}\right)_b\cdot\delta^2x_b\right]$$
$$-\frac{1}{L_\beta}\cdot\int_b^\beta\frac{2gL\cdot m^2}{(m + Bgw)^2}\cdot\left(\frac{d\delta x}{dy}\right)^2\cdot dy$$

Aus Gleichung VII folgt $\frac{dL}{L} = 2m\left(\sqrt{1 + w^2}\right)\cdot dy$; und somit ist

Digitized by Google

$$\text{XXVII)} \quad L = e^{2m\int(\sqrt{1+w^2})\cdot dy}$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, also eine positive Zahl ist. Sonach ist auch L positiv bei jedem beliebigen Werthe des y. Man erkennt also, dass $\delta^2 \Pi_\beta$ unter allen Umständen negativ bleibt, d. h. dass ein Maximum-stand stattfindet.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (Methodus inveniendi, etc., S. 122—125). Zuerst lässt er die Bewegung in einem Mittel stattfinden, welches ganz allgemein nach Verhältniss der 2u[ten] Potenz der Geschwindigkeit entgegenwirkt. Hierauf specialisirt er, und lässt (S. 125) die Bewegung in einem Mittel stattfinden, welches nach Verhältniss des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt.

Diese Aufgabe findet sich auch in Lagrange's Werke: Leçons sur le Calcul des Fonctions. Er aber lässt die Bewegung in einem Mittel stattfinden, das nach Verhältniss irgend einer beliebigen Function der Geschwindigkeit entgegenwirkt. (Man sehe das sechste Beispiel in der 22[sten] Vorlesung.)

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man:

1) Ich habe genau hervorgehoben, dass die Aufgabe nur dann einen Sinn hat, wenn in den Anfangspunkten aller zu betrachtenden Curven einerlei Geschwindigkeit, sei sie nun gegeben oder nichtgegeben, herrscht; und diesen Umstand habe ich als Grundbedingung vorangestellt.

2) Ich habe in Gleichung XXVI den Ausdruck für das Prüfungsmittel aufgestellt, welcher, obgleich erst dadurch die Untersuchung vervollständigt wird, dennoch in keiner Schrift, wo diese Aufgabe aufgenommen ist, vorkommt.

Aufgabe 206.

Zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen sucht man diejenige räumliche Curve, in welcher ein herabfallender schwerer Punkt am Ende seiner Bahn die grösste Geschwindigkeit erlangt, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel stattfinde, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt, dagegen keine Reibung vorhanden sei.

Auch hier ist (wie in voriger Aufgabe) von der Zeit keine Rede, sondern nur von der Geschwindigkeit im Endpunkte der Bahn; und diese Geschwindigkeit soll, wie die Aufgabe vorschreibt, von der Beschaffenheit der Bahn abhängig sein.

Wenn alle positiven y von oben nach unten gerichtet sind, d. h. mit der Richtung der Schwere parallel laufen; so ist, nach Einleitung zur 201[sten] Aufgabe) die Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit und zwischen der Bahn gegeben durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad v \cdot dv - g \cdot dy + m \cdot v^2 \cdot (\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy = 0$$

Die Anfangspunkte aller in Betracht zu ziehenden räumlichen Curven liegen, wie gleichfalls die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Ebene. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist die Endgeschwindigkeit rein von der Gestalt der Curve abhängig.

Wenn nun die obere horizontale Ebene durch $y = b$ und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist die Anfangsgeschwindigkeit $= v_b$ und die Endgeschwindigkeit $= v_\beta$.

Ob aber in den Anfangspunkten aller hier in Betracht zu ziehenden räumlichen Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen soll; so muss folgende Gleichung

$$\text{II)} \quad v_b = v_b + \varkappa \cdot \delta v_b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot v^3 v_b + \ldots\ldots$$

bestehen, d. h. es muss einzeln sein $\delta v_b = 0$, $\delta^2 v_b = 0$, $\delta^3 v_b = 0$, etc. Unsere Aufgabe ist also folgende: Man soll unter allen jenen räumlichen Curven, bei denen die Gleichung II stattfindet, diejenige heraussuchen, bei welchen der Ausdruck v_β ein Maximum-stand wird.

Die Durchführung der Aufgabe wird vereinfacht, wenn man Π statt v^2 setzt. Hier


Digitized by Google

wird also durch Π das Quadrat der Geschwindigkeit bezeichnet; und Gleichung I geht über in

$$\text{III)}\quad d\Pi - 2g \cdot dy + 2m \cdot \Pi \cdot \left(\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right) \cdot dy = 0$$

Da, wie gesagt, in den Anfangspunkten aller zu betrachtenden Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen muss, wenn die Aufgabe einen Sinn haben soll; so hat auch das Quadrat der in allen diesen Anfangspunkten herrschenden Geschwindigkeiten einerlei (entweder gegebenen oder nichtgegebenen) Werth. Es muss also zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche im Anfangspunkte der gesuchten Curve, und zwischen dem Quadrate der Geschwindigkeiten, welche in den Anfangspunkten der nächstanliegenden Nachbarcurven herrschen, folgende Gleichung

$$\text{IV)}\quad \Pi_b = \Pi_b + \varkappa \cdot \delta\Pi_b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\Pi_b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\Pi_b + \ldots\ldots$$

bestehen, d. h. es muss einzeln stattfinden $\delta\Pi_b = 0$, $\delta^2\Pi_b = 0$, $\delta^3\Pi_b = 0$, etc. Und so ist unsere Aufgabe jetzt folgende: Man soll unter allen jenen räumlichen Curven, bei denen Gleichung IV stattfindet, diejenige heraussuchen, bei welcher Π_β ein Maximum-stand wird.

Es ist also nöthig, dass man $\delta\Pi_\beta$ entwickelt, welches geschieht, wie folgt: Man forme Gleichung III um in

$$\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} = 0$$

Diese Gleichung ist eine nach y identische. Man multiplicire sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y, so ist auch das Product

$$L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right) = 0$$

eine nach y identische Gleichung. Somit findet auch noch für das von $y = b$ bis $y = \beta$ erstreckte Integral die Gleichung

$$\int_b^\beta L \cdot \left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m \cdot \Pi \cdot \sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}\right) \cdot dy = 0$$

statt. Man mutire, und setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$; so bekommt man zunächst

$$\text{V)}\quad \int_b^\beta \left(L \cdot \frac{d\delta\Pi}{dy} + 2Lmu \cdot \delta\Pi + \frac{2Lm\Pi w}{u} \cdot \frac{d\delta x}{dy} + \frac{2Lm\Pi \cdot \mathfrak{w}}{u} \cdot \frac{d\delta z}{dy}\right) \cdot dy = 0$$

Man forme um, und sondere $\delta\Pi_\beta$ ab, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \delta\Pi_\beta = \frac{L_b}{L_\beta} \cdot \delta\Pi_b - \frac{1}{L_\beta} \cdot \left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta + \frac{1}{L_\beta} \cdot \left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right)_b \cdot \delta x_b$$

$$- \frac{1}{L_\beta} \cdot \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta + \frac{1}{L_\beta} \cdot \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)_b \cdot \delta z_b - \frac{1}{L_\beta} \cdot \int_b^\beta \left[\left(-\frac{dL}{dy} + 2Lmu\right) \cdot \delta\Pi\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right)\right) \cdot \delta x - \left(\frac{1}{dy} \cdot d\left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dy$$

Weil das mittelbare $\delta\Pi$ nicht unter dem Integralzeichen vorkommen darf, so denke man sich unter L eine solche Function von y, dass die nach y identische Gleichung

$$\text{VII)}\quad -\frac{dL}{dy} + 2Lmu = 0$$

stattfindet. Weil ferner durch die Gleichungen

$$\delta\Pi_b = 0,\quad \delta^2\Pi_b = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung der Aufgabe ausgesprochen ist; so sind auf der rechten Seite der Gleichung VI keine mittelbaren Mutationen mehr vorhanden, und man hat die beiden Hauptgleichungen

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right) = 0, \quad \text{und} \quad \text{IX)}\quad \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi \mathfrak{w}}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{X)}\quad \left(\frac{L\Pi w}{u}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(\frac{L\Pi w}{u}\right)_b \cdot \delta x_b + \left(\frac{L\Pi \mathfrak{w}}{u}\right)_\beta \cdot \delta z_\beta - \left(\frac{L\Pi \mathfrak{w}}{u}\right)_b \cdot \delta z_b = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor 2m weggelassen hat. Aus Gleichung VII folgt

$$\text{XI)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = 2mu$$

Aus Gleichung VIII folgt

$$\text{XII)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = \left(-\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w}{u}\right)\right) : \frac{\Pi w}{u}$$

und aus Gleichung IX folgt

$$\text{XIII)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = \left(-\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi \mathfrak{w}}{u}\right)\right) : \frac{\Pi \mathfrak{w}}{u}$$

Man verbinde XI und XII, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad 2m\Pi w = -\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w}{u}\right)$$

Man verbinde XI und XIII, so bekommt man

$$\text{XV)}\quad 2m\Pi \mathfrak{w} = -\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi \mathfrak{w}}{u}\right)$$

Diese beiden Gleichungen sind von der zweiten Ordnung. Sie müssen mit Gleichung III, welche von der ersten Ordnung ist, verbunden werden. Durch Integration der Gleichungen III, XIV und XV gehen also fünf willkürliche Constanten ein. Vier derselben finden ihre Bestimmung durch die Gränzengleichung X; und der fünfte muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der im Anfangspunkte herrschenden Geschwindigkeit einen bestimmten Werth beilegt. Dividirt man XIV in XV, so bekommt man

$$w\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi \mathfrak{w}}{u}\right) = \mathfrak{w}\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w}{u}\right)$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Weise darstellen

$$\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w \mathfrak{w}}{u}\right) - \frac{\Pi \mathfrak{w}}{u}\cdot\frac{dw}{dy} = \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w \mathfrak{w}}{u}\right) - \frac{\Pi w}{u}\cdot\frac{d\mathfrak{w}}{dy}$$

und diese reducirt sich ohneweiters auf folgende

$$\mathfrak{w}\cdot\frac{dw}{dy} = w\cdot\frac{d\mathfrak{w}}{dy}$$

Integrirt man einmal, so gibt sich

$$\text{XVI)}\quad \mathfrak{w} = H\cdot w$$

Integrirt man noch einmal, so gibt sich

$$\text{XVII)}\quad z = H\cdot x + K$$

Dieses ist die Gleichung einer auf die Coordinatenebene XZ senkrechten Ebene.

Die gesuchte Curve liegt also in einer verticalen Ebene, wie zu erwarten war.

Eliminirt man $\mathfrak{w}$ aus XIV; so bekommt man

$$\text{XVIII)}\quad 2m\Pi w = -\frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi\cdot w}{\sqrt{1+(1+H^2)\cdot w^2}}\right)$$

Eliminirt man ebenso $\mathfrak{w}$ aus XV, und lässt man den gemeinschaftlichen Factor H weg; so bekommt man wieder Gleichung XVIII.

Eliminirt man auch $\mathfrak{w}$ aus III; so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad d\Pi - 2g\cdot dy + 2m\Pi\cdot\left(\sqrt{1+(1+H^2)\cdot w^2}\right)\cdot dy = 0$$

Man hat bereits zwei willkürliche Constanten H und K. Durch Integration der Gleichungen XVIII und XIX gehen noch drei weitere ein, so dass man, wie bereits bemerkt, im Ganzen fünf willkürliche Constanten bekommt.

Die Gleichungen XVIII und XIX werden ebenso behandelt, wie die Gleichungen III und XIV in der vorigen Aufgabe.

Somit ist die hiesige Aufgabe ganz auf die vorige zurückgeführt.

Auch steht der Herstellung des Prüfungsmittels keine Schwierigkeit entgegen. Man hat dabei gleichfalls nach Analogie der vorigen Aufgabe zu verfahren.

Aufgabe 207.

Zwischen zwei horizontalen (also miteinander parallelen) Ebenen sucht man unter allen jenen räumlichen Curven, welche auf der durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad F(x, y, z) = 0$$

gegebenen Fläche liegen, diejenige heraus, in welcher ein herabfallender schwerer Punkt am Ende seiner Bahn die grösste Geschwindigkeit hat, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung in einem Mittel vor sich gehe, welches im Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeit entgegenwirkt, dagegen keine Reibung stattfinde.

Auch hier ist (wie in den beiden vorigen Aufgaben) von der Zeit keine Rede, sondern nur von der Geschwindigkeit im Endpunkte der Bahn; und diese Geschwindigkeit soll, wie die Aufgabe vorschreibt, von der Beschaffenheit der Bahn abhängig sein.

Wenn alle positiven y von oben nach unten gerichtet sind, also mit der Richtung der Schwere parallel laufen; so ist (nach Einleitung zur 201sten Aufgabe) die Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit und zwischen der Bahn gegeben durch die Gleichung

$$\text{II)} \quad v \cdot dv - g \cdot dy + m \cdot v^2 \cdot (\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy = 0$$

Wenn nun die obere horizontale Ebene durch $y = b$ und die untere durch $y = \beta$ gegeben ist; so ist die Anfangsgeschwindigkeit $= v_b$ und die Endgeschwindigkeit $= v_\beta$.

Die Anfangspunkte aller hier in Betracht zu ziehenden Curven liegen, wie gleichfalls die Aufgabe vorschreibt, in der oberen horizontalen Ebene. Soll aber die Aufgabe auch wirklich einen Sinn haben, so muss in den Anfangspunkten aller dieser Curven einerlei (entweder gegebene oder nichtgegebene) Geschwindigkeit herrschen; denn nur unter dieser Bedingung ist die Endgeschwindigkeit rein von der Gestalt der Curve abhängig. Es finden also auch jetzt die Gleichungen

$$\delta v_b = 0, \quad \delta^2 v_b = 0, \quad \delta^3 v_b = 0, \text{ etc.}$$

statt; und durch diese ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe mit ausgesprochen.

Setzt man Π statt v^2, so ist durch Π das Quadrat der Geschwindigkeit dargestellt, und Gleichung II geht über in

$$\text{III)} \quad d\Pi - 2g \cdot dy + 2m \cdot \Pi \cdot (\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}) \cdot dy = 0$$

Wie in voriger Aufgabe, so finden auch jetzt die Gleichungen

$$\delta \Pi_b = 0, \quad \delta^2 \Pi_b = 0, \quad \delta^3 \Pi_b = 0, \text{ etc.}$$

statt. Wegen Gleichung I muss entweder x oder z als mittelbar mutabel behandelt werden. Man behandle z als mittelbar mutabel, und stelle folgende zwei Auflösungen auf.

Erste Auflösung.

Man sondere z aus I ab, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad z = F'(x, y)$$

Man eliminire jetzt $\mathfrak{w}$ aus III, so bekommt man

$$d\Pi - 2g \cdot dy + 2m\Pi \cdot W \cdot dy = 0$$

wo W eine Function von x, y, w ist. Aus letzterer Gleichung folgt

$$\text{V)} \quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot W = 0$$

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y, so ist auch

$$\text{VI)} \quad \int_b^\beta L\left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi \cdot W\right) \cdot dy = 0$$

Man mutire, so bekommt man zunächst

$$\text{VII)} \quad \int_b^\beta L \cdot \left(\frac{d\delta\Pi}{dy} + 2LmW \cdot \delta\Pi + 2Lm\Pi \cdot \frac{d_xW}{dx} \cdot \delta x + 2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw} \cdot \frac{d\delta x}{dy}\right) \cdot dy = 0$$

Man forme um, so gibt sich

$$\text{VIII)} \quad L_\beta \cdot \delta\Pi_\beta - L_b \cdot \delta\Pi_b + \left(2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b$$
$$+ \int_b^\beta \left[\left(-\frac{dL}{dy} + 2LmW\right) \cdot \delta\Pi + \left(2Lm\Pi \frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(2Lm\Pi \frac{d_wW}{dw}\right)\right) \cdot \delta x\right] \cdot dy = 0$$

Damit das unter dem Integralzeichen befindliche $\delta\Pi$ wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von y, dass die identische Gleichung

$$\text{IX)} \quad -\frac{dL}{dy} + 2LmW = 0$$

stattfindet. Ferner ist

$$\text{X)} \quad \delta\Pi_b = 0$$

weil dieses eine Grundbedingung der Aufgabe ist. Soll aber Π_β ein Maximum-stand werden, so muss noch die Hauptgleichung

$$\text{XI)} \quad 2Lm\Pi \cdot \frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XII)} \quad \left(2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta - \left(2Lm\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

stattfinden. Aus IX folgt

$$\text{XIII)} \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dy} = 2mW$$

Gleichung XI lässt sich auch auf folgende Weise schreiben

$$2Lm\Pi \cdot \frac{d_xW}{dx} - 2Lm \cdot \frac{1}{dy} \cdot d\left(\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right) - 2m \cdot \frac{dL}{dy} \cdot \Pi \cdot \frac{d_wW}{dw} = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XIV)} \quad \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dy} = \left(\Pi \cdot \frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right)\right) : \left(\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right).$$

Eliminirt man $\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dy}$ aus XIII und XIV, so gibt sich

$$\text{XV)} \quad \Pi \cdot \frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy} \cdot d\left(\Pi \cdot \frac{d_wW}{dw}\right) = 2m\Pi \cdot W \cdot \frac{d_wW}{dw}$$

Diese Gleichung ist von der zweiten Ordnung, und durch ihre Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Sie muss mit Gleichung V, welche von der ersten Ordnung ist, und durch deren Integration noch ein dritter Constanter eingeht, verbunden werden. Man hat also im Ganzen drei willkürliche Constanten. Zwei davon werden durch die Gränzengleichung bestimmt, der dritte aber muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der im Anfangspunkte herrschenden Geschwindigkeit einen bestimmten Werth beilegt.

Erst wenn man eine bestimmte Fläche hat, auf welcher die gesuchte Bahn liegen soll, ist es möglich, die Aufgabe vollständig durchzuführen.

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Man behandle, wie in voriger Auflösung, das z als mittelbar mutabel. Um dann die ausserhalb des Integralzeichens erscheinenden Mutationen des z am bequemsten eliminiren zu können, muss man (nach Bd. I. S. 319 und 327) die Gleichung I zuerst nach allem y differentiiren. Aber eben weil in Gleichung I das x und das z als Functionen von y gedacht werden müssen, so ist Gleichung I eine nach y identische; und man bekommt die totale Differentialgleichung

$$\text{XVI)}\quad \frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w} = 0$$

Wenn man diese nach y identische Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von y multiplicirt, so ist auch das sich ergebende Product eine nach y identische Gleichung, d. h. es ist auch

$$\text{XVII)}\quad M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right) = 0$$

Man verwandle Gleichung III in folgende

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} = 0$$

so ist auch diese eine nach y identische Gleichung. Addirt man XVII zu XVIII, so ist auch

$$\text{XIX)}\quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right) = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y multiplicirt, so ist das sich ergebende Product auch noch eine nach y identische Gleichung; d. h. es ist auch noch

$$L\cdot\left[\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi u + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right)\right] = 0$$

wo man zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$ gesetzt hat. Aber eben weil diese Gleichung bei jedem Werthe des y gilt, so findet auch noch für das von $y = b$ bis $y = \beta$ erstreckte Integral folgende Gleichung

$$\text{XX)}\quad \int_b^\beta L\cdot\left[\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi u + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right)\right]\cdot dy = 0$$

statt. Man mutire, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad \int_b^\beta\left(L\cdot\frac{d\delta\Pi}{dy} + 2Lmu\cdot\delta\Pi + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{u}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + \frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dy}\right.$$

$$\left. + LM\frac{d\left(\frac{d_xF}{dx}\right)}{dy}\cdot\delta x + LM\frac{d_xF}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + LM\frac{d\left(\frac{d_zF}{dz}\right)}{dy}\cdot\delta z + LM\frac{d_zF}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dy}\right)\cdot dy = 0$$

Formt man um, so gibt sich

$$\text{XXII)}\quad L_\beta\cdot\delta\Pi_\beta - L_b\cdot\delta\Pi_b + \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\frac{d_xF}{dx}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\frac{d_xF}{dx}\right)_b\cdot\delta x_b$$

$$+ \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u} + LM\frac{d_zF}{dz}\right)_\beta\cdot\delta z_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u} + LM\frac{d_zF}{dz}\right)_b\cdot\delta z_b$$

$$+ \int_b^\beta\left[\left(-\frac{dL}{dy} + 2Lmu\right)\cdot\delta\Pi - \left(\frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_xF}{dx} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right)\right)\cdot\delta x\right.$$

$$\left. - \left(\frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_zF}{dz} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dy = 0$$

Damit die mittelbar mutablen Elemente $\delta\Pi$ und δz unter dem Integralzeichen wegfallen, denke man sich unter L und M solche Functionen von y, dass die nach y identischen Gleichungen

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nicht-mutablen Function L von y, so ist auch

$$\text{VI)}\quad \int_b^\beta L\left(\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot W\right)\cdot dy = 0$$

Man mutire, so bekommt man zunächst

$$\text{VII)}\quad \int_b^\beta L\cdot\left(\frac{d\delta\Pi}{dy} + 2LmW\cdot\delta\Pi + 2Lm\Pi\cdot\frac{d_xW}{dx}\cdot\delta x + 2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\cdot\frac{d\delta x}{dy}\right)\cdot dy = 0$$

Man forme um, so gibt sich

$$\text{VIII)}\quad L_\beta\cdot\delta\Pi_\beta - L_b\cdot\delta\Pi_b + \left(2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right)_b\cdot\delta x_b$$
$$+\int_b^\beta\left[\left(-\frac{dL}{dy} + 2LmW\right)\cdot\delta\Pi + \left(2Lm\Pi\frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy}\cdot d\left(2Lm\Pi\frac{d_wW}{dw}\right)\right)\cdot\delta x\right]\cdot dy = 0$$

Damit das unter dem Integralzeichen befindliche $\delta\Pi$ wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von y, dass die identische Gleichung

$$\text{IX)}\quad -\frac{dL}{dy} + 2LmW = 0$$

stattfindet. Ferner ist

$$\text{X)}\quad \delta\Pi_b = 0$$

weil dieses eine Grundbedingung der Aufgabe ist. Soll aber Π_β ein Maximum-stand werden, so muss noch die Hauptgleichung

$$\text{XI)}\quad 2Lm\Pi\cdot\frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy}\cdot d\left(2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XII)}\quad \left(2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(2Lm\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right)_b\cdot\delta x_b = 0$$

stattfinden. Aus IX folgt

$$\text{XIII)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = 2mW$$

Gleichung XI lässt sich auch auf folgende Weise schreiben

$$2Lm\Pi\cdot\frac{d_xW}{dx} - 2Lm\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\left(\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right) - 2m\cdot\frac{dL}{dy}\cdot\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw} = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XIV)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = \left(\Pi\cdot\frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy}\cdot d\left(\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right)\right) : \left(\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right).$$

Eliminirt man $\frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy}$ aus XIII und XIV, so gibt sich

$$\text{XV)}\quad \Pi\cdot\frac{d_xW}{dx} - \frac{1}{dy}\cdot d\left(\Pi\cdot\frac{d_wW}{dw}\right) = 2m\Pi\cdot W\cdot\frac{d_wW}{dw}$$

Diese Gleichung ist von der zweiten Ordnung, und durch ihre Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Sie muss mit Gleichung V, welche von der ersten Ordnung ist, und durch deren Integration noch ein dritter Constanter eingeht, verbunden werden. Man hat also im Ganzen drei willkürliche Constanten. Zwei davon werden durch die Gränzengleichung bestimmt, der dritte aber muss auf andere Weise bestimmt werden, z. B. dadurch, dass man der im Anfangspunkte herrschenden Geschwindigkeit einen bestimmten Werth beilegt.

Erst wenn man eine bestimmte Fläche hat, auf welcher die gesuchte Bahn liegen soll, ist es möglich, die Aufgabe vollständig durchzuführen.

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Man behandle, wie in voriger Auflösung, das z als mittelbar mutabel. Um dann die ausserhalb des Integralzeichens erscheinenden Mutationen des z am bequemsten eliminiren zu können, muss man (nach Bd. I. S. 319 und 327) die Gleichung I zuerst nach allem y differentiiren. Aber eben weil in Gleichung I das x und das z als Functionen von y gedacht werden müssen, so ist Gleichung I eine nach y identische; und man bekommt die totale Differentialgleichung

$$\text{XVI)}\quad \frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w} = 0$$

Wenn man diese nach y identische Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von y multiplicirt, so ist auch das sich ergebende Product eine nach y identische Gleichung, d. h. es ist auch

$$\text{XVII)}\quad M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right) = 0$$

Man verwandle Gleichung III in folgende

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} = 0$$

so ist auch diese eine nach y identische Gleichung. Addirt man XVII zu XVIII, so ist auch

$$\text{XIX)}\quad \frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi\cdot\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2} + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right) = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von y multiplicirt, so ist das sich ergebende Product auch noch eine nach y identische Gleichung; d. h. es ist auch noch

$$L\cdot\left[\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi u + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right)\right] = 0$$

wo man zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + w^2 + \mathfrak{w}^2}$ gesetzt hat. Aber eben weil diese Gleichung bei jedem Werthe des y gilt, so findet auch noch für das von $y = b$ bis $y = \beta$ erstreckte Integral folgende Gleichung

$$\text{XX)}\quad \int_b^\beta L\cdot\left[\frac{d\Pi}{dy} - 2g + 2m\Pi u + M\cdot\left(\frac{d_yF}{dy} + \frac{d_xF}{dx}\cdot w + \frac{d_zF}{dz}\cdot \mathfrak{w}\right)\right]\cdot dy = 0$$

statt. Man mutire, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad \int_b^\beta \Bigg(L\cdot\frac{d\delta\Pi}{dy} + 2Lmu\cdot\delta\Pi + \frac{2Lm\Pi\cdot w}{u}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + \frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\cdot\frac{d\delta z}{dy}$$

$$+ LM\,\frac{d\left(\frac{d_xF}{dx}\right)}{dy}\cdot\delta x + LM\,\frac{d_xF}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + LM\,\frac{d\left(\frac{d_zF}{dz}\right)}{dy}\cdot\delta z + LM\,\frac{d_zF}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dy}\Bigg)\cdot dy = 0$$

Formt man um, so gibt sich

$$\text{XXII)}\quad L_\beta\cdot\delta\Pi_\beta - L_b\cdot\delta\Pi_b + \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\,\frac{d_xF}{dx}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\,\frac{d_xF}{dx}\right)_b\cdot\delta x_b$$

$$+ \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u} + LM\,\frac{d_zF}{dz}\right)_\beta\cdot\delta z_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u} + LM\,\frac{d_zF}{dz}\right)_b\cdot\delta z_b$$

$$+ \int_b^\beta\Bigg[\left(-\frac{dL}{dy} + 2Lmu\right)\cdot\delta\Pi - \left(\frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_xF}{dx} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right)\right)\cdot\delta x$$

$$- \left(\frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_zF}{dz} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)\right)\cdot\delta z\Bigg]\cdot dy = 0$$

Damit die mittelbar mutablen Elemente $\delta\Pi$ und δz unter dem Integralzeichen wegfallen, denke man sich unter L und M solche Functionen von y, dass die nach y identischen Gleichungen

Digitized by Google

$$\text{XXIII)}\quad -\frac{dL}{dy} + 2Lmu = 0$$

$$\text{XXIV)}\quad \frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_zF}{dz} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Damit aber auch das ausserhalb des Integralzeichens befindliche δz wegfalle, denke man sich zwei der eingegangenen Constanten so bestimmt, dass die Gleichungen

$$\text{XXV)}\quad \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)_\beta = 0, \text{ und XXVI)}\quad \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)_b = 0$$

stattfinden. Aus diesen Gleichungen folgt bezüglich

$$\text{XXVII)}\quad M_\beta = -\left(\frac{2m\Pi w}{u} : \frac{d_zF}{dz}\right)_\beta, \text{ und XXVIII)}\quad M_b = -\left(\frac{2m\Pi w}{u} : \frac{d_zF}{dz}\right)_b$$

Weil ferner die Gleichungen $\delta\Pi_b = 0$, $\delta^2\Pi_b = 0$, etc. eine Grundbedingung der Aufgabe sind; folgt aus XXII jetzt

$$\text{XXIX)}\quad \delta\Pi_\beta =$$

$$-\frac{1}{L_\beta}\cdot\left[\left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_xF}{dx}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_xF}{dx}\right)_b\cdot\delta x_b\right]$$

$$+\frac{1}{L_\beta}\cdot\int_b^\beta\left(\frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_xF}{dx} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{Lm\Pi w}{u}\right)\right)\cdot\delta x\cdot dy$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{XXX)}\quad \frac{d(LM)}{dy}\cdot\frac{d_xF}{dx} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2Lm\Pi w}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXXI)}\quad \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_xF}{dx}\right)_\beta\cdot\delta x_\beta - \left(\frac{2Lm\Pi w}{u} + LM\cdot\frac{d_xF}{dx}\right)_b\cdot\delta x_b = 0$$

Aus XXIII folgt

$$\text{XXXII)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = 2mu$$

Führt man in XXIV die angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man

$$\text{XXXIII)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = -\left(\frac{dM}{dy}\cdot\frac{d_zF}{dz} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2m\Pi w}{u}\right)\right) : \left(M\cdot\frac{d_zF}{dz} + \frac{2m\Pi w}{u}\right)$$

Führt man ebenso in XXX die angedeuteten Differentiationen aus, so bekommt man

$$\text{XXXIV)}\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dy} = -\left(\frac{dM}{dy}\cdot\frac{d_xF}{ex} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2m\Pi w}{u}\right)\right) : \left(M\cdot\frac{d_xF}{dx} + \frac{2m\Pi w}{u}\right)$$

Aus XXXII und XXXIII folgt

$$\text{XXXV)}\quad \left(2muM + \frac{dM}{dy}\right)\cdot\frac{d_zF}{dz} = -4m^2\cdot\Pi w - \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2m\Pi w}{u}\right)$$

Aus XXXII und XXXIV folgt

$$\text{XXXVI)}\quad \left(2muM + \frac{dM}{dy}\right)\cdot\frac{d_xF}{dx} = -4m^2\cdot\Pi w - \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{2m\Pi w}{u}\right)$$

Diese beiden Gleichungen sind von der zweiten Ordnung, und müssen mit Gleichung III, welche von der ersten Ordnung ist, verbunden werden. Durch Integration dieser drei Gleichungen gehen fünf willkürliche Constanten ein, von welchen jedoch zwei zuviel sind; denn es wären nur drei eingegangen, wenn man z schon vor dem Mutiren direct eliminirt hätte. Hat man aber mittelst der Gleichungen I, III, XXXV, XXXVI bestimmt, was Π, M, x, z für Functionen von y sind; dann dienen die Gleichungen XXV und XXVI zur Bestimmung der beiden Constanten, welche zuviel sind.

Digitized by Google

Eliminirt man M_β und M_b aus XXXI, so bekommt man als Gränzengleichung

$$\text{XXXVII)}\quad \left(\frac{2Lm\Pi}{u} : \frac{d_zF}{dz}\right)_\beta \cdot \left(\frac{d_zF}{dz}\,w - \frac{d_xF}{dx}\,\mathfrak{w}\right)_\beta \cdot \delta x_\beta$$

$$- \left(\frac{2Lm\Pi}{u} : \frac{d_zF}{dz}\right)_b \cdot \left(\frac{d_zF}{dz}\,w - \frac{d_xF}{dx}\,\mathfrak{w}\right)_b \cdot \delta x_b = 0$$

Diese Gleichung dient dazu, um zwei der drei noch übrigen Constanten zu bestimmen, während der dritte auf andere Weise bestimmt werden muss, z. B. dadurch, dass man der im Anfangspunkte herrschenden Geschwindigkeit einen bestimmten Werth beilegt.

Durch das bis jetzt beobachtete Verfahren hat man, wie schon bemerkt, zwei Constanten zuviel bekommen, welche jedoch durch die Gleichungen XV und XVI ihre Bestimmung gefunden haben. Dieser Weitläufigkeit braucht man sich aber nicht zu unterziehen, sondern man kann die zwei Constanten, welche zuviel sind, ganz umgehen, die Function M gar nicht kennen lernen, und kurzweg für Π, z, x solche Functionen herstellen, wo nur die drei nothwendigen Constanten vorkommen. (Man vergl. Bd. I. S. 325.) Zu diesem Ende dividire man Gleichung XXXVI in XXXV, so bekommt man

$$\text{XXXVIII)}\quad \left[2m\Pi w + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi w}{u}\right)\right]\cdot\frac{d_zF}{dz} = \left[2m\Pi\mathfrak{w} + \frac{1}{dy}\cdot d\left(\frac{\Pi\mathfrak{w}}{u}\right)\right]\cdot\frac{d_xF}{dx}$$

Diese Gleichung ist von der zweiten Ordnung, und muss mit Gleichung III, welche von der ersten Ordnung ist, verbunden werden. Durch Integration dieser beiden Gleichungen gehen drei willkürliche Constanten ein. Mittelst der Gleichungen I, III und XXXVIII ergeben sich also die für Π, z, x gesuchten Functionen, während man M gar nicht kennen lernt. Man muss sich aber dennoch in der Idee denken, die Function M sei hergestellt, und die zwei Constanten, welche zuviel sind, seien vorhanden; denn nur dadurch ist es möglich, den Gleichungen XXV und XXVI zu genügen, M_β und M_b aus XXXI zu eliminiren, und dann zur Gränzengleichung XXXVII zu gelangen.

Erst wenn man eine bestimmte Fläche hat, auf welcher die gesuchte Bahn liegen soll, ist es möglich, die Aufgabe weiter durchzuführen.

Ist z. B. die gegebene Fläche eine schiefe Ebene mit der Gleichung

$$\text{XXXIX)}\quad \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z - \mathfrak{E} = 0$$

so ist jetzt $\frac{d_xF}{dx} = \mathfrak{A}$ und $\frac{d_zF}{dz} = \mathfrak{C}$. Wenn man nun zur Abkürzung $\mathfrak{F}(y)$ statt $\frac{2Lm\Pi}{u}$ setzt, so gehen die Gleichungen XXIV und XXX über in

$$\text{XL)}\quad \mathfrak{C}\cdot\frac{d(LM)}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{F}(y)) = 0$$

$$\text{XLI)}\quad \mathfrak{A}\cdot\frac{d(LM)}{dy} + \frac{1}{dy}\cdot d(w\cdot\mathfrak{F}(y)) = 0$$

Ausser diesen beiden Gleichungen hat man noch Gleichung XXXIX und die daraus sich ergebende totale Differentialgleichung

$$\text{XLII)}\quad \mathfrak{A}\cdot w + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{w} = 0$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\cdot w$$

Eliminirt man $\mathfrak{w}$ aus XL, so bekommt man

$$\text{XLIII)}\quad \mathfrak{C}^2\cdot\frac{d(LM)}{dy} - \mathfrak{B}\cdot\frac{1}{dy}\cdot d\mathfrak{F}(y) - \mathfrak{A}\cdot\frac{1}{dy}\cdot d(w\cdot\mathfrak{F}(y)) = 0$$

Wenn man $\frac{1}{dy}\cdot d(w\cdot\mathfrak{F}(y))$ aus XLI und XLIII eliminirt, so bekommt man

$$\text{XLIV)}\quad \frac{d(LM)}{dy} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2}\cdot\frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy}$$

Die Gleichungen XL und XLI gehen also über in

Digitized by Google

$$\text{XLV)}\quad \frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot\frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy}+\frac{d(\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{F}(y))}{dy}=0$$

und

$$\text{XLVI)}\quad \frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot\frac{d\mathfrak{F}(y)}{dy}+\frac{d(w\cdot\mathfrak{F}(y))}{dy}=0$$

Integrirt man beide Gleichungen, so gibt sich bezüglich

$$\frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}+(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2)\cdot\mathfrak{w}}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot\mathfrak{F}(y)=H$$

$$\frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}+(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2)\cdot w}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot\mathfrak{F}(y)=G$$

Man dividire diese beiden Gleichungen ineinander, und setze A statt $\frac{G}{H}$, so bekommt man

$$\frac{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}+(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2)\cdot w}{\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}+(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2)\cdot\mathfrak{w}}=A$$

Daraus folgt

$$w-A\cdot\mathfrak{w}+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}=0$$

Integrirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$\text{XLVII)}\quad x-Az+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-A\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2}\cdot y=B$$

Dieses ist wieder die Gleichung einer Ebene mit zwei willkürlichen Constanten A und B.

Aus den Gleichungen XXXIX und XLVII folgt, dass die gesuchte Curve diesmal eine grade Linie ist.

Hinsichtlich der Bestimmung der Function Π und hinsichtlich der weiteren Fortführung dieser Aufgabe vergleiche man den Schluss von Aufgabe 203.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, mutire man Gleichung XXI noch einmal, forme um, etc. etc. Man wird dabei auf keine Schwierigkeit stossen. Namentlich beachte man, dass aus Gleichung XXIII

$$L=e^{2m\cdot\int u\cdot dy}$$

folgt, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems vorstellt, L also positiv ist bei jedem beliebigen Werthe des y.

Aufgabe 208.

Man sucht eine ebene Curve, bei welcher der von der Abscisse a bis zur Abscisse α erstreckte Bogen ein Minimum-stand ist, aber unter folgenden zwei Bedingungen: der Flächeninhalt, welcher zwischen der zu einer bestimmten Abscisse b gehörigen und zwischen der zum Anfangspunkte des fraglichen Bogens gehörigen Ordinate liegt, soll den gegebenen Werth A haben; und der Flächeninhalt, welcher zwischen der zur besagten Abscisse b behörigen und zwischen der zum Endpunkte des fraglichen Bogens gehörigen Ordinate liegt, soll den gegebenen Werth B haben.

Es sei (fig. 36) die Linie Om die bestimmte Abscisse b; dagegen die Abscissen On = a und Op = α, die zum Anfangspunkte und Endpunkte des fraglichen Bogens gehören, müssen noch gesucht werden. Der Flächeninhalt mrsn sei A, und der Flächeninhalt mrtp sei B. Hier soll also der Bogen st, d. h. das bestimmte Integral

$$\text{I)}\quad U=\int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die gesuchte Curve nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen die Gleichungen

$$\text{II)}\ \int_b^a y \cdot dx = A, \quad \text{und} \quad \text{III)}\ \int_b^\alpha y \cdot dx = B$$

stattfinden. Man setze im Allgemeinen

$$\text{IV)}\ \int_b^x y \cdot dx = z$$

und differentiire; so bekommt man die identische Gleichung

$$\text{V)}\ y \cdot dx - dz = 0$$

Es kommt nun darauf an, y und x als Functionen von z zu suchen; und desshalb muss Gleichung I in folgende

$$\text{VI)}\ U = \int_A^B \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\right) \cdot dz$$

umgeformt werden. Man erkennt jetzt, dass von den zwei Elementen x und y eines mittelbar mutabel ist, und dass die Aufgabe am bequemsten durchgeführt werden kann, wenn man x als mittelbar mutabel behandelt.

Erste Auflösung.

Man eliminire $\frac{dx}{dz}$ direct. Aus Gleichung V folgt $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{y}$; und somit geht Gleichung VI über in

$$\text{VII)}\ U = \int_A^B \left(\sqrt{\frac{1}{y^2} + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\right) \cdot dz$$

Man mutire, und setze dann w statt $\frac{dy}{dz}$, und Q statt $\sqrt{\frac{1}{y^2} + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$; so bekommt man zunächst

$$\text{VIII)}\ \delta U = \int_A^B \left(-\frac{1}{y^3 \cdot Q} \cdot \delta y + \frac{w}{Q} \cdot \frac{d\delta y}{dz}\right) \cdot dz$$

Formt man um, so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{IX)}\ \delta U = \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A - \int_A^B \left(\frac{1}{y^3 \cdot Q} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dz$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{X)}\ \frac{1}{y^3 \cdot Q} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XI)}\ \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A = 0$$

Man multiplicire Gleichung X mit w, und führe statt Q den Ausdruck zurück; so bekommt man

$$\frac{dy}{y^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}} + w \cdot d\left(\frac{w}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}}\right) = 0$$

oder

$$-d\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2} + \frac{w \cdot dw}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}} + d\left(w \times \frac{w}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}}\right) - \frac{w \cdot dw}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}} = 0$$

oder

$$-d\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2} + d\left(\frac{w^2}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + w^2}}\right) = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$-\sqrt{\frac{1}{y^2}+w^2}+\frac{w^2}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+w^2}}=-\frac{1}{C}$$

oder

$$\text{XII)}\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{y^2}\cdot\sqrt{C^2-y^2}$$

Integrirt man diese Gleichung weiter, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad E-\frac{y}{2}\cdot\sqrt{C^2-y^2}+\frac{C^2}{2}\cdot\text{arc sin}\frac{y}{C}=z$$

Durch diese Gleichung ist dargestellt, wie y von z abhangt. Man hat jetzt aus Gleichung V das y zu eliminiren, um eine Gleichung zu bekommen, wodurch dargestellt ist, wie x von z abhangt. Aus dieser Gleichung und aus XIII eliminirt man darauf z, so gibt sich eine Gleichung zwischen x und y.

Allein diesen Weitläufigkeiten braucht man sich nicht zu unterziehen; denn eliminirt man dz aus V und XII, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot\sqrt{C^2-y^2}$$

Integrirt man diese Gleichung, so gibt sich $x+G=-\sqrt{C^2-y^2}$, oder

$$\text{XV)}\quad (x+G)^2+y^2=C^2$$

d. h. die gesuchte Curve ist eine Kreislinie. Die Gränzengleichung XI geht jetzt über in

$$\text{XVI)}\quad \left(\sqrt{C^2-y_B^2}\right)\cdot\delta y_B-\left(\sqrt{C^2-y_A^2}\right)\cdot\delta y_A=0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{C}$ weggelassen hat. Diese Gleichung dient dazu, die beiden Constanten C und G zu bestimmen. Hat man aber C und G bestimmt, so dienen die Gleichungen II und III dazu, um a und α zu bestimmen.

Man mutire Gleichung VIII noch einmal, forme um, und berücksichtige alles Vorhergehende; so bekommt man für $\delta^2 U$ einen Ausdruck, an welchem man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweite Auflösung.

Man eliminire das mittelbar mutable Element x mittelst eines Multiplicators. Zu diesem Ende forme man Gleichung V in folgende

$$\text{XVII)}\quad y\cdot\frac{dx}{dz}-1=0$$

um. Da in dieser Bedingungsgleichung ein ebenso hoher Differentialquotient des mittelbar mutablen Elementes x vorkommt, wie in dem Ausdrucke VI; so braucht man (nach Bd. I. S. 327, BB) die Bedingungsgleichung nicht zuvor zu differentiiren. Man multiplicire also Gleichung XVII mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{K}$ von z; so ist auch das Product $\mathfrak{K}\cdot\left(y\cdot\frac{dx}{dz}-1\right)$ noch eine nach z identische Gleichung, und kann unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XVIII)}\quad U=\int_A^B\left[\mathfrak{K}\cdot\left(y\cdot\frac{dx}{dz}-1\right)+\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,\right]\cdot dz$$

Man mutire, setze v und w bezüglich statt $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}$, und Q statt $\sqrt{v^2+w^2}$, und forme um; so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XIX)}\quad \delta U = \left(\frac{v}{Q} + \mathfrak{K}y\right)_B \cdot \delta x_B + \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - \left(\frac{v}{Q} + \mathfrak{K}y\right)_A \cdot \delta x_A - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A$$

$$- \int_A^B \left[\left(\frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{v}{Q} + \mathfrak{K}y\right)\right) \cdot \delta x + \left(-\mathfrak{K} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dz$$

Damit das mittelbare δx unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man die nach z identische Gleichung

$$\text{XX)}\quad \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{v}{Q} + \mathfrak{K} \cdot y\right) = 0$$

stattfinden. Sonach hat man die Hauptgleichung

$$\text{XXI)}\quad -\mathfrak{K} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right) = 0$$

Integrirt man Gleichung XX, so gibt sich

$$\text{XXII)}\quad \frac{v}{Q} + \mathfrak{K}y = H$$

In Folge alles Vorhergehenden reducirt sich also Gleichung XIX auf

$$\text{XXIII)}\quad \delta U = H \cdot \delta x_B + \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - H \cdot \delta x_A - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A$$

Damit nun das mittelbare δx auch ausserhalb des Integralzeichens wegfällt, muss stattfinden

$$\text{XXIV)}\quad H = 0$$

Man hat also die Gränzengleichung

$$\text{XXV)}\quad \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A = 0$$

Wegen $H = 0$ geht XXII über in

$$\text{XXVI)}\quad \frac{v}{Q} + \mathfrak{K}y = 0$$

Eliminirt man $\mathfrak{K}$ aus XXI und XXVI, so bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad \frac{1}{y \cdot Q} \cdot v^2 + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right) = 0$$

Nun folgt aus V, dass $v = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{y}$; somit geht letztere Gleichung über in

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{1}{y^3 \cdot Q} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right) = 0$$

Dieses ist wiederum Gleichung X.

Und so fort.

Dritte Auflösung.

Man behandle y als das mittelbar mutable Element. Man multiplicire Gleichung XVII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function M von z; so ist auch das Product $M \cdot \left(y \cdot \frac{dx}{dz} - 1\right)$ noch eine identische Gleichung, und kann unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXIX)}\quad U = \int_A^B \left[M \cdot \left(y \cdot \frac{dx}{dz} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\right] \cdot dz$$

Man mutire, forme um, und setze zur Abkürzung v statt $\frac{dx}{dz}$, w statt $\frac{dy}{dz}$, und Q statt $\sqrt{v^2 + w^2}$; so bekommt man

$$\text{XXX)}\quad \delta U = \left(\frac{v}{Q} + My\right)_B \cdot \delta x_B + \left(\frac{w}{Q}\right)_B \cdot \delta y_B - \left(\frac{v}{Q} + My\right)_A \cdot \delta x_A - \left(\frac{w}{Q}\right)_A \cdot \delta y_A$$
$$- \int_A^B \left[\left(\frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{v}{Q} + My\right)\right) \cdot \delta x + \left(-M \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{1}{dz} \cdot d\left(\frac{w}{Q}\right)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dz$$

Weil in der Bedingungsgleichung XVII kein Differentialquotient des mittelbaren y enthalten ist, während doch $\frac{dy}{dz}$ im Ausdrucke VI, der ein Minimum-stand werden soll, vorkommt; so konnten auch in Gleichung XXX ausserhalb des Integralzeichens die zu δy_B und δy_A gehörigen Coefficienten nicht mit M_B und M_A versehen sein, so dass δy_B und δy_A nur auf directem Wege eliminirt werden können.

Dieser Weitläufigkeit entgeht man, wenn man (nach Bd. I. S. 327) die identische Gleichung XVII vor Allem noch einmal nach z differentiirt. Dadurch bekommt man die fernere nach z identische Gleichung

$$\text{XXXI)}\quad \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dx}{dz} + y \cdot \frac{d^2x}{dz^2} = 0$$

Multiplicirt man diese mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von z; so ist auch das Product $\mathfrak{N} \cdot \left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dx}{dz} + y \cdot \frac{d^2x}{dz^2}\right)$ noch eine nach z identische Gleichung, und kann unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Mindesten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXXII)}\quad U = \int_A^B \left[\mathfrak{N} \cdot \left(\frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} + y \cdot \frac{d^2x}{dz^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\right] \cdot dz$$

Wie letztere Gleichung weiter behandelt werden muss, ist in früheren Aufgaben hinlänglich gezeigt worden. Die Durchführung der dritten Auflösung mag also um so eher unterbleiben, weil die gesuchte Curve bereits in der ersten Auflösung vollständig hergestellt ist.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., S. 135 und 136). Euler hat sie dadurch gelöst, dass er vor Allem das mittelbar mutable Element eliminirte, wie auch hier in der ersten Auflösung geschehen ist. Die zweite oder dritte Auflösung konnte damals (im Jahre 1744 nemlich) noch nicht angewendet werden, weil die Elimination mittelst solcher Multiplicatoren, die eine Function der absolut unabhängigen Veränderlichen sind, erst durch den von Lagrange erfundenen (und von Euler sogenannten) Variationscalcul möglich geworden ist.

Aufgabe 209.

Es ist eine unendliche Menge ebener Curven gegeben, welche alle auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen sind. Man wählt eine aus, verwandelt ihre bei einer festen Abscisse a anfangenden Bögen in grade Linien, und trägt diese auf der Abscissenaxe in den Punkten, welche den Endpunkten jener Bögen entsprechen, als senkrechte Ordinaten auf. Dadurch ergeben sich stetig nebeneinander liegende Punkte, d. h. es wird eine neue Curve erzeugt. Wenn man aber unter den unendlichvielen gegebenen Curven diejenige heraussuchen soll, bei welcher der von der neu erzeugten Curve zwischen den festen Abscissen a und α eingeschlossene Flächeninhalt grösser oder kleiner ist, als bei allen andern der erzeugenden Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann; welches ist die erzeugende Curve?

Es seien x und y die Abscissen und Ordinaten der erzeugenden Curve. Wenn man nun von ihrem Bogen das Stück, welches erst bei der festen Abscisse a beginnt, mit v bezeichnet; so hat man die Gleichung

$$\text{I)}\quad v = \int_a^x (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Digitized by Google

Bei der neu erzeugten Curve, welche mit der erzeugenden die Abscissen x gemeinschaftlich hat, sind also die Ordinaten durch v darzustellen; und der von dieser neuen Curve zwischen den Abscissen a und α eingeschlossene Flächeninhalt ist

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha v \cdot dx$$

Setzt man für v den Ausdruck ein, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\int_a^x (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx \right) \cdot dx$$

und die Aufgabe ist jetzt folgende: Man sucht für y eine solche Function von x, dass das Integral III ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man differentiire Gleichung I, so bekommt man folgende identische Gleichung

$$\text{IV)}\quad \sqrt{1 + p^2} - \frac{dv}{dx} = 0$$

Hieran erkennt man, dass die Durchführung der Aufgabe am einfachsten vor sich geht, wenn man für y und v solche zusammengehörige Functionen von x sucht, dass dabei der Gleichung IV genügt, und das Integral II ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man multiplicire also Gleichung IV mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x; so ist auch noch das Product $L \cdot \left(\sqrt{1 + p^2} - \frac{dv}{dx} \right)$ eine identische Gleichung, und kann bei II unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad U = \int_a^\alpha \left[v + L \cdot \left(\sqrt{1 + p^2} - \frac{dv}{dx} \right) \right] \cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \delta U = \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}} \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - L_\alpha \cdot \delta v_\alpha - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}} \right)_a \cdot \delta y_a + L_a \cdot \delta v_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(1 + \frac{dL}{dx} \right) \cdot \delta v - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}} \right) \right) \cdot \delta y \right] \cdot dx$$

Ehe dieser Ausdruck weiter behandelt wird, mag zuvor noch folgende Nebenuntersuchung angestellt werden. Aus der Gleichung

$$\text{I)}\quad v = \int_a^x (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

folgt

$$\text{VII)}\quad \delta v = \int_a^x \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right) \cdot dx$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 v = \int_a^x \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx$$

etc. etc.

Setzt man nun x = a, so gehen diese Gleichungen über in

$$\text{IX)}\quad v_a = \int_a^a (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx = 0$$

$$\text{X)}\quad \delta v_a = \int_a^a \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XI)}\quad \delta^2 v_a = \int_a^a \left[\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Digitized by Google

d. h. es ist $v_a = 0$, $\delta v_a = 0$, $\delta^2 v_a = 0$, etc.; und durch diese Gleichungen ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe mit ausgesprochen. Dass aber diese Gleichungen stattfinden müssen, kann man auch schon aus folgender geometrischen Betrachtung entnehmen:

„Weil die zu irgend einer nach Belieben genommenen Abscisse x gehörige Ordinate „der neu erzeugten Curve jedesmal gleich ist dem bei der festen Abscisse a anfangen-„den und bis zu besagter Abscisse x erstreckten Bogenstücke der erzeugenden Curve; „so ist, was auch immer für Eigenschaften die erzeugende Curve haben mag, doch je-„desmal die der festen Abscisse a entsprechende Ordinate der erzeugten Curve gleich „Null, mag nun die erzeugende Curve diejenige sein, welche gesucht wird, oder eine „solche, welche der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegt. Man hat also nicht allein „die Gleichung

$$v_a = 0$$

„sondern auch folgende Gleichung

$$\text{XII)} \quad v_a + \varkappa \cdot \delta v_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v_a + \ldots\ldots\ldots = 0$$

„und da hier das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, so muss einzeln „stattfinden $v_a = 0$, $\delta v_a = 0$, $\delta^2 v_a = 0$, etc."

Damit das mittelbare δv unter dem Integralzeichen wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{XIII)} \quad 1 + \frac{dL}{dx} = 0$$

stattfindet. Nun ist $\delta v_a = 0$, wie bereits bewiesen. Damit also jede Spur der von v herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man einen der eingehenden Constanten so, dass die Gleichung

$$\text{XIV)} \quad L_\alpha = 0$$

stattfindet. Gleichung VI reducirt sich daher auf

$$\text{XV)} \quad \delta U = \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat sonach die Hauptgleichung

$$\text{XVI)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XVII)} \quad \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Die Gleichung XIII ist von der ersten Ordnung; und durch deren Integration geht ein willkürlicher Constanter ein. Die Gleichung XVI ist von der zweiten Ordnung; und durch deren Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Man wird also zusammen drei solcher Constanter bekommen. Einer davon wird, wie gesagt, durch Gleichung XIV bestimmt; und die beiden andern erhalten dadurch ihre Bestimmung, dass der Gränzengleichung XVII genügt wird.

Integrirt man Gleichung XVI, so gibt sich

$$\text{XVIII)} \quad \frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} = B$$

d. h. der Ausdruck $\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$ ist constant bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$. (In dieser Beziehung vergleiche man sorgfältig den dieser Aufgabe beigegebenen Zusatz.) Gleichung XVII geht also über in

$$\text{XIX)} \quad B \cdot \delta y_\alpha - B \cdot \delta y_a = 0$$

Aus XVIII folgt

$$\text{XX)} \quad L = B \cdot \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p}$$

Digitized by Google

Differentiirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$\text{XXI)}\quad \frac{dL}{dx} = -B \cdot \frac{q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Verbindet man XIII und XXI, so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad 1 = B \cdot \frac{q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Dieses ist eine Gleichung zweiter Ordnung, durch deren Integration noch zwei weitere Constanten eingehen. Integrirt man wirklich, so bekommt man

$$\text{XXIII)}\quad x = A - B \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

Daraus folgt

$$\text{XXIV)}\quad p = \frac{B}{\sqrt{(A-x)^2 - B^2}}$$

woraus, wenn man weiter integrirt, sich

$$\text{XXV)}\quad y = B \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{-(A-x) + \sqrt{(A-x)^2 - B^2}}{m}$$

ergibt. Aus der Verbindung von XX und XXIII bekommt man

$$\text{XXVI)}\quad L = A - x$$

Damit der Gleichung XIV genügt werde, muss $A - \alpha = 0$, d. h. es muss $A = \alpha$ sein; und sonach geht XXVI über in

$$\text{XXVII)}\quad L = \alpha - x$$

so dass jetzt L eine ganz bestimmte Function von x ist. Weil nun $A = \alpha$, so geht XXV über in

$$\text{XXVIII)}\quad y = B \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{-(\alpha - x) + \sqrt{(\alpha - x)^2 - B^2}}{m}$$

Die erzeugende Curve ist also die Kettenlinie, mit den beiden willkürlichen Constanten B und m, zu deren Bestimmung, wie gesagt, Gleichung XIX benützt wird.

Für die Gleichung der erzeugten Curve bekommt man nunmehr

$$v = \int_a^x \left(\sqrt{1+p^2}\right) \cdot dx = \int_a^x \frac{(\alpha - x) \cdot dx}{\sqrt{(\alpha - x)^2 - B^2}}$$

d. h. es ist

$$\text{XXIX)}\quad v = -\sqrt{(\alpha - x)^2 - B^2} + \sqrt{(\alpha - a)^2 - B^2}$$

wo jedoch nur der einzige noch unbestimmte Constante B vorkommt.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels mutire man Gleichung V zum zweiten Male, forme dann um, und berücksichtige alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\text{XXX)}\quad \delta^2 U = B \cdot \delta^2 y_\alpha - B \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{\left(\sqrt{(\alpha - x)^2 - B^2}\right)^3}{(\alpha - x)^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Es findet also ein Minimum-stand statt; denn das Radical ist schon von Anfange her (man sehe Gleichung I oder III) nur als positiv vorausgesetzt. Dieses stimmt auch ganz mit der Figur überein. Es sind nemlich die Bogenstücke der erzeugenden Curve alle positiv, und die diesen positiven Bogenstücken gleichen Ordinaten der erzeugten Curve hat man alle auf eine und dieselbe Seite der Abscissenaxe aufgetragen.

Zusatz. Aus Gleichung XVIII folgt, dass der Ausdruck $\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$ immer den constanten Werth B behält, folglich auch bei $x = \alpha$. Nun folgt aus Gleichung XIV, dass $L_\alpha = 0$ sein muss. Wie ist es also zu verstehen, wenn auch noch $\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha$, oder, was dasselbe ist, wenn auch noch $L_\alpha \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha$ den constanten Werth B behält, während doch

Digitized by Google

der Factor L_α zu Null wird? Diese Frage beantwortet sich auf folgende Weise: weil $p = \frac{B}{\sqrt{(A-x)^2 - B^2}}$, so ist $\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{L \cdot B}{A - x}$. Nun ist $L = A - x$, somit gibt sich

$$\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{L \cdot B}{A - x} = \frac{L \cdot B}{L} = B$$

d. h. das im Zähler befindliche L wird von dem im Nenner befindlichen aufgehoben, und zwar bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = \alpha$.

Gränzfälle. Schaut man auf Gleichung XVII zurück, so erkennt man, dass die Gränzbedingungen nur Einfluss haben können auf die erzeugende Curve. Diese Erscheinung entspricht aber ganz dem Wesen des hiesigen Problems; denn ist die erzeugende Curve vollkommen bestimmt, so ist es auch die erzeugte.

Schlussbemerkung. Als Jakob Bernoulli das von seinem Bruder Johann allen Mathematikern öffentlich aufgegebene Problem der Brachystochrone gelöst hatte, und die betreffende Abhandlung bekannt machte, legte er in derselben, sich namentlich an seinen Bruder wendend, folgendes ziemlich allgemein gehaltene Problem vor:

„Man sucht eine Curve von der Art, dass, wenn man auf ihrer Axe eine zweite Curve „beschreibt, deren Ordinaten beliebige Functionen der Ordinaten und Bögen der ersten „Curve sind, die von der zweiten Curve eingeschlossene Fläche ein Grösstes oder Klein„stes ist."

In dieser Beziehung lese man:

1) Acta eruditorum Lipsiensia. 1697. Monat Mai.
2) Opera Jacobi Bernoulli. Tom. II. n. 75.
3) Opera Johannis Bernoulli. Tom. I. p. 201.

Zu jener Zeit waren unter dem Namen „isoperimetrisches Problem" alle jene Aufgaben begriffen, bei welchen die Auffindung noch unbekannter Curven, die irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten haben, verlangt wird. Später (in der Schlussbemerkung zur 214ten Aufgabe) soll näher auseinandergesetzt werden, warum man diesem Namen damals eine so weite Bedeutung beilegte.

Die hier von mir durchgeführte Aufgabe ist also ein specieller Fall der von Jakob Bernoulli vorgelegten, und sie würde nicht durchführbar gewesen sein, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass die Gleichungen

$$\delta v_a = 0, \; \delta^2 v_a = 0, \; \delta^3 v_a = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung ausmachen. Dass aber ohne diese Gleichungen die Aufgabe wirklich unmöglich ist, mag noch näher nachgewiesen werden, wie folgt:

a) Zuerst finden die beiden Gleichungen XIII und XVI statt, welche zunächst eine Function mit drei willkürlichen Constanten liefern.

b) Nun wird der Gränzengleichung XVII genügt, wobei zwei der besagten drei Constanten eine Bestimmung finden.

c) Wegen XIII, XVI und XVII zieht Gleichung VI sich zurück auf $\delta U = L_\alpha \cdot \delta v_\alpha - L_a \cdot \delta v_a$, während bereits zwei Constante bestimmt, also nur noch einer unbestimmt ist.

d) Wenn man jetzt diesen dritten Constanten so bestimmt, dass $L_\alpha = 0$ wird; so bleibt noch immer $\delta U \doteq - L_a \cdot \delta v_a$, während kein unbestimmter Constanter mehr vorhanden ist, also L_a einen bereits ganz bestimmten Ausdruck vorstellt, welchen man nicht so ohneweiters und beliebig verschwinden lassen kann.

e) Somit erkennt man, dass, wenn nicht unter allen Umständen $\delta v_a = 0$ ist, auch nicht unter allen Umständen $\delta U = 0$ wird. Da aber nothwendig $\delta U = 0$ sein muss, so hängt die Möglichkeit der Aufgabe allernächst von $\delta v_a = 0$ ab.

f) Ebenso erkennt man, dass der für das Prüfungsmittel herzustellende Ausdruck nur dadurch, dass auch $\delta^2 v_a = 0$ ist, von allen mittelbaren Mutationen frei wird.

Aufgabe 210.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \left(\int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx \right)^n \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man setze


Digitized by Google

$$\text{II)} \quad \int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = v$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)} \quad U = \int_a^\alpha v^n \cdot dx$$

Wenn man Gleichung II differentiirt, so gibt sich die identische

$$\text{IV)} \quad \sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx} = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x multiplicirt; so ist auch das Product $L \cdot \left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)$ noch eine identische Gleichung, und kann bei Gleichung III unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)} \quad U = \int_a^\alpha \left[v^n + L \cdot \left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)\right] \cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck

$$\text{VI)} \quad \delta U = \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - L_\alpha \cdot \delta v_\alpha + L_a \cdot \delta v_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(n \cdot v^{n-1} + \frac{dL}{dx}\right) \cdot \delta v - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dx$$

Damit das mittelbare δv unter dem Integralzeichen wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{VII)} \quad n \cdot v^{n-1} + \frac{dL}{dx} = 0$$

stattfindet. Nun ist schon in voriger Aufgabe bewiesen, dass durch die Gleichungen

$$\delta v_a = 0, \quad \delta^2 v_a = 0, \quad \delta^3 v_a = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung der Aufgabe ausgesprochen ist. Damit also jede Spur der von v herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man einen der eingehenden Constanten so, dass die Gleichung

$$\text{VIII)} \quad L_\alpha = 0$$

stattfindet. Gleichung VI reducirt sich daher auf

$$\text{IX)} \quad \delta U = \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{X)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XI)} \quad \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Gleichung X ist von der zweiten Ordnung; und durch deren Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Gleichung VII ist von der ersten Ordnung; und durch deren Integration geht ein willkürlicher Constanter ein. Man wird also zusammen drei solcher Constanter bekommen. Einer davon wird, wie gesagt, durch Gleichung VIII bestimmt; und die beiden andern erhalten dadurch ihre Bestimmung, dass der Gränzengleichung XI genügt wird.

Man integrire Gleichung X, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XII)} \quad \frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = B$$

d. h. der Ausdruck $\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$ ist constant bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$. (In dieser Beziehung vergleiche man sorgfältig den der vorigen Aufgabe beigegebenen Zusatz.) Gleichung XI reducirt sich nun auf

$$\text{XIII)} \quad B \cdot \delta y_\alpha - B \cdot \delta y_a = 0$$

Aus XII folgt

$$\text{XIV)} \quad L = B \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

Differentiirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{XV)} \quad \frac{dL}{dx} = -B \cdot \frac{q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Man verbinde die Gleichungen VII und XV, so bekommt man

$$\text{XVI)} \quad n \cdot v^{n-1} = B \cdot \frac{q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Diese Gleichung, welche der Gleichung XXII der vorigen Aufgabe entspricht, ist eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, durch deren Integration noch zwei weitere Constanten eingehen. Multiplicirt man sie beiderseits mit $\sqrt{1+p^2}$, so gibt sich

$$\text{XVII)} \quad n \cdot v^{n-1} \cdot \sqrt{1+p^2} = B \cdot \frac{q}{p^2}$$

Da aus IV folgt, dass $\sqrt{1+p^2} = \frac{dv}{dx}$ ist, so geht XVII über in

$$n \cdot v^{n-1} \cdot \frac{dv}{dx} = B \cdot \frac{q}{p^2}$$

oder in

$$n \cdot v^{n-1} \cdot dv = B \cdot \frac{dp}{p^2}$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$\text{XVIII)} \quad v^n = E - \frac{B}{p}$$

Hiermit hat man die Gleichung XVII auf eine Differentialgleichung der ersten Ordnung gebracht, durch deren Integration sich endlich eine Urgleichung mit noch einem dritten Constanten ergibt. Um aber besagte Urgleichung herzustellen, verfahre man auf folgende Weise: Aus XVIII folgt

$$\text{XIX)} \quad v = \sqrt[n]{\frac{E \cdot p - B}{p}}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach allem x, so bekommt man

$$\text{XX)} \quad dv = \frac{B}{n} \cdot \frac{dp}{\sqrt[n]{(E \cdot p - B)^{n-1} \cdot p^{n+1}}}$$

und wenn man statt dv seinen Ausdruck $(\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$ setzt, so bekommt man

$$\text{XXI)} \quad (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = \frac{B}{n} \cdot \frac{dp}{\sqrt[n]{(E \cdot p - B)^{n-1} \cdot p^{n+1}}}$$

Man dividire beiderseits mit $\sqrt{1+p^2}$, so gibt sich

$$\text{XXII)} \quad dx = \frac{B}{n} \cdot \frac{dp}{(\sqrt{1+p^2}) \cdot \sqrt[n]{(E \cdot p - B)^{n-1} \cdot p^{n+1}}}$$

und

Digitized by Google

$$\text{XXIII)}\quad dy = p \cdot dx = \frac{B}{n} \cdot \frac{p \cdot dp}{(\sqrt{1+p^2}) \cdot \sqrt[n]{(E \cdot p - B)^{n-1} \cdot p^{n+1}}}$$

Bei den vielförmigen Radicalen hat man jedoch nur die reellen Formen zu beachten, eben weil bei Untersuchungen über das Grösste und Kleinste die imaginären Formen ausgeschlossen bleiben. Integrirt man Gleichung XXII, so geht noch ein Constanter A ein. Integrirt man Gleichung XXIII, so geht noch ein Constanter F ein. Man bekommt dann zwei Gleichungen, aus welchen man p zu eliminiren hat, so dass sich eine Urgleichung zwischen x und y mit den vier willkürlichen Constanten B, E, A, F ergibt.

Einer dieser vier Constanten ist zuviel; denn er wäre nicht eingegangen, wenn man Gleichung XVIII integrirt hätte, ohne vorher noch einmal zu differentiiren. Dieser findet aber seine Bestimmung dadurch, dass man sowohl der Gleichung XVIII als auch der Gleichung VII zu genügen sucht. (Es geht nemlich jedesmal, wenn man eine Differentialgleichung vorher noch einer weiteren Differentiation unterwirft, und dann erst integrirt, ein willkürlicher Constanter zuviel ein, welcher dadurch bestimmt werden muss, dass man der ursprünglich vorgelegten Differentialgleichung durch die erlangte Urgleichung zu genügen sucht. Man vergleiche Seite 29, Seite 32, Seite 39, etc., wo ebenfalls Beispiele vorkommen, bei denen ein Constanter zuviel ist.)

Man hat somit jetzt nur noch drei Constanten, welche ihre Bestimmung erwarten. Einer davon wird durch Gleichung VIII und die beiden andern durch die Gränzengleichung XIII bestimmt. Es ist also Alles, wie in voriger Aufgabe.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels mutire man Gleichung V zum zweiten Male, forme um, und berücksichtige alles Vorhergehende; so bekommt man zunächst

$$\text{XXIV)}\quad \delta^2 U = B \cdot \delta^2 y_\alpha - B \cdot \delta^2 y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[n(n-1) \cdot v^{n-2} \cdot \delta v^2 + \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx$$

Wenn man mittelst XIV das L eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \delta^2 U = B \cdot \delta^2 y_\alpha - B \cdot \delta^2 y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[n(n-1) \cdot v^{n-2} \cdot \delta v^2 + \frac{B}{p \cdot (1+p^2)} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx$$

so dass es von $\frac{B}{p}$ abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Specieller Fall. Setzt man $n = 1$, so gehen die Gleichungen XXII und XXIII bezüglich über in

$$\text{XXVI)}\quad dx = \frac{B \cdot dp}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}, \quad \text{und} \quad \text{XXVII)}\quad dy = \frac{B \cdot dp}{p \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Integrirt man diese beiden Gleichungen, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXVIII)}\quad x = A - B \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}, \quad \text{und} \quad \text{XXIX)}\quad y = B \cdot \lg\text{nat}\, \frac{-1+\sqrt{1+p^2}}{F \cdot p}$$

Aus XXVIII folgt $p = \frac{B}{\sqrt{(A-x)^2 - B^2}}$; und wenn man diesen Ausdruck in XXIX substituirt, so bekommt man

$$\text{XXX)}\quad y = B \cdot \lg\text{nat}\, \frac{(A-x) - \sqrt{(A-x)^2 - B^2}}{B \cdot F}$$

Setzt man aber $(-m)$ an die Stelle von $B \cdot F$, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XXXI)}\quad y = B \cdot \lg\text{nat}\, \frac{-(A-x) + \sqrt{(A-x)^2 - B^2}}{m}$$

welches genau wieder Gleichung XXV der vorigen Aufgabe ist.

Schlussbemerkung. Die hier von mir durchgeführte Aufgabe ist wieder ein specieller Fall der von Jakob Bernoulli vorgelegten allgemeinen, deren Wortlaut bereits (in der Schlussb. zur vorigen Aufg.) mitgetheilt wurde.

Digitized by Google

Auch die hiesige wäre, wie die vorige, nicht durchführbar gewesen, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass die Gleichungen

$$\delta v_a = 0,\ \delta^2 v_a = 0,\ \delta^3 v_a = 0,\ \text{etc.}$$

eine Grundbedingung ausmachen. (Man vergleiche die Schlussb. in voriger Aufg.)

Andere Schriftsteller, welche dergleichen Aufgaben zu lösen suchten, haben

1) diese Grundbedingung ganz übersehen; sie haben auch

2) übersehen, dass unter den vier Constanten, die man bekommt, sich einer befindet, der zuviel ist, d. h. dass dieser gar nicht eingegangen wäre, wenn man die Hauptgleichung integrirt hätte, ohne sie vor der Integration noch einmal zu differentiiren. Dann haben sie

3) zwei der vier Constanten dadurch bestimmt, dass der Gränzengleichung genügt wurde, und die zwei andern dadurch, dass sie nicht nur $L_\alpha = 0$, sondern auch $L_a = 0$ setzten. Auf diese Weise haben

4) die vier Constanten allerdings eine Bestimmung erlangt; allein dabei gestaltet sich die gesuchte Function so, dass sie der Hauptgleichung nicht genügt, wovon man sich jedesmal überzeugen kann, wenn man die so gestaltete Function in die Hauptgleichung substituirt.

Besagte Schriftsteller haben ihren hier gerügten Irrthum desshalb begangen, weil sie kurzweg ohne alle Ueberlegung diejenigen Aufgaben, wo in der Bedingungsgleichung ursprünglich ein angezeigtes Integral vorkommt, mit solchen Aufgaben, wo die Bedingungsgleichung schon ursprünglich eine Differentialgleichung oder gar eine Urgleichung ist, einer ganz gleichmässigen Behandlung unterwarfen. Sie würden aber ihren Irrthum sofort entdeckt haben, wenn sie versucht hätten, ob ihre Function in der Gestalt, wie sie sie von allen unbestimmten Stücken befreit haben, fähig sei, der Hauptgleichung zu genügen.

Aufgabe 211.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = e^{-n\cdot\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx} \times \int_a^\alpha e^{n\cdot\int_a^x (\sqrt{1+p^2})\cdot dx}\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man setze

$$\text{II)}\quad \int_a^x (\sqrt{1+p^2})\cdot dx = v$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad U = e^{-n\cdot\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx} \times \int_a^\alpha e^{nv}\cdot dx$$

Wenn man Gleichung II differentiirt, so gibt sich die identische

$$\text{IV)}\quad \sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx} = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x multiplicirt; so ist auch das Product $L\cdot\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)$ noch eine identische Gleichung, und kann bei Gleichung III unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad U = e^{-n\cdot\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx} \times \int_a^\alpha \left[e^{nv} + L\cdot\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)\right]\cdot dx$$

Man mutire, so bekommt man zunächst

$$\text{VI)}\quad \delta U = e^{-n\cdot\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx} \times$$

$$\left[-\left(n\cdot\int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right) \times \int_a^\alpha \left(e^{nv} + L\cdot\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)\right)\cdot dx\right.$$

$$\left. + \int_a^\alpha \left(n\cdot e^{nv}\cdot\delta v + \frac{L\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - L\cdot\frac{d\delta v}{dx}\right)\cdot dx\right]$$

Digitized by Google

Um nun diese Gleichung weiter zu behandeln, verfahre man auf folgende Weise:

1) Man lasse den Theilsatz $L \cdot \left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx}\right)$ weg, weil $\sqrt{1+p^2} - \frac{dv}{dx} = 0$ eine identische Gleichung ist.

2) Man setze $\frac{1}{A}$ statt $e^{-n \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx}$, und B statt $\int_a^\alpha e^{nv} \cdot dx$.

Dadurch reducirt sich Gleichung VI auf

$$\text{VII)} \quad \delta U =$$

$$\frac{1}{A} \cdot \left[-nB \cdot \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} dx + \int_a^\alpha \left(n \cdot e^{nv} \cdot \delta v + \frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - L \frac{d\delta v}{dx} \right) \cdot dx \right]$$

Weil aber nB von x ganz unabhängig ist, so kann man dieses Product auch unter das Integralzeichen bringen; und so geht letztere Gleichung über in

$$\text{VIII)} \quad \delta U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + n \cdot e^{nv} \cdot \delta v - L \cdot \frac{d\delta v}{dx} \right) \cdot dx$$

Man forme um, so bekommt man

$$\text{IX)} \quad \delta U = \frac{1}{A} \cdot \left[\left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot \delta y_a - L_\alpha \cdot \delta v_\alpha + L_a \cdot \delta v_a \right]$$

$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[-\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot \delta y + \left(n \cdot e^{nv} + \frac{dL}{dx} \right) \cdot \delta v \right] \cdot dx$$

Damit das mittelbare δv unter dem Integralzeichen wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{X)} \quad n \cdot e^{nv} + \frac{dL}{dx} = 0$$

stattfindet. Nun ist $\delta v_a = 0$, $\delta^2 v_a = 0$, etc. Der Beweis hierzu ist bereits (in Aufgabe 209) geführt. Damit also jede Spur der von v herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man einen der eingehenden Constanten so, dass die Gleichung

$$\text{XI)} \quad L_\alpha = 0$$

stattfindet. Gleichung IX reducirt sich sonach auf

$$\text{XII)} \quad \delta U =$$

$$\frac{1}{A} \cdot \left[\left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) . \delta y . dx \right]$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{XIII)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XIV)} \quad \left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{(L-nB)p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot \delta y_a = 0$$

Gleichung XIII ist von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Gleichung X ist von der ersten Ordnung, und durch deren Integration geht ein willkürlicher Constanter ein. Man hat daher im Ganzen drei solcher Constanter. Einer davon wird durch Gleichung XI bestimmt; die beiden andern erhalten dadurch ihre Bestimmung, dass der Gränzengleichung XIV genügt wird.

Man integrire Gleichung XIII, so gibt sich

$$\text{XV)} \quad \frac{(L-nB) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

Somit geht die Gränzengleichung XIV über in

$$\text{XVI)} \quad C \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

Aus XV folgt

Digitized by Google

$$\text{XVII)} \quad L = n \cdot B + C \times \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

Differentiirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad \frac{dL}{dx} = -\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Aus X folgt

$$\text{XIX)} \quad \frac{dL}{dx} = -n \cdot e^{uv}$$

Man verbinde die beiden letzten Gleichungen, so bekommt man

$$\text{XX)} \quad n \cdot e^{uv} = \frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Dieses ist eine Gleichung der zweiten Ordnung, durch deren Integration noch zwei weitere Constanten eingehen. Um aber die Integration ausführen zu können, differentiire man zuerst letztere Gleichung noch einmal, so gibt sich

$$\text{XXI)} \quad n^2 \cdot e^{uv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}\right)$$

Man dividire XX in XXI, so gibt sich

$$\text{XXII)} \quad n \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}\right)}{\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}}$$

Man multiplicire diese Gleichung mit $\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$, und beachte, dass $\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+p^2}$ ist; so bekommt man

$$\text{XXIII)} \quad \frac{n \cdot C \cdot q}{p^2} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{C \cdot q}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}\right)$$

Dieses ist eine Gleichung der dritten Ordnung. Durch ihre Integration gehen noch drei willkürliche Constanten ein, von denen aber einer zuviel ist; denn er wäre nicht eingegangen, wenn man Gleichung XX integrirt hätte, ohne sie zuvor noch einmal zu differentiiren. Integrirt man jetzt XXIII, so gibt sich

$$\text{XXIV)} \quad -\frac{nC}{p} = E + \frac{C \cdot q}{\sqrt{1+p^2}}$$

Man hat also

$$\text{XXV)} \quad dx = -\frac{C \cdot dp}{p \cdot (nC + E \cdot p) \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

und

$$\text{XXVI)} \quad dy = p \cdot dx = -\frac{C \cdot dp}{(nC + Ep) \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Integrirt man diese Gleichungen, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXVII)} \quad x = F - \frac{1}{n} \cdot \lg \text{nat} \frac{-1 + \sqrt{1+p^2}}{p}$$
$$+ \frac{E}{n \cdot \sqrt{E^2 + n^2 \cdot C^2}} \cdot \lg \text{nat} \frac{E - nCp - \sqrt{(E^2 + n^2 \cdot C^2) \cdot (1+p^2)}}{nC + E \cdot p}$$

und

$$\text{XXVIII)} \quad y = G - \frac{C}{\sqrt{E^2 + n^2 \cdot C^2}} \cdot \lg \text{nat} \frac{E - nCp - \sqrt{(E^2 + n^2 \cdot C^2) \cdot (1+p^2)}}{nC + E \cdot p}$$

Die zwischen x und y stattfindende Relation ist hier, wie schon oft der Fall war, durch zwei Gleichungen gegeben, aus welchen man nach p eliminiren muss.

Man hat nun die vier willkürlichen Constanten C, E, F, G. Von diesen ist, wie

Digitized by Google

schon hinter Gleichung XXIII gesagt, einer zuviel, welcher aber dadurch seine Bestimmung findet, dass man sowohl der Gleichung XX als auch der Gleichung X zu genügen sucht. (Es geht nemlich jedesmal, wenn man eine Differentialgleichung vorher noch einer weitern Differentiation unterwirft, und dann erst integrirt, ein willkürlicher Constanter zuviel ein, welcher dadurch bestimmt werden muss, dass man der ursprünglich vorgelegten Differentialgleichung durch die erlangte Urgleichung zu genügen sucht. Man sehe Seite 29, Seite 32, Seite 39, etc., wo ebenfalls Beispiele vorkommen, bei denen ein Constanter zuviel ist.)

Nun ist

$$\text{XXIX)} \quad B = \int_a^\alpha e^{n.v} \cdot dx$$

Gleichung XVII ist also gleichbedeutend mit folgender

$$L = n \cdot \int_a^\alpha e^{n.v} \cdot dx + C \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

und so geht Gleichung XI über in

$$\text{XXX)} \quad n \cdot \int_a^\alpha e^{n.v} \cdot dx + C \cdot \left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\right)_\alpha = 0$$

wodurch, wie bereits bemerkt, abermals einer der vier Constanten C, E, F, G bestimmt wird, so dass nur noch zwei Constanten für die Gränzengleichung XVI übrig bleiben, und somit alle vier Constanten bestimmt werden können.

Wenn man Gleichung XXV beiderseits mit $\sqrt{1+p^2}$ multiplicirt, so bekommt man

$$(\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = -\frac{C \cdot dp}{p \cdot (nC + Ep)}$$

oder

$$(\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{E \cdot dp}{nC + Ep} - \frac{dp}{p}\right)$$

Daraus folgt

$$\text{XXXI)} \quad \int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot \lg \text{nat}\left(\frac{nC + E \cdot p}{nC + E \cdot p_a} \times \frac{p_a}{p}\right)$$

Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, hat man in Gleichung VI nur noch den innerhalb der eckigen Klammern stehenden Ausdruck zu mutiren, etc. Es steht somit der Herstellung des Prüfungsmittels keine weitere Schwierigkeit entgegen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, S. 166—168), wo sie aber sehr mangelhaft durchgeführt ist. Namentlich findet man dort nicht die beiden Gleichungen XXVII und XXVIII. Eine vollständige Durchführung war aber damals (im Jahre 1744 nemlich) auch nicht möglich, weil die Elimination mittelst solcher Multiplicatoren, die eine Function der absolut unabhängigen Veränderlichen sind, erst durch den von Lagrange erfundenen (und von Euler sogenannten) Variationscalcul möglich geworden ist.

Auch die hiesige Aufgabe wäre, wie die beiden vorigen, nicht durchführbar gewesen, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass die Gleichungen

$$\delta v_a = 0, \quad \delta^2 v_a = 0, \quad \delta^3 v_a = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung ausmachen. (Man vergl. die Schlussbem. zu Aufg. 209.)

Hinsichtlich der Irrthümer, die bei dergleichen Aufgaben von andern Schriftstellern begangen worden sind, vergleiche man die Schlussbemerkung zur vorigen Aufgabe.

Aufgabe 212.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \left(y^2 \cdot \int_a^x y \cdot dx\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Digitized by Google

Man setze

$$\text{II)}\quad \int_a^x y\cdot dx = z$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha y^2\cdot z\cdot dx$$

Wenn man Gleichung II differentiirt, so gibt sich die identische Gleichung

$$\text{IV)}\quad y - \frac{dz}{dx} = 0$$

Wenn man diese mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x multiplicirt, so ist auch das Product $L\cdot\left(y - \frac{dz}{dx}\right)$ noch eine identische Gleichung, und kann bei Gleichung III unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad U = \int_a^\alpha \left[y^2\cdot z + L\cdot\left(y - \frac{dz}{dx}\right)\right]\cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{VI)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left[(2yz + L)\cdot\delta y + \left(y^2 + \frac{dL}{dx}\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx - L_\alpha\cdot\delta z_\alpha + L_a\cdot\delta z_a$$

Ehe dieser Ausdruck weiter behandelt wird, mag zuvor noch folgende Nebenuntersuchung angestellt werden.

Aus Gleichung

$$\text{II)}\quad z = \int_a^x y\cdot dx$$

folgt

$$\text{VII)}\quad \delta z = \int_a^x \delta y\cdot dx,\qquad \text{VIII)}\quad \delta^2 z = \int_a^x \delta^2 y\cdot dx,\ \text{etc. etc.}$$

Setzt man nun $x = a$, so gehen diese Gleichungen über in

$$\text{IX)}\quad z_a = \int_a^a y\cdot dx = 0$$

$$\text{X)}\quad \delta z_a = \int_a^a \delta y\cdot dx = 0$$

$$\text{XI)}\quad \delta^2 z_a = \int_a^a \delta^2 y\cdot dx = 0$$

etc. etc.

d. h. es ist $z_a = 0$, $\delta z_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, etc.; und durch diese Gleichungen ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe mit ausgesprochen.

Damit das mittelbare δz unter dem Integralzeichen wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{XII)}\quad y^2 + \frac{dL}{dx} = 0$$

stattfindet. Nun ist $\delta z_a = 0$, wie bereits bewiesen. Damit also jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man einen der eingehenden Constanten so, dass die Gleichung

$$\text{XIII)}\quad L_\alpha = 0$$

stattfindet. Somit reducirt sich Gleichung VI auf

Digitized by Google

$$\delta U = \int_a^\alpha (2yz + L) \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat daher die Hauptgleichung

$$\text{XIV)} \quad 2yz + L = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht.

Gleichung XIV ist schon eine Urgleichung, braucht also nicht mehr integrirt zu werden. Gleichung XII ist von der ersten Ordnung, und durch deren Integration geht ein willkürlicher Constanter ein, welcher durch Gleichung XIII seine Bestimmung findet.

Um nun die gesuchten Functionen bestimmen zu können, differentiire man zuerst die Gleichung XIV nach allem x; so bekommt man

$$\text{XV)} \quad 2z \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dL}{dx} = 0$$

Subtrahirt man XII von XV, so bleibt

$$\text{XVI)} \quad 2z \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dz}{dx} - y^2 = 0$$

Aus IV folgt $\frac{dz}{dx} = y$; und so geht XVI über in

$$\text{XVII)} \quad 2z \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

Diese Gleichung ist abermals von der ersten Ordnung, und man kann sie statt XII benützen, um zu den gesuchten Resultaten zu gelangen. Differentiirt man sie vorerst noch einmal, so gibt sich

$$\text{XVIII)} \quad 2 \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 2z \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Aus IV folgt $\frac{dz}{dx} = y$, und aus XVII folgt $z = -\frac{y^2}{2 \cdot \frac{dy}{dx}}$. Wenn man also z und $\frac{dz}{dx}$ eliminirt, so geht XVIII über in

$$\text{XIX)} \quad 4y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Dieses ist eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung. Durch ihre Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein, von denen aber einer zuviel ist; denn er wäre nicht eingegangen, wenn man Gleichung XVII integrirt hätte, ohne sie vorher noch einmal zu differentiiren. (Man vergleiche Seite 29, Seite 32, Seite 39, etc., wo ebenfalls Beispiele vorkommen, bei denen ein Constanter zuviel ist.) Man gebe letzterer Gleichung folgende Form

$$\text{XX)} \quad \frac{4 \cdot dy}{y} = \frac{dp}{p}$$

Daraus folgt durch einmalige Integration

$$\text{XXI)} \quad y^4 = C \cdot p$$

Dieser Gleichung gebe man folgende Form

$$\text{XXII)} \quad \frac{dy}{y^4} = \frac{dx}{C}$$

Integrirt man abermals, so gibt sich $-\frac{1}{3 \cdot y^3} = \frac{x}{C} + E$, oder $\frac{1}{y^3} = \frac{-3x - 3CE}{C}$; und daraus folgt $y^3 = -\frac{C}{3x + 3CE}$, oder mit Aenderung der beiden Constanten

$$\text{XXIII)} \quad y^3 = \frac{A}{B + x}$$

Digitized by Google

Nun ist $z = \int_a^x y \cdot dx = \int_a^x \left(\frac{A}{B + x}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$; und wenn man die Integration wirklich ausführt, so bekommt man

$$\text{XXIV)} \quad z = \frac{3}{2} \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot \left[(B + x)^{\frac{2}{3}} - (B + a)^{\frac{2}{3}}\right]$$

Aus Gleichung XIV folgt

$$\text{XXV)} \quad L = -2 \cdot y \cdot z = -3 \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot \left[(B + x)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{(B + a)^2}{B + x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

In allen diesen Ausdrücken ist, wie gesagt, ein Constanter zuviel. Man hat aber noch der Gleichung XVII, oder vielmehr der schon früher vorhandenen Gleichung XII zu genügen; und dabei findet einer der beiden Constanten seine Bestimmung. Aus XXV folgt

$$\text{XXVI)} \quad \frac{dL}{dx} = -A^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(\frac{1}{(B + x)^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{(B + a)^2}{(B + x)^4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Macht man nun die gehörigen Substitutionen, so gehen die Gleichungen XII und XVII über in

$$\text{XXVII)} \quad A^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{(B + a)^2}{(B + x)^4}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn man $B + a = 0$ setzt, so dass man

$$\text{XXVIII)} \quad B = -a$$

bekommt. Gleichung XXIII geht also über in

$$\text{XXIX)} \quad y^3 = \frac{A}{x - a}$$

wo nur noch der einzige Constante A vorkommt. Gleichung XXV reducirt sich jetzt auf

$$\text{XXX)} \quad L = -3 \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot (x - a)^{\frac{1}{3}}$$

Der Constante A bekommt seine Bestimmung durch XIII; denn diese Gleichung geht nun über in

$$\text{XXXI)} \quad 3 \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot (\alpha - a)^{\frac{1}{3}} = 0$$

woraus nur $A = 0$ folgt. Somit geht Gleichung XXIX jetzt über in

$$\text{XXXII)} \quad y = 0$$

d. h. die für y gesuchte Function ist eine identische. Gleichung XXIV geht nun auch über in

$$\text{XXXIII)} \quad z = 0$$

d. h. es ist auch z eine identische Function. Man mutire Gleichung V zum zweiten Male, und forme um; so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{XXXIV)} \quad \delta^2 U = L_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha - L_a \cdot \delta^2 z_a + \int_a^\alpha \left[(2yz + L) \cdot \delta^2 y + \left(y^2 + \frac{dL}{dx}\right) \cdot \delta^2 z + 2z \cdot \delta y^2 + 4y \cdot \delta y \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Wegen der vier Gleichungen XI—XIV reducirt sich dieser Ausdruck zunächst auf

$$\text{XXXV)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha (2z \cdot \delta y^2 + 4y \cdot \delta y \cdot \delta z) \cdot dx$$

Da aber y und z identische Functionen sind, so wird auch

$$\text{XXXVI)} \quad \delta^2 U = 0$$

während $\delta^3 U$ nicht zu Null wird. Hiermit erkennt man, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Digitized by Google

Schlussbemerkung. Die hier von mir durchgeführte Aufgabe wäre wieder, wie die drei vorhergehenden, nicht durchführbar gewesen, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass die Gleichungen

$$\delta z_a = 0, \quad \delta^2 z_a = 0, \quad \delta^3 z_a = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung ausmachen. (Man vergl. die Schlussb. zu Aufg. 209.)

Andere Schriftsteller, welche dergleichen Aufgaben zu lösen suchten, haben

1) diese Grundbedingung ganz übersehen; sie haben auch

2) übersehen, dass unter den zwei Constanten, welche man bekommt, sich einer befindet, der zuviel ist, d. h. dass dieser gar nicht eingegangen wäre, wenn man die Hauptgleichung integrirt hätte, ohne sie vor der Integration noch einmal zu differentiiren. Dann haben sie

3) beide Constanten dadurch bestimmt, dass sie nicht nur $L_\alpha = 0$, sondern auch $L_a = 0$ setzten. Auf diese Weise haben

4) die beiden Constanten allerdings eine Bestimmung erlangt; allein dabei gestaltet sich die gesuchte Function so, dass sie der Hauptgleichung, welche diesmal eine Urgleichung ist, nicht genügt, wovon man sich jedesmal überzeugen kann, wenn man die so gestaltete Function in die Hauptgleichung substituirt.

Besagte Schriftsteller haben (wie schon einmal in der Schlussb. zu Aufg. 210 gesagt ist) ihren hier gerügten Irrthum desshalb begangen, weil sie kurzweg ohne alle Ueberlegung diejenigen Aufgaben, wo in der Bedingungsgleichung ein angezeigtes Integral vorkommt, mit solchen Aufgaben, wo die Bedingungsgleichung schon ursprünglich eine Differentialgleichung oder gar eine Urgleichung ist, einer ganz gleichmässigen Behandlung unterwarfen. Sie würden aber ihren Irrthum sofort entdeckt haben, wenn sie versucht hätten, ob ihre Function in der Gestalt, wie sie sie von allen unbestimmten Stücken befreit haben, fähig sei, der Hauptgleichung zu genügen.

Aufgabe 213.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\int_a^x y \cdot dx\right) \cdot \left(\int_a^x xy \cdot dx\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man setze

$$\text{II)}\quad \int_a^x y \cdot dx = z, \qquad \text{und} \qquad \text{III)}\quad \int_a^x x \cdot y \cdot dx = v$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{IV)}\quad U = \int_a^\alpha z \cdot v \cdot dx$$

Wenn man II und III differentiirt, so bekommt man bezüglich die identischen Gleichungen

$$\text{V)}\quad y - \frac{dz}{dx} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{VI)}\quad xy - \frac{dv}{dx} = 0$$

Wenn man diese Gleichungen bezüglich mit den (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Functionen M und L von x multiplicirt, so sind auch die Producte $M \cdot \left(y - \frac{dz}{dx}\right)$ und $L \cdot \left(xy - \frac{dv}{dx}\right)$ noch identische Gleichungen, und können bei Gleichung IV unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{VII)}\quad U = \int_a^\alpha \left(z \cdot v + M \cdot \left(y - \frac{dz}{dx}\right) + L \cdot \left(xy - \frac{dv}{dx}\right)\right) \cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{VIII)}\quad \delta U = - M_\alpha \cdot \delta z_\alpha - L_\alpha \cdot \delta v_\alpha + M_a \cdot \delta z_a + L_a \cdot \delta v_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(z + \frac{dL}{dx}\right) \cdot \delta v + \left(v + \frac{dM}{dx}\right) \cdot \delta z + (Lx + M) \cdot \delta y\right] \cdot dx$$

Digitized by Google

Damit die mittelbaren Elemente δz und δv unter dem Integralzeichen wegfallen, denke man sich unter L und M solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$\text{IX)}\quad z + \frac{dL}{dx} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{X)}\quad v + \frac{dM}{dx} = 0$$

stattfinden. Weil $z = \int_a^x y \cdot dx$ und $v = \int_a^x xy \cdot dx$, so ist

$$\text{XI)}\quad \delta z = \int_a^x \delta y \cdot dx, \qquad \text{XII)}\quad \delta v = \int_a^x x \cdot \delta y \cdot dx$$

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 z = \int_a^x \delta^2 y \cdot dx, \qquad \text{XIV)}\quad \delta^2 v = \int_a^x x \cdot \delta^2 y \cdot dx$$

Setzt man hier a an die Stelle des x, so bekommt man

$$\text{XV)}\quad \delta z_a = \int_a^a \delta y \cdot dx = 0 \qquad \text{XVI)}\quad \delta v_a = \int_a^a x \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

$$\text{XVII)}\quad \delta^2 z_a = \int_a^a \delta^2 y \cdot dx = 0 \qquad \text{XVIII)}\quad \delta^2 v_a = \int_a^a x \cdot \delta^2 y \cdot dx = 0$$

d. h. es ist $\delta z_a = 0$, $\delta v_a = 0$, $\delta^2 z_a = 0$, $\delta^2 v_a = 0$, etc. etc.; und durch diese Gleichungen ist eine der Grundbedingungen der Aufgabe mit ausgesprochen.

Damit nun jede Spur der von z und v herrührenden Mutationen verschwinde, bestimme man zwei der eingehenden Constanten so, dass die Gleichungen

$$\text{XIX)}\quad L_\alpha = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{XX)}\quad M_\alpha = 0$$

stattfinden. Somit reducirt sich Gleichung VIII auf

$$\text{XXI)}\quad \delta U = \int_a^\alpha (Lx + M) \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{XXII)}\quad Lx + M = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht.

Gleichung XXII ist schon eine Urgleichung, braucht also nicht mehr integrirt zu werden. Die Gleichungen IX und X sind von der ersten Ordnung, so dass durch die Integration einer jeden derselben ein willkürlicher Constanter eingeht. Diese beiden Constanten finden aber ihre Bestimmung durch die Gleichungen XIX und XX.

Differentiirt man Gleichung IX, so bekommt man zunächst

$$\text{XXIII)}\quad \frac{dz}{dx} + \frac{d^2L}{dx^2} = 0$$

weil aber $\frac{dz}{dx} = y$, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XXIV)}\quad y + \frac{d^2L}{dx^2} = 0$$

woraus weiter

$$\text{XXV)}\quad \frac{dy}{dx} + \frac{d^3L}{dx^3} = 0$$

folgt. Differentiirt man auch Gleichung X, so bekommt man zunächst

$$\text{XXVI)}\quad \frac{dv}{dx} + \frac{d^2M}{dx^2} = 0$$

weil aber $\frac{dv}{dx} = xy$, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XXVII)}\quad xy + \frac{d^2M}{dx^2} = 0$$

woraus weiter

Digitized by Google

$$\text{XXVIII)} \quad y + px + \frac{d^3M}{dx^3} = 0$$

folgt. Differentiirt man auch Gleichung XXII, so bekommt man nach und nach

$$\text{XXIX)} \quad L + x \cdot \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dx} = 0$$

$$\text{XXX)} \quad 2 \cdot \frac{dL}{dx} + x \cdot \frac{d^2L}{dx^2} + \frac{d^2M}{dx^2} = 0$$

$$\text{XXXI)} \quad 3 \cdot \frac{d^2L}{dx^2} + x \cdot \frac{d^3L}{dx^3} + \frac{d^3M}{dx^3} = 0$$

Eliminirt man aus XXXI die drei Ausdrücke $\frac{d^2L}{dx^2}, \frac{d^3L}{dx^3}, \frac{d^3M}{dx^3}$, was mittelst der Gleichungen XXIV, XXV, XXVIII geschieht; so bekommt man

$$\text{XXXII)} \quad 2y + px = 0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XXXIII)} \quad y = \frac{A}{x^2}$$

Man hat nun für L und M solche Functionen von x zu suchen, dass nicht nur die beiden bei $x = \alpha$ geltenden Gleichungen XIX und XX erfüllt werden, sondern dass auch noch den drei Gleichungen IX, X und XXII identisch genügt wird; und wenn diesen drei Gleichungen identisch genügt wird, so wird auch allen davon abgeleiteten Differentialgleichungen identisch genügt.

Aus Gleichung IX folgt $\frac{dL}{dx} = -z = -\int_a^x y \cdot dx = -\int_a^x \frac{A}{x^2} \cdot dx$, woraus sich

$$\text{XXXIV)} \quad \frac{dL}{dx} = \frac{A}{x} - \frac{A}{a}$$

ergibt, so dass man durch abermalige Integration

$$\text{XXXV)} \quad L = C - A \cdot \frac{x}{a} + A \cdot \lg \text{nat}\, x$$

bekommt. Diese für L gefundene Function hat noch der Gleichung XIX zu genügen, so dass

$$C - A \cdot \frac{\alpha}{a} + A \cdot \lg \text{nat}\, \alpha = 0$$

stattfinden muss. Daraus folgt $C = +A \cdot \frac{\alpha}{a} - A \cdot \lg \text{nat}\, \alpha$, und Gleichung XXXV geht über in

$$\text{XXXVI)} \quad L = A \cdot \left(\frac{\alpha - x}{a} + \lg \text{nat} \frac{x}{\alpha}\right)$$

Aus Gleichung X folgt $\frac{dM}{dx} = -v = -\int_a^x xy \cdot dx = -\int_a^x \frac{A}{x} \cdot dx$, woraus sich

$$\text{XXXVII)} \quad \frac{dM}{dx} = -A \cdot \lg \text{nat} \frac{x}{a}$$

ergibt, so dass man durch abermalige Integration

$$\text{XXXVIII)} \quad M = E + Ax - Ax \cdot \lg \text{nat} \frac{x}{a}$$

bekommt. Diese für M gefundene Function hat noch der Gleichung XX zu genügen so dass

$$E + A \cdot \alpha - A \cdot \alpha \cdot \lg \text{nat} \frac{\alpha}{a} = 0$$

stattfinden muss. Daraus folgt $E = -A \cdot \alpha + A\alpha \cdot \lg \text{nat} \frac{\alpha}{a}$, und Gleichung XXXVIII geht über in

Digitized by Google

$$\text{XXXIX)}\quad M = A \cdot \left((x - \alpha) - x \cdot \lg\text{nat}\,\frac{x}{a} + \alpha \cdot \lg\text{nat}\,\frac{\alpha}{a}\right)$$

Weil die für L und M gefundenen Functionen dadurch hergestellt worden sind, dass man die Gleichungen IX und X integrirt hat; so braucht man diesmal nicht zu untersuchen, ob auch diesen Gleichungen identisch genügt wird; denn dieses Genügen muss diesmal nothwendig stattfinden. Dagegen mit Gleichung XXII muss eine solche Untersuchung allerdings noch vorgenommen werden, wobei sich dann ergeben wird, ob der Constante A eine specielle Bestimmung erleiden muss, oder jeden beliebigen Werth haben darf. Wenn man also aus XXXVI und XXXIX für L und M die Ausdrücke in XXII einsetzt, und soviel als möglich reducirt; so bekommt man

$$A \cdot \left(- \frac{(\alpha - x) \cdot (a - x)}{a} + \alpha \cdot \lg\text{nat}\,\frac{\alpha}{a}\right) = 0$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $A = 0$ ist. Somit geht Gleichung XXXIII über in

$$\text{XL)}\quad y = 0$$

d. h. die für y gesuchte Function ist eine identische. Die Gleichungen II und III gehen nun auch über in

$$\text{XLI)}\quad z = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{XLII)}\quad v = 0$$

d. h. auch z und v sind identische Functionen von x.

Und so fort.

Schlussbemerkung. Die Durchführung dieser Aufgabe wäre unmöglich gewesen, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass folgende zwei Systeme von Gleichungen

$$\delta z_a = 0, \quad \delta^2 z_a = 0, \quad \delta^3 z_a = 0, \text{ etc.}$$

und

$$\delta v_a = 0, \quad \delta^2 v_a = 0, \quad \delta^3 v_a = 0, \text{ etc.}$$

gleichzeitig gelten müssen, und eine Grundbedingung der Aufgabe ausmachen. (Man vergleiche die Schlussb. zu Aufg. 209.)

Uebrigens findet Alles, was in der Schlussbemerkung der vorigen einfacheren Aufgabe enthalten ist, auf diese zusammengesetztere eine analoge Ausdehnung.

Aufgabe 214.

Man sucht zwischen den beiden zu den Abscissen a und α gehörigen rechtwinkeligen Gränzordinaten die kürzeste unter allen Linien, welche mit der Abscissenaxe und den Gränzordinaten den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Flächeninhalt einschliessen.

Die hiesige Aufgabe verlangt also: Es soll das bestimmte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen folgendes bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.

Einleitung.

Dergleichen Aufgaben löse ich mittelst gemischter Mutationen, welche aber sehr verschiedenartig sind, und daher auch die Einführung verschiedener Bezeichnungen nöthig machen. In dieser Hinsicht muss noch Einiges nachgeholt werden, wozu hier die passendste Stelle ist.

I) Es sei $y = \varphi(x)$ eine Function von x, und erleide dadurch eine unmittelbare

Digitized by Google

gemischte Mutation, dass man dem x Werthänderungen beilegt; so geht y über in $y + {}_{(}\varDelta_{)}y$, d. h. in

$$y_{(x)} = y + x \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{x^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo, wie man (aus §. 77) weiss

$${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

ist; und wenn man a an die Stelle des x setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{)}y_a = \delta y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 y_a = \delta^2 y_a + 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a + \left(\frac{\delta^2 y}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta^2 a$$

etc. etc.

II) Es sei $y = \varphi(x, m)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und des willkürlichen Constanten m, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem m Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{(}\varDelta_{1)}y$, oder vielmehr mit

$$y_{(x_1)} = y + x \cdot {}_{(}\delta_{1)}y + \frac{x^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo aber diesmal

$${}_{(}\delta_{1)}y = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$

$${}_{(}\delta_{1)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m$$

etc. etc.

ist. Weil m von x ganz unabhängig ist, und umgekehrt; so folgt aus letzteren Gleichungen gradezu

$$\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m$$

$$\frac{d^2{}_{(}\delta_{1)}y}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_x^2 d_m y}{dx^2.dm} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

$$\frac{d_{(}\delta_{1)}^2 y}{dx} = \frac{d\delta^2 y}{dx} + 2 \cdot \frac{d_x d_m \delta y}{dx.dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_m^2 y}{dx.dm^2} \cdot \vartheta m^2 + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta^2 m$$

etc. etc.

Wenn man a an die Stelle des x setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{1)}y_a = \delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m$$

$${}_{(}\delta_{1)}^2 y_a = \delta^2 y_a + 2 \cdot \left(\frac{d_m \delta y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_a \cdot \vartheta m^2 + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta^2 m$$

etc. etc.

$$\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)_a = \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{d_x d_m y}{dx.dm}\right)_a \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

III) Es sei $y = \varphi(x, m, n)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und der beiden willkürlichen Constanten m und n, und erleide dadurch eine

unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem m und dem n Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{(}\Delta_{2)}y$, oder vielmehr mit

$$y_{(x_2)} = y + x \cdot {}_{(}\delta_{2)}y + \frac{x^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{2)}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{2)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo aber jetzt

$${}_{(}\delta_{2)}y = \delta y + \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n$$

$${}_{(}\delta_{2)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + 2 \cdot \frac{d_n \delta y}{dn} \cdot \vartheta n + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta^2 n$$

$$+ \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + 2 \cdot \frac{d_m d_n y}{dm \cdot dn} \cdot \vartheta m \cdot \vartheta n + \frac{d_n^2 y}{dn^2} \cdot \vartheta n^2$$

etc. etc.

ist. Weil m und n von x ganz unabhängig sind, und umgekehrt; so folgt aus letzteren Gleichungen geradezu

$$\frac{d_{(}\delta_{2)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_n y}{dx \cdot dn} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

Wenn man a an die Stelle des x setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{2)}y_a = \delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_a \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

$$\left(\frac{d_{(}\delta_{2)}y}{dx}\right)_a = \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_x d_n y}{dx \cdot dn}\right)_a \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

IV) Es sei $y = \varphi(x;\, m,\, n,\, k)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und der drei willkürlichen Constanten m, n, k, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem m, dem n und dem k Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{(}\Delta_{3)}y$, oder vielmehr mit

$$y_{(x_3)} = y + x \cdot {}_{(}\delta_{3)}y + \frac{x^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{3)}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{3)}^3 y + \ldots\ldots$$

aus allem Vorhergehenden folgt von selbst die Bedeutung von ${}_{(}\delta_{3)}y$, ${}_{(}\delta_{3)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{3)}^3 y$, etc.

V) Es sei ganz allgemein $y = \varphi(x,\, m',\, m'',\, m''',\, \ldots\ldots)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und der n willkürlichen Constanten m', m'', m''', ..., und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man den n willkürlichen Constanten Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{(}\Delta_{n)}y$, oder vielmehr mit

$$y_{(x_n)} = y + x \cdot {}_{(}\delta_{n)}y + \frac{x^3}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{n)}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{n)}^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

VI) Es sei wieder $y = \varphi(x,\, m)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und des willkürlichen Constanten m, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man sowohl dem x als auch dem m Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{((}\Delta_{1))}y$, oder vielmehr mit

$$y_{((x_1))} = y + x \cdot {}_{((}\delta_{1))}y + \frac{x^2}{1.2} \cdot {}_{((}\delta_{1))}^2 y + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot {}_{((}\delta_{1))}^3 y + \ldots\ldots$$

Hier ist

$${}_{((}\delta_{1))}y = {}_{(}\delta_{1)}y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$= \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

Digitized by Google

Die Bedeutung von $_{((\delta_1))}{}^2y$, etc. ist jetzt von selbst klar; und wenn man a an die Stelle des x setzt, so bekommt man

$$_{((\delta_1))}y_a = {}_{(\delta_1)}y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$= \delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

etc. etc.

VII) Es sei $y = \varphi(x, m, n)$ eine Function des absolut unabhängigen Veränderlichen x und der beiden willkürlichen Constanten m und n, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man sowohl dem x als auch dem m und dem n Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt y übergeht, bezeichnet werden mit $y + {}_{((\Delta_2))}y$, oder vielmehr mit

$$y_{((\varkappa_2))} = y + \varkappa \cdot {}_{((\delta_2))}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{((\delta_2))}{}^2y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{((\delta_2))}{}^3y + \ldots\ldots\ldots$$

Hier ist

$$_{((\delta_2))}y = {}_{(\delta_2)}y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$= \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

Die Bedeutung von $_{((\delta_2))}{}^2y$, $_{((\delta_2))}{}^3y$, etc. ist von selbst klar; und wenn man a an die Stelle des x setzt, so bekommt man

$$_{((\delta_2))}y_a = {}_{(\delta_2)}y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$= \delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_a \cdot \vartheta n + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

etc. etc.

Es ist überflüssig, diesen Gegenstand, insofern er sich auf Functionen mit einem einzigen absolut unabhängigen Veränderlichen bezieht, noch weiter fortzusetzen; insofern er sich aber auf Functionen mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen bezieht, wird das Betreffende später (in der 261sten Aufgabe) nachgeholt werden.

Bei den mittelbaren gemischten Mutationen finden dieselben verschiedenen Arten, also auch dieselben verschiedenen Bezeichnungen statt.

Auflösung.

Man nehme an, $y = \varphi(x, m)$ sei die gesuchte Function, in welcher, wenn das bestimmte Integral II einen vorgeschriebenen Werth bekommen soll, der willkürliche Constante m noch so eingerichtet werden kann, dass dieses Integral eben den vorgeschriebenen Werth bekommt. Alle diejenigen Functionen, welche der Function $\varphi(x, m)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegen, und bei denen das Integral II den nemlichen Werth bekommt, wie bei $\varphi(x, m)$, werden bekanntlich (man sehe §. 265 und 267) dargestellt durch

$$\text{III)} \quad y_{(\varkappa_1)} = y + \varkappa \cdot {}_{(\delta_1)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(\delta_1)}{}^3y + \ldots\ldots\ldots$$

wo, wie man (aus Einleitung Nr. II) weiss,

$$\text{IV)} \quad {}_{(\delta_1)}y = \delta\varphi(x, m) + \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$= \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{V)} \quad {}_{(\delta_1)}{}^2y = \delta^2\varphi(x, m) + 2 \cdot \frac{d_m\delta\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2\varphi(x, m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m$$

$$= \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m\delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m$$

etc. etc.

ist. Weil x von m ganz unabhängig ist, und umgekehrt; so ist

Digitized by Google

$$\text{VI)} \quad \frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

Durch die Reihe III sind nur diejenigen der gesuchten Function nächstanliegenden Nachbarfunctionen dargestellt, bei welchen das Integral II denselben Werth annimmt, wie bei der gesuchten Function. Deshalb findet folgende Gleichung

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha y_{(x_1)} \cdot dx$$

statt; und daraus folgt successive

$$\text{VII)} \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx = 0, \quad \text{VIII)} \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y \cdot dx = 0 \quad \text{etc.}$$

Setzt man ebenso die Reihe III in den Ausdruck I ein, so bekommt man successive

$$\text{IX)} \quad {}_{(}\delta_{1)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} \right) \cdot dx$$

$$\text{X)} \quad {}_{(}\delta_{1)}{}^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d_{(}\delta_{1)}{}^2 y}{dx} + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} \right)^2 \right) \cdot dx$$

etc. etc.

Formt man die beiden letzteren Gleichungen um, so bekommt man für die zweite Form des ${}_{(}\delta_{1)}U$ und ${}_{(}\delta_{1)}{}^2U$ folgende Ausdrücke:

$$\text{XI)} \quad {}_{(}\delta_{1)}U =$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx$$

und

$$\text{XII)} \quad {}_{(}\delta_{1)}{}^2U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx$$

Führt man nun für das Abkürzungszeichen ${}_{(}\delta_{1)}y$ den Ausdruck ein, so gehen die Gleichungen VII und XI bezüglich über in

$$\text{XIII)} \quad \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m \right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XIV)} \quad {}_{(}\delta_{1)}U =$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm} \right)_\alpha \cdot \vartheta m \right) - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm} \right)_a \cdot \vartheta m \right)$$

$$- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m \right] \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm wegzubringen, multiplicire man Gleichung XIII mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L; so ist auch noch $L \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m \right) \cdot dx = 0$. Dieses Product addire man zu XIV, so ist noch vollkommen genau

$${}_{(}\delta_{1)}U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm} \right)_\alpha \cdot \vartheta m \right) - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm} \right)_a \cdot \vartheta m \right)$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot \delta y + \left(L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m \right] \cdot dx$$

Damit nun das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man folgende identische Gleichung

Digitized by Google

$$\text{XV)}\quad L - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei wird auch der bei δy befindliche Factor zu Null; die Gleichung XV ist also auch zugleich Hauptgleichung, und als Gränzengleichung hat man

$$\text{XVI)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m\right) - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a\cdot\vartheta m\right) = 0$$

Aus XV folgt zunächst $Lx + B = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; und daraus folgt weiter $p = \frac{Lx+B}{\sqrt{1-(Lx+B)^2}}$. Also ist

$$\text{XVII)}\quad y = C - \frac{1}{L}\cdot\sqrt{1-(Lx+B)^2}$$

oder

$$\text{XVIII)}\quad (y-C)^2 + \left(x+\frac{B}{L}\right)^2 = \frac{1}{L^2}$$

Die Kreislinie mit dem Halbmesser $\frac{1}{L}$ genügt also der Aufgabe. Dass aber die Kreislinie genügt, ist längst aus der Elementargeometrie bekannt. Hier sind B, C, L drei noch willkürliche Constanten. Die Gränzengleichung XVI geht jetzt über in

$$\text{XIX)}\quad (L\alpha + B)\cdot\left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m\right) - (La + B)\cdot\left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a\cdot\vartheta m\right) = 0$$

Dadurch, dass dieser Gleichung genügt wird, bestimmen sich aber nur zwei der drei Constanten B, C, L; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat, dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen. Nähere Einsicht in dieses Verfahren mag man aus den Gränzfällen entnehmen. (Man vergleiche besonders den sechsten Gränzfall, so wird man erkennen, dass es nicht immer in unserer Willkür steht, welchen der Constanten man mit m bezeichnen will.)

Führt man jetzt für die Abkürzungszeichen $(\delta_1)y$ und $(\delta_1)^2 y$ die Ausdrücke ein, so geben die Gleichungen VIII und XII bezüglich über in

$$\text{XX)}\quad \int_a^\alpha\left(\delta^2 y + 2\cdot\frac{d_m\delta y}{dm}\cdot\vartheta m + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta^2 m + \frac{d_m^2 y}{dm^2}\cdot\vartheta m^2\right)\cdot dx = 0$$

und

$$\text{XXI)}\quad (\delta_1)^2 U =$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\left(\delta^2 y_\alpha + 2\cdot\left(\frac{d_m\delta y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_\alpha\cdot\vartheta m^2\right)$$

$$-\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\left(\delta^2 y_a + 2\cdot\left(\frac{d_m\delta y}{dm}\right)_a\cdot\vartheta m + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a\cdot\vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_a\cdot\vartheta m^2\right)$$

$$+\int_a^\alpha\left[\left(-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\left(\delta^2 y + 2\cdot\frac{d_m\delta y}{dm}\cdot\vartheta m + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta^2 m + \frac{d_m^2 y}{dm^2}\cdot\vartheta m^2\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx\cdot dm}\cdot\vartheta m\right)^2\right]\cdot dx$$

Multiplicirt man nun Gleichung XX mit dem bereits angewendeten Factor L, so ist auch dieses Product noch Null, und kann zu XXI addirt werden, ohne dass $(\delta_1)^2 U$ sich im Geringsten ändere. Man addire wirklich, und berücksichtige die Hauptgleichung XV; so bleibt nur

$$\text{XXII)}\quad (\delta_1)^2 U =$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\left(\delta^2 y_\alpha + 2\cdot\left(\frac{d_m\delta y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_\alpha\cdot\vartheta m^2\right) -$$

Digitized by Google

$$- \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta^2 y_a + 2 \cdot \left(\frac{d_m \delta y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_a \cdot \vartheta m^2\right)$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Sind die Gränzbedingungen von der Art, dass die ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze ohneweiters hinwegfallen; so erkennt man gradezu, dass $_{(}\delta_{1)}^2 U$ unter allen Umständen positiv bleibt, dass also ein Minimum-stand stattfindet. Sind aber die Gränzbedingungen von der Art, dass die ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze nicht alle wegfallen; so gebe man (nach Bd. I. S. 284—289; auch S. 353) der Gleichung XXII folgende Form

$$\text{XXIII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}^2 U = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y_\alpha + \eta_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)} y_\alpha^2 - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y_a - \eta_a \cdot {}_{(}\delta_{1)} y_a^2$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{1)} y}{dx} + \pi(x) \cdot {}_{(}\delta_{1)} y\right)^2 \cdot dx$$

Hier hat man wieder die Abkürzungszeichen $_{(}\delta_{1)} y$, $\frac{d_{(}\delta_{1)} y}{dx}$ und $_{(}\delta_{1)}^2 y$ gesetzt, da ihre Bedeutung ohnehin bekannt genug ist. Wie man das ausserhalb des Integralzeichens stehende Aggregat zu behandeln hat, ist bereits (an den so eben citirten Stellen des ersten Bandes) theoretisch auseinandergesetzt, und (in der 158sten und andern Aufgaben) praktisch angewendet.

Aus Gleichung XIII folgt

$$\text{XXIV)}\qquad \vartheta m = - \frac{\int_a^\alpha \delta y \cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_m y}{dm} \cdot dx}$$

welcher Ausdruck für ϑm in XXII oder XXIII substituirt werden muss, wenn man ϑm unter dem Integralzeichen wegbringen will. Doch ist diese Elimination nicht grade nöthig, wie man aus den jetzt nachfolgenden Gränzfällen erkennen mag.

Erster Fall. Sind zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, durch welche die gesuchte Curve begränzt werden soll; so müssen auch alle andern in Betracht zu ziehenden nächstanliegenden Nachbarcurven durch diese zwei festen Punkte begränzt werden. Alle in Betracht zu ziehenden Curven haben also bei der Abscisse a eine Ordinate, deren Werth $= y_a = b$; ebenso haben alle in Betracht zu ziehenden Curven bei der Abscisse α eine Ordinate, deren Werth $= y_\alpha = \beta$. Desshalb bestehen zwischen den Gränzordinaten der gesuchten und aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende zwei Gleichungen:

$$1)\quad y_a = y_a + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)} y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 y_a + \ldots\ldots$$

$$2)\quad y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)} y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{2.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 y_\alpha + \ldots\ldots$$

Es muss also (nach §. 286) einzeln stattfinden $_{(}\delta_{1)} y_a = 0$, $_{(}\delta_{1)} y_\alpha = 0$, $_{(}\delta_{1)}^2 y_a = 0$, $_{(}\delta_{1)}^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung XVI oder XIX fällt also von selbst hinweg. Wenn man hier m statt $\frac{1}{L}$ setzt, so geht Gleichung XVIII über in

$$\text{XXV)}\quad (y - C)^2 + (x + m \cdot B)^2 = m^2$$

und diese Gleichung geht an den Gränzen über in

3) $(b - C)^2 + (a + m \cdot B)^2 = m^2$, und 4) $(\beta - C)^2 + (\alpha + m \cdot B)^2 = m^2$

Dadurch lassen sich B und C als Functionen von m bestimmen. Man bezeichne zur

Digitized by Google

Abkürzung die für B und C sich ergebenden Ausdrücke bezüglich mit $\xi(m)$ und $\zeta(m)$, so geht die Gleichung XXV (oder XVIII) über in

$$5)\quad (y - \zeta(m))^2 + (x + m \cdot \xi(m))^2 = m^2$$

Gleichung XXII reducirt sich jetzt auf

$$\text{XXVI)}\quad {}_{(}\delta_{1)}^2 U = \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx . dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

und wenn man ϑm mittelst XXIV eliminirt, so bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}^2 U = \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d_x d_m y}{dx . dm} \cdot \frac{\int_a^\alpha \delta y \cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_m y}{dm} \cdot dx}\right)^2 \cdot dx$$

Die für $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}$ und für $\frac{d_m y}{dm}$ sich ergebenden Ausdrücke müssen aus Gleichung 5 entnommen werden. An dem Ausdrucke XXVII erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet. Dasselbe erkennt man auch an dem Ausdrucke XXVI, so dass es nicht nöthig gewesen wäre, das ϑm unter dem Integralzeichen zu eliminiren.

Wenn noch vorgeschrieben ist, dass der in Rede stehende Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 haben soll; so wird sich aus der Gleichung

$$6)\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

der Werth des dritten Constanten m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ ergeben.

Zweiter Fall. Sollen wieder die Gränzpunkte (a, b) und (α, β) gegebene feste Punkte sein, ist dagegen der Werth des Inhaltes $\int_a^\alpha y \cdot dx$ nicht vorgeschrieben; so hat man auch nur die zwei Gleichungen 3 und 4, woraus sich abermals die Gleichung

$$7)\quad (y - \zeta(m))^2 + (x + m \cdot \xi(m))^2 = m^2$$

ergibt. Aus dieser Gleichung werden die Ausdrücke $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx . dm}$ entnommen. Allein der Constante m ist noch unbestimmt. Man kann also die Kreislinie noch einer dritten Bedingung unterwerfen. Eine solche wäre z. B. die, dass die Kreislinie noch durch einen dritten Punkt (h, k) gehen soll. Für diesen Punkt geht Gleichung 7 über in

$$8)\quad (k - \zeta(m))^2 + (h + m \cdot \xi(m))^2 = m^2$$

woraus sich der noch übrige Constante m bestimmen lässt. Für ${}_{(}\delta_{1)}^2 U$ bekommt man wieder die Ausdrücke XXVI und XXVII.

Dritter Fall. Ist wieder der Inhalt g^2 vorgeschrieben, und sind wohl für den Anfangspunkt aller in Betracht zu ziehenden Curven beide Coordinaten, dagegen für den Endpunkt nur die Abscisse bestimmt, aber die Ordinate unbestimmt; so ist nur ${}_{(}\delta_{1)} y_a = 0$, ${}_{(}\delta_{1)}^2 y_a = 0$, etc., dagegen ${}_{(}\delta_{1)} y_\alpha$, ${}_{(}\delta_{1)}^2 y_\alpha$, etc. sind alle willkürlich. Damit also die Gränzengleichung XVI (oder XIX) erfüllt wird, muss

$$9)\quad L \cdot \alpha + B = 0$$

sein. Daraus folgt $B = - L \cdot \alpha$; und wenn man wieder m statt $\frac{1}{L}$ setzt, so gehen die Gleichungen 3, 4 und 9 bezüglich über in

$$10)\ (b - C)^2 + (a - \alpha)^2 = m^2,\quad 11)\ (\beta - C)^2 = m^2,\quad 12)\ \alpha + mB = 0$$

Nun sind a, b und α gegeben. Die drei letzten Gleichungen reichen also hin, um β, B und C durch m auszudrücken. Aus 12 folgt $B = -\frac{\alpha}{m}$, und aus 10 folgt $C = b - \sqrt{m^2 - (a - \alpha)^2}$; und so geht Gleichung XXV (oder XVIII) über in

Digitized by Google

$$13)\quad (y - b + \sqrt{m^2 - (a - \alpha)^2})^2 + (x - \alpha)^2 = m^2$$

Da des Flächeninhaltes Werth g^2 gegeben ist, so hat man noch die Gleichung

$$14)\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

welche dazu dient, den noch übrigen Constanten m zu bestimmen.

Die für $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}$ sich ergebenden Ausdrücke muss man aus Gleichung 13 entnehmen, und hierauf in XXVII substituiren; so bekommt man das Prüfungsmittel. Dass aber diese Substitution nicht nöthig ist, ist schon im ersten Falle bemerkt.

Vierter Fall. Ist wieder der Inhalt g^2 gegeben, und wohl die zu den beiden Gränzpunkten gehörigen Abscissen a und α bestimmt, dagegen die entsprechenden Ordinaten $b = y_a$ und $\beta = y_\alpha$ ganz unbestimmt; so sind $(\delta_1)y_a$, $(\delta_1)y_\alpha$, $(\delta_1^2)y_a$, $(\delta_1^2)y_\alpha$, etc. alle willkürlich. Die Gränzengleichung XIX zerfällt also in folgende zwei:

$$15)\quad La + B = 0, \qquad 16)\quad L \cdot \alpha + B = 0$$

Diese beiden Gleichungen können aber nur nebeneinander bestehen, wenn gleichzeitig $L = 0$ und $B = 0$ ist. Dabei geht Gleichung XVIII über in

$$(y - C)^2 + \left(x + \frac{0}{0}\right)^2 = \frac{1}{0}$$

Die im Calcul unzulässige Form $\frac{1}{0}$ zeigt aber an, dass man für diesen Fall die Integration besonders vornehmen müsse. Man kehre daher zu XV zurück, und beachte, dass $L = 0$ ist; so bekommt man

$$17)\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XXVIII)}\quad y = E \cdot x + F$$

Die Gränzengleichung XVI geht nun über in

$$18)\quad \frac{E}{\sqrt{1 + E^2}} \cdot ((\delta_1)y_\alpha - (\delta_1)y_a) = 0$$

Diese Gleichung wird aber nur erfüllt, wenn $E = 0$ ist; und somit hat man jetzt nur

$$\text{XXIX)}\quad y = F$$

so dass man jetzt gezwungen ist, unter F denjenigen Constanten zu verstehen, welcher mit m bezeichnet werden soll. Man hat also jetzt

$$\text{XXX)}\quad y = m$$

d. h. die mit der Abscissenaxe parallele Grade, wie zu erwarten war. Da nun hier $\int_a^\alpha y \cdot dx = m \cdot (\alpha - a) = g^2$ ist, so folgt daraus $m = \frac{g^2}{\alpha - a}$. Die gesuchte Grade ist also jetzt

$$\text{XXXI)}\quad y = \frac{g^2}{\alpha - a}$$

und somit ist die Aufgabe vollkommen bestimmt. Aus $y = m$ folgt $\frac{d_m y}{dm} = 1$, und so geht XXIV über in

$$\text{XXXII)}\quad \vartheta m = -\frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$$

Aus $y = m$ folgt aber auch $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} = 0$; und so reducirt sich XXII auf

$$\text{XXXIII)}\quad (\delta_1^2)U = \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Digitized by Google

Fünfter Fall. Ist weder g^2 noch b noch β vorgeschrieben, so gibt sich wieder $y = F$, oder, was dasselbe ist, es gibt sich wieder $y = m$, wo aber m unbestimmt ist. Die gesuchte Linie ist also die in beliebiger Entfernung mit der Abscissenaxe parallele Grade, welche noch dadurch bestimmt werden kann, dass man irgend einen Punkt festsetzt, durch welchen sie gehen soll.

Sechster Fall. Ist wieder der Inhalt g^2 gegeben, und vorgeschrieben, dass der Unterschied der Gränzordinaten constant sein soll, so dass man die Gleichung

$$19) \quad y_\alpha - y_a = k$$

hat; so ist jetzt $(\delta_1)y_a = (\delta_1)y_\alpha$, $(\delta_1)^2y_a = (\delta_1)^2y_\alpha$, etc. Die Gleichung XIX geht daher jetzt über in $L \cdot (\alpha - a) \cdot (\delta_1)y_a = 0$, woraus abermals $L = 0$ folgen würde. Man hat also wieder die im Calcul unzulässige Form $\frac{1}{0}$, und muss zu Gleichung XV zurückkehren, welche sich abermals auf

$$\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

zurückzieht. Daraus folgt wieder

$$\text{XXXIV)} \quad y = Ex + F$$

Gleichung XVI geht sonach über in

$$\text{XXXV)} \quad \frac{E}{\sqrt{1 + E^2}} \cdot ((\delta_1)y_\alpha - (\delta_1)y_a) = 0$$

Weil aber $(\delta_1)y_a = (\delta_1)y_\alpha$, so fällt die Gränzengleichung von selbst hinweg. Gleichung XXXIV geht an den Gränzen über in

$$20) \quad b = E \cdot a + F, \qquad \text{und} \qquad 21) \quad \beta = E \cdot \alpha + F$$

Mit diesen beiden Gleichungen muss noch die Bedingsgleichung

$$y_\alpha - y_a = k$$

verbunden werden. Dadurch bekommt man

$$22) \quad E = \frac{k}{\alpha - a}, \quad 23) \quad b = \frac{k}{\alpha - a} \cdot a + F, \quad 24) \quad \beta = \frac{k}{\alpha - a} \cdot \alpha + F$$

Der Constante F hat also allein keine Bestimmung erlangen können; desshalb hat man hier keine Wahl, sondern man muss F für den Constanten nehmen, an dessen Stelle man auch m setzen kann. Gleichung XXXIV geht nun über in

$$\text{XXXVI)} \quad y = \frac{k}{\alpha - a} \cdot x + m$$

Der Constante m bestimmt sich durch den vorgeschriebenen Inhalt g^2, d. h. durch die Gleichung

$$\text{XXXVII)} \quad \int_a^\alpha \left(\frac{k}{\alpha - a} \cdot x + m\right) \cdot dx = g^2$$

Aus XXXVI folgt $\frac{d_m y}{dm} = 1$ und $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} = 0$; somit ist das Prüfungsmittel dasselbe, wie im vierten Falle.

Die Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Jakob Bernoulli war der erste, welcher derartige Aufgaben öffentlich vorgelegt, und zu deren Lösung die Mathematiker aufgefordert hat.

Auf diese Aufforderung hin versuchte Johann Bernoulli eine Auflösung, und schickte die betreffende Abhandlung versiegelt an die Akademie zu Paris, mit dem Auftrage, sie erst dann zu öffnen, wenn sein Bruder seine Auflösung bekannt gemacht haben würde. Dieses wurde in dem Journal des Savans von Febr. 1701 angezeigt.

Nun erschien Jakob Bernoulli's eigene Auflösung unter dem Titel „Analysis magni problematis isoperimetrici“, zuerst in Basel 1701, und dann noch einmal in den Act. erud. Lips. von demselben Jahre. Von dieser Auflösung ist zu bemerken, dass sie auf einem richtigen Principe beruht.

Erst in den Mémoires de l'Acad. Royale von 1706 erschien die vorhin besagte Auflö-

Digitized by Google

sung Johann Bernoulli's. Sie ist aber unrichtig, wie ihr Verfasser endlich selbst einsah; und desshalb gab er in denselben Mémoiren vom Jahre 1718 eine neue Auflösung heraus, welche dem Principe nach mit der seines Bruders ganz einerlei, und nur in einer einfacheren Form dargestellt ist.

Auch Taylor hat in seinem bekannten Werke „Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1715" eine Auflösung gegeben. Sie beruht aber ganz auf demselben Principe, wie die von Jacob Bernoulli.

Euler hat in seinem schon oft citirten Werke (methodus inveniendi, etc.) zur Auflösung derartiger Aufgaben eine Methode mitgetheilt, welche allgemein ist, und jederzeit zu richtigen Resultaten führt. Sie ist folgende: „Man multiplicire die Integrale, durch welche „die allen in Betracht zu ziehenden Curven gemeinschaftlichen Eigenschaften dargestellt „sind, mit (vorerst unbekannten und) constanten Factoren, addire diese Producte zu jenem „Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, und suche dann diejenige „Curve, bei welcher dieser zusammengesetzte Ausdruck grösser oder kleiner wird, als er „von allen andern nächstanliegenden Nachbarcurven gemacht werden kann". Diese Methode liefert, wie gesagt, jederzeit richtige Resultate; allein sie leidet an bedeutenden Gebrechen, wie im ersten theoretischen Nachtrage auseinandergesetzt werden wird.

Lagrange hat in seinem Werke „Leçons sur le Calcul des Fonctions. Lec. XXII. Nr. 380 et 381" eine andere Methode aufgestellt. Sie ist folgende: „Er verwandelt die Integrale, durch welche die allen in Betracht zu ziehenden Curven gemeinschaftlichen Eigenschaften dargestellt sind, in identische Gleichungen, und multiplicirt letztere mit (vorerst „unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Functionen. Dann addirt er diese Producte „unter das Integralzeichen jenes Ausdruckes, der ein Maximum oder Minimum werden soll, „etc. etc." Diese Methode liefert jederzeit die nemlichen Resultate, wie die vorhin erwähnte Euler'sche; sie leidet aber gleichfalls an bedeutenden Gebrechen, wie im ersten theoretischen Nachtrage näher auseinandergesetzt werden wird.

Ich konnte also für dergleichen Aufgaben weder die Euler'sche noch die Lagrange'sche Methode adoptiren, sondern musste eine neue aufstellen, welche in hiesiger Aufgabe bereits angewendet worden ist, und später immer angewendet werden wird. Man wird finden, dass sie allen Anforderungen genügt, und nichts zu wünschen übrig lässt.

Anfangs, als man dergleichen Aufgaben aufstellte, waren es nur solche, bei denen es darauf ankam, unter allen Curven, welche zwischen bestimmten Gränzen eine gleichgrosse Bogenlänge (Perimeter) haben, diejenige zu finden, die zwischen den nemlichen Gränzen den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst, oder den grössten oder kleinsten Rotationskörper erzeugt, etc. etc. Solche Aufgaben fordern also die Auffindung einer noch unbekannten Curve, die den gestellten Bedingungen genügt; und wegen der Bedingung der Gleichheit der Bogenlänge nannte man sie „isoperimetrische" Aufgaben. Die Auffindung einer Methode, dieselben aufzulösen, bildete das sogenannte isoperimetrische Problem.

Nachdem diese Benennungen in Gebrauch gekommen waren, vermehrten sich die verschiedenen Arten von Aufgaben, bei denen die Auffindung einer noch unbekannten Curve, welcher irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten zukommt, gefordert wird; und so kam es, dass man obigen Benennungen später eine ganz allgemeine und weit mehr, als ihr eigentlicher Wortsinn sagt, in sich fassende Bedeutung beilegte, d. h. dass man später unter isoperimetrischen Aufgaben alle diejenigen verstund, bei denen die Auffindung einer Curve gefordert wird, welcher irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten zukommt, es mögen noch Nebenbedingungen damit verbunden sein oder nicht. Die Auffindung einer, zur Lösung aller dieser Aufgaben geeigneten, allgemeinen Methode bildete dann das „isoperimetrische Problem im weitesten Sinne"; und wenn man den Titel des schon oft citirten Euler'schen Werkes vergleicht, so wird man sehen, dass daselbst die beiden Wortverbindungen „solutio problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti" und „methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes" als ganz gleichbedeutend gebraucht sind.

Aufgabe 215.

Man sucht zwischen den beiden durch die Gleichungen $f(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen ebenen Curven die kürzeste unter allen Linien, welche mit der Abscissenaxe und den rechtwinkeligen Gränzordinaten den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Flächeninhalt einschliessen.

Die hiesige Aufgabe verlangt also für y eine solche Function, und für a und α solche Werthe, dass dabei das bestimmte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2}\right) \cdot dx$$

Digitized by Google

ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, welche alle bei den für a und α zu suchenden Werthen dem bestimmten Integral

$$\text{II)} \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth beilegen. Wegen dieser Bedingung folgt aus II

$$\text{III)} \quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - y_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha {}_{(\delta_1)}y \cdot dx = 0$$

$$\text{IV)} \quad y_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - y_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2$$
$$+ 2 \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot {}_{(\delta_1)}y_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha {}_{(\delta_1)^2}y \cdot dx = 0$$

Die Bedeutung von ${}_{(\delta_1)}y$ und ${}_{(\delta_1)^2}y$ ist (aus den Gleichungen IV und V der vorigen Aufgabe) bereits bekannt.

Unterwirft man ebenso Gleichung I einer gemischten Mutation, und setzt dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man nach gehöriger Umformung

$$\text{V)} \quad {}_{((\delta_1))}U = u_\alpha \cdot \vartheta\alpha - u_a \cdot \vartheta a + \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot {}_{(\delta_1)}y \cdot dx$$

und

$$\text{VI)} \quad {}_{((\delta_1))^2}U = u_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)^2}y_\alpha + 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$
$$- u_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{du}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)^2}y_a - 2 \cdot \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)^2 - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot {}_{(\delta_1)^2}y\right] \cdot dx$$

Führt man für ${}_{(\delta_1)}y$ den Ausdruck ein, so gehen III und V über in

$$\text{VII)} \quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - y_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

und

$$\text{VIII)} \quad {}_{((\delta_1))}U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$
$$+ u_\alpha \cdot \vartheta\alpha - u_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

Um das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen zu eliminiren, multiplicire man Gleichung VII mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L; so ist auch dieses Product noch Null, und kann zu VIII addirt werden, ohne dass ${}_{((\delta_1))}U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{IX)} \quad {}_{((\delta_1))}U = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) + (L \cdot y_\alpha + u_\alpha) \cdot \vartheta\alpha$$
$$- \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) - (L \cdot y_a + u_a) \cdot \vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx$$

Digitized by Google

Damit nun das abhängige ϑm unter dem Integralzeichen auch wirklich wegfalle, lasse man folgende identische Gleichung

$$\text{X)}\quad L - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei wird auch der bei δy befindliche Factor zu Null; und so ist die Gleichung X auch zugleich Hauptgleichung, aus welcher, wie in voriger Aufgabe, die Urgleichung

$$\text{XI)}\quad (y - C)^2 + \left(x + \frac{B}{L}\right)^2 = \frac{1}{L^2}$$

folgt. Die Kreislinie mit dem Halbmesser $\frac{1}{L}$ genügt also der Aufgabe. Hier sind B, C, L drei noch willkürliche Constanten; und man erkennt, dass sich genau dieselbe Curve ergeben hat, wie in voriger Aufgabe, wo a und α unveränderlich waren.

Als Gränzengleichung hat man

$$\text{XII)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\left[\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m\right] + (L\cdot y_\alpha + u_\alpha)\cdot\vartheta\alpha$$
$$- \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\left[\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a\cdot\vartheta m\right] - (L\cdot y_a + u_a)\cdot\vartheta a = 0$$

Man ist nun auf dem Punkte, verschiedene Gränzbedingungen aufzustellen, wie dieses in der 161sten Aufgabe bereits geschehen ist.

Dadurch aber, dass den Gränzbedingungen genügt wird, bestimmen sich nur zwei der drei Constanten B, C, L; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat, dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Man multiplicire jetzt Gleichung IV mit dem bereits angewendeten Factor L, addire dieses Product zu VI, und beachte die identische Gleichung X; so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{XIII)}\quad {}_{(\delta_1)^2}U = (L\cdot y_\alpha + u_\alpha)\cdot\vartheta^2\alpha + \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_\alpha + L\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha\right]\cdot\vartheta\alpha^2 + \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot{}_{(\delta_1)^2}y_\alpha$$
$$- (L\cdot y_a + u_a)\cdot\vartheta^2 a - \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_a + L\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_a\right]\cdot\vartheta a^2 - \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot{}_{(\delta_1)^2}y_a$$
$$+ 2\cdot\left[\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_\alpha + L\cdot{}_{(\delta_1)}y_\alpha\right]\cdot\vartheta\alpha - 2\cdot\left[\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_a + L\cdot{}_{(\delta_1)}y_a\right]\cdot\vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{u^3}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx\,.\,dm}\cdot\vartheta m\right)^2\cdot dx$$

Specieller Gränzfall. Man sucht unter allen Linien, die den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Flächeninhalt einschliessen, aber von jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind, diejenige, welche zwischen den gegebenen Gränzcurven die kürzeste ist.

Da die gesuchte Linie die beiden Gränzcurven schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittspunkten die Gleichungen

$$1)\quad y_a = b,\qquad \text{und}\qquad 2)\quad y_\alpha = \beta$$

stattfinden; und es sind von jetzt an vier verschiedene Auflösungen möglich. (Man sehe S. 247 dieses zweiten Bandes.) Es soll aber nur die Auflösung durchgeführt werden, wo a und α die dem Werthe nach unabhängigen Elemente sind. Wenn man Gleichung 1 einer gemischten Mutation unterwirft, so gibt sich

$$3)\quad {}_{(\delta_1)}y_a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a = \frac{db}{da}\cdot\vartheta a$$

$$4)\quad {}_{(\delta_1)^2}y_a + 2\cdot\left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a + \left(\frac{dy}{dx}\right)_a\cdot\vartheta^2 a + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a\cdot\vartheta a^2 = \frac{db}{da}\cdot\vartheta^2 a + \frac{d^2b}{da^2}\cdot\vartheta a^2$$

Digitized by Google

Ganz gleichförmige Mutationsgleichungen ergeben sich, wenn man Gleichung 2 einer gemischten Mutation unterwirft. Sonach bekommt man

$$5)\quad (\delta_1)y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right)\cdot\vartheta a$$

$$6)\quad (\delta_1)y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right)\cdot\vartheta\alpha$$

$$7)\quad (\delta_1)^2y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right)\cdot\vartheta^2 a + \left(\frac{d^2b}{da^2} - q_a\right)\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot\left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a$$

$$8)\quad (\delta_1)^2y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right)\cdot\vartheta^2\alpha + \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - q_\alpha\right)\cdot\vartheta\alpha^2 - 2\cdot\left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha$$

etc. etc..

Die Bedeutung von $(\delta_1)y$ und $(\delta_1)^2y$ ist, wie schon einmal bemerkt, bereits (aus den Gleichungen IV und V der vorigen Aufgabe) bekannt.

Die totalen Differentialquotienten $\frac{db}{da}$ und $\frac{d^2b}{da^2}$ ergeben sich aus der Gleichung $f'(a, b) = 0$.

Die totalen Differentialquotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ ergeben sich aus der Gleichung $f''(\alpha, \beta) = 0$.

Die totalen Differentialquotienten $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ ergeben sich aus Gleichung XI.

Eliminirt man $(\delta_1)y_a$ und $(\delta_1)y_\alpha$ aus XII, so bekommt man

$$9)\quad \left[\frac{1}{u_\alpha}\cdot\left(1 + p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + L\cdot y_\alpha\right]\cdot\vartheta\alpha - \left[\frac{1}{u_a}\cdot\left(1 + p_a\cdot\frac{db}{da}\right) + L\cdot y_a\right]\cdot\vartheta a = 0$$

Weil aber ϑa und $\vartheta\alpha$ willkürlich und unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$10)\quad \frac{1}{\sqrt{1 + p_a^2}}\cdot\left(1 + p_a\cdot\frac{db}{da}\right) + L\cdot y_a = 0$$

$$11)\quad \frac{1}{\sqrt{1 + p_\alpha^2}}\cdot\left(1 + p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + L\cdot y_\alpha = 0$$

Gleichung XI geht an den Gränzen über in

$$12)\quad (b - C)^2 + \left(a + \frac{B}{L}\right)^2 = \frac{1}{L^2}$$

und

$$13)\quad (\beta - C)^2 + \left(\alpha + \frac{B}{L}\right)^2 = \frac{1}{L^2}$$

Wenn man aber den Halbmesser durch m anstatt durch $\frac{1}{L}$ darstellt, so gehen die letzten vier Gleichungen bezüglich über in

$$14)\quad \frac{1}{\sqrt{1 + p_a^2}}\cdot\left(1 + p_a\cdot\frac{db}{da}\right) + \frac{y_a}{m} = 0$$

$$15)\quad \frac{1}{\sqrt{1 + p_\alpha^2}}\cdot\left(1 + p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right) + \frac{y_\alpha}{m} = 0$$

$$16)\quad (b - C)^2 + (a + m\cdot B)^2 = m^2$$

und

$$17)\quad (\beta - C)^2 + (\alpha + m\cdot B)^2 = m^2$$

Die Gleichungen 14, 15, 16, 17, verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ reichen hin, die sechs Stücke a, α, b, β, B, C durch das siebente Stück m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ auszudrücken.

Digitized by Google

Wenn ferner der von der Kreislinie und den Gränzordinaten eingesch[illegible]ne Flächeninhalt den gegebenen Werth g^2 haben soll, so wird die Gleichung

$$18)\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

dazu dienen, auch noch das siebente Stück m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ zu bestimmen. Ist aber dieses Flächeninhaltes Werth nicht gegeben, sondern nur gesagt, dass er bei allen in Betracht zu ziehenden Curven der nemliche sein soll; so bleibt das siebente Stück m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ willkürlich, wenn die gesuchte Kreislinie ni[illegible]r weiteren Bedingung unterworfen wird, wie es im zweiten Falle der vorigen Aufgabe geschehen ist.

Man eliminire $(\delta_1)y_a$, $(\delta_1)y_\alpha$, $(\delta_1)^2y_a$, $(\delta_1)^2y_\alpha$ aus XIII, beachte, dass

$$\text{XIV)}\quad \frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

ist, und benütze die Gleichungen 14 und 15, welche mit den Gleichungen 10 und 11 gleichbedeutend sind; so reducirt und transformirt der Ausdruck XIII sich auf

$$\begin{aligned}\text{XV)}\quad ((\delta_1))^2U = &\left(\frac{p_\alpha}{\sqrt{1+p_\alpha^2}} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{1}{m} \cdot p_\alpha\right) \cdot \vartheta\alpha^2 \\ &- \left(\frac{p_a}{\sqrt{1+p_a^2}} \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{db}{da} - \frac{1}{m} \cdot p_a\right) \cdot \vartheta a^2 \\ &+ \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx\end{aligned}$$

Aus Gleichung VII folgt

$$19)\quad \vartheta m = -\frac{1}{\int_a^\alpha \frac{d_m y}{dm} \cdot dx} \cdot \left(y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - y_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)$$

Um aber die partiellen Differentialquotienten $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}$ herzustellen, muss man zuerst B und C durch m ausdrücken, wodurch die Gleichung der gesuchten Curve folgende Form

$$20)\quad (y - \zeta(m))^2 + (x + m \cdot \xi(m))^2 = m^2$$

annimmt. Dass es jedoch überflüssig ist, das noch zurückgebliebene ϑm aus XV zu eliminiren, braucht hier nicht mehr erwähnt zu werden.

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden, wie in der (bereits citirten) 161[sten] Aufgabe geschehen ist.

Schlussbemerkung. Aufgaben, wie die hiesige, sind sonst noch niemals gestellt und ausgeführt worden.

Wer sehen will, dass Lagrange, wenn er eine derartige Aufgabe gestellt, und mittelst seiner Methode aufgelöst hätte, zu dem nemlichen Resultate gelangt wäre; den verweise ich auf die fünfte Abtheilung des ersten theoretischen Nachtrages.

Aufgabe 216.

Welche Curve ist die kürzeste unter allen denen, die zwischen zwei zu den Coordinatenwinkeln a und α gehörigen Leitstrahlen den gleichen Flächeninhalt einschliessen?

Der Leitstrahl sei u; die Coordinatenwinkel sollen zwischen der Ordinatenaxe und dem Leitstrahle genommen, und durch den auf dem Halbmesser = 1 bezogenen Kreisbogen w gemessen werden. Die Aufgabe ist also: Es soll

Digitized by Google

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2}\right) \cdot dw$$

ein Minimum-stand werden, während die gesuchte Function u von w nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha u^2 \cdot dw$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Wegen dieser Bedingung geben sich (nach §. 265 und 267) aus II folgende Mutationsgleichungen

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha u \cdot \left(\delta u + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dw = 0$$

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha \left[u \cdot \left(\delta^2 u + 2 \cdot \frac{d_m \delta u}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 u}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) + \left(\delta u + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dw = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{du}{dw}$; so bekommt man

$$\text{V)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt{u^2 + p^2}} \left[u \cdot \left(\delta u + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right) + p \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} + \frac{d_w d_m u}{dw.dm} \cdot \vartheta m\right)\right] \cdot dw$$

und wenn man umformt, so gibt sich als zweite Form des ${}_{(\delta_1)}U$ folgender Ausdruck:

$$\text{VI)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta u_\alpha + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta u_a + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)\right] \cdot \left(\delta u + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dw$$

Um nun das abhängige ϑm wegzubringen, multiplicire man Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach w constanten Factor M, und addire dieses Product zu VI, so ist noch vollkommen genau

$$\text{VII)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta u_\alpha + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta u_a + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(Mu + \frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta u + \left(Mu + \frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)\right) \cdot \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dw$$

Damit nun das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man folgende identische Gleichung

$$\text{VIII)}\quad M \cdot u + \frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei wird auch der bei δu befindliche Factor zu Null; die Gleichung VIII ist also auch zugleich Hauptgleichung, und als Gränzengleichung hat man

$$\text{IX)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta u_\alpha + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta u_a + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) = 0$$

Multiplicirt man Gleichung VIII mit p, so gibt sich

Digitized by Google

$$\frac{u \cdot du}{\sqrt{u^2 + p^2}} - p \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) + M \cdot u \cdot du = 0$$

oder

$$d\sqrt{u^2 + p^2} - \frac{p \cdot dp}{\sqrt{u^2 + p^2}} - p \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) + Mu \cdot du = 0$$

oder

$$d\sqrt{u^2 + p^2} - d\left(p \times \frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) + Mu \cdot du = 0$$

Diese Gleichung kann man gradezu integriren; und es gibt sich

$$\sqrt{u^2 + p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot u^2 = A$$

oder

$$\text{X)} \quad \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot u^2 = A$$

Daraus folgt

$$\text{XI)} \quad p = \frac{u}{2A - M \cdot u^2} \cdot \sqrt{4 \cdot u^2 - (2A - M \cdot u^2)^2}$$

oder

$$\text{XII)} \quad dw = \frac{(2A - M \cdot u^2) \cdot du}{u \cdot \sqrt{4 \cdot u^2 - (2A - M \cdot u^2)^2}}$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad w + c = \frac{1}{2} \cdot \text{arc tg} \frac{(2A + M \cdot u^2) \cdot \sqrt{4 \cdot u^2 - (2A - M \cdot u^2)^2}}{4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4}$$

oder

$$\text{XIV)} \quad \text{tg}\,(2w + 2c) = \frac{(2A + M \cdot u^2) \cdot \sqrt{4 \cdot u^2 - (2A - M \cdot u^2)^2}}{4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4}$$

Dieses ist die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser $= \frac{1}{M}$; und A, c, M sind drei noch zu bestimmende Constanten.

Dass aber Gleichung XIV wirklich einem Kreise angehört, mag auf folgende Weise nachgewiesen werden:

Man setze $\frac{\sin(2w + 2c)}{\cos(2w + 2c)}$ statt tg $(2w + 2c)$, quadrire beiderseits, und entferne in der dadurch sich ergebenden Gleichung die zwei Nenner; so bekommt man

$$(4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4)^2 \cdot \sin(2w + 2c)^2 = [4u^4 \cdot (1 + 2A \cdot M)^2 - (4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4)^2] \cdot \cos(2w + 2c)^2$$

oder

$$(4 \cdot A^2 - 2u^2 + M^2 \cdot u^4)^2 \cdot (\sin(2w + 2c)^2 + \cos(2w + 2c)^2) = 4 \cdot u^4 \cdot (1 + 2A \cdot M)^2 \cdot \cos(2w + 2c)^2$$

Man substituire die Zahl 1 statt $(\sin(2w + 2c)^2 + \cos(2w + 2c)^2)$, und nehme beiderseits die Quadratwurzel; so giebt sich

$$\text{XV)} \quad 4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4 = 2 \cdot u^2 \cdot (1 + 2AM) \cdot \cos(2w + 2c)$$

Nun ist $\cos(2w + 2c) = -1 + 2 \cdot (\cos w \cdot \cos c - \sin w \cdot \sin c)^2$; und so geht Gleichung XV über in

$$\text{XVI)} \quad 4 \cdot A^2 - 2 \cdot u^2 + M^2 \cdot u^4 = -2u^2 - 4AM \cdot u^2 + 4 \cdot u^2 \cdot (1 + 2AM) \cdot (\cos w \cdot \cos c - \sin w \cdot \sin c)^2$$

oder, wenn man anderst ordnet

$$\text{XVII)} \quad (2A + Mu^2)^2 = 4 \cdot u^2 \cdot (1 + 2AM) \cdot (\cos w \cdot \cos c - \sin w \cdot \sin c)^2$$

oder

$$\text{XVIII)} \quad 2A + M \cdot u^2 = 2u \cdot (\sqrt{1 + 2AM}) \cdot (\cos w \cdot \cos c - \sin w \cdot \sin c)$$

oder

$$\text{XIX)} \quad 2 \cdot \frac{A}{M} + u^2 - 2u \cdot \frac{\sqrt{1 + 2AM}}{M} \cdot (\cos w \cdot \cos c - \sin w \cdot \sin c) = 0$$

Digitized by Google

Wenn man beiderseits $\frac{1}{M^2}$ addirt, so kann man letzterer Gleichung auch noch folgende Form geben

$$\text{XX)}\quad \left(u \cdot \cos w - \frac{\sqrt{1 + 2AM}}{M} \cdot \cos c\right)^2 + \left(u \cdot \sin w + \frac{\sqrt{1 + 2AM}}{M} \cdot \sin c\right)^2 = \frac{1}{M^2}$$

Weil die Coordinatenwinkel zwischen der Ordinatenaxe und den Leitstrahlen genommen werden; so kann man y statt $u \cdot \cos w$, und x statt $u \cdot \sin w$ setzen. Letztere Gleichung geht also über in

$$\text{XXI)}\quad \left(y - \frac{\sqrt{1 + 2AM}}{M} \cdot \cos c\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{1 + 2AM}}{M} \cdot \sin c\right)^2 = \frac{1}{M^2}$$

Dieses ist die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene Gleichung eines Kreises; und somit der gehörige Nachweis geliefert.

Man ist nun auf dem Punkte, verschiedene Gränzfälle aufzustellen, wie dieses in der 214ten Aufgabe geschehen ist.

Dadurch aber, dass den Gränzbedingungen genügt wird, bestimmen sich nur zwei der drei Constanten A, c, M; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat, dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, mutire man Gleichung V noch einmal; so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad \delta_1^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \left[\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(u \cdot \delta_1^2 u + p \cdot \frac{d\delta_1^2 u}{dw}\right) + \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(p \cdot \delta_1 u - u \cdot \frac{d\delta_1 u}{dw}\right)^2\right] \cdot dw$$

Ueber die Bedeutung von $\delta_1 u$, $\delta_1^2 u$, $\frac{d\delta_1 u}{dw}$, $\frac{d\delta_1^2 u}{dw}$ kann kein Zweifel herrschen, wenn man auf die Gleichungen III und IV dieser Aufgabe zurückschaut. Man multiplicire jetzt Gleichung IV mit dem bereits angewendeten Factor M; so ist auch dieses Product noch Null, und kann zu XXII addirt werden, ohne dass $\delta_1^2 U$ sich im Geringsten ändert. Man addire wirklich, forme um, und beachte die Hauptgleichung VIII; dann bleibt im Allgemeinen nur

$$\text{XXIII)}\quad \delta_1^2 U =$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta^2 u_\alpha + 2 \cdot \left(\frac{d_m \delta u}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 u}{dm^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta m^2\right)$$

$$- \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta^2 u_a + 2 \cdot \left(\frac{d_m \delta u}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_m u}{dm}\right)_a \cdot \vartheta^2 m + \left(\frac{d_m^2 u}{dm^2}\right)_a \cdot \vartheta m^2\right)$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(p \cdot \left(\delta u + \frac{d_m u}{dm} \cdot \vartheta m\right) - u \cdot \left(\frac{d\delta u}{dw} + \frac{d_x d_m u}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right)\right)^2 \cdot dw$$

Nun folgt aus Gleichung III, dass

$$\text{XXIV)}\quad \vartheta m = - \frac{\int_a^\alpha u \cdot \delta u \cdot dw}{\int_a^\alpha u \cdot \frac{d_m u}{dm} \cdot dw}$$

ist, welcher Ausdruck für ϑm substituirt werden muss, wenn man in Gleichung XXIII das unter dem Integralzeichen stehende ϑm eliminiren will. Doch ist, wie man schon in den Gränzfällen der 214ten Aufgabe gesehen hat, und auch in den folgenden Aufgaben noch öfters sehen wird, diese Substitution nicht nöthig; sondern man erkennt (nach Bd. I. S. 353) gradezu, dass $\delta_1^2 U$ unter allen Umständen positiv bleibt. Es findet also ein Minimum-stand statt.

Digitized by Google

Wenn solche Gränzbedingungen gestellt werden, dass es dabei erlaubt ist, m an die Stelle von $\frac{1}{M}$ zu substituiren; so gehen die Gleichungen XIV, XX und XXI bezüglich über in

$$\text{XXV)}\quad \operatorname{tg}(2w + 2c) = \frac{(2Am + u^2)\cdot\sqrt{4\cdot m^2\cdot u^2 - (2\cdot A\cdot m \text{[illegible]}}}{4\cdot A^2\cdot m^2 - 2\cdot m^2\cdot u^2 + u^4}$$

$$\text{XXVI)}\quad \left(u\cdot\cos w - (\sqrt{m^2 + 2Am})\cdot\cos c\right)^2 + \left(u\cdot\sin w + (\sqrt{m^2 + 2Am})\cdot\sin c\right)^2 = m^2$$

und

$$\text{XXVII)}\quad \left(y - (\sqrt{m^2 + 2Am})\cdot\cos c\right)^2 + \left(x + (\sqrt{m^2 + 2Am})\cdot\sin c\right)^2 = m^2$$

Aufgabe 217.

Man sucht unter allen gleichlangen Curven diejenige, welche zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst.

Die hiesige Aufgabe verlangt also: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha y\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2})\cdot dx$$

den nämlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Man mutire den Ausdruck II (wie in Aufgabe 214), und setze zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha \frac{p}{u}\cdot\left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{p}{u}\cdot\frac{d(\delta_1)^2y}{dx} + \frac{1}{u^3}\cdot\left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx = 0$$

Gibt man diesen beiden letzteren Gleichungen eine andere Form, so gehen sie bezüglich über in

$$\text{V)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot(\delta_1)y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot(\delta_1)y\cdot dx = 0$$

$$\text{VI)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)^2y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot(\delta_1)^2y_a + \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot(\delta_1)^2y + \frac{1}{u^3}\cdot\left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx = 0$$

Mutirt man ebenso Gleichung I, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad (\delta_1)U = \int_a^\alpha (\delta_1)y\cdot dx$$

$$\text{VIII)}\quad (\delta_1)^2U = \int_a^\alpha (\delta_1)^2y\cdot dx$$

Führt man nun für das Abkürzungszeichen $(\delta_1)y$ den Ausdruck ein, so gehen die Gleichungen V und VII bezüglich über in

Digitized by Google

$$\text{IX)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$
$$- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx = 0$$

$$\text{X)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

Um das abhängige ϑm wegzubringen, multiplicire man Gleichung IX mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L; so ist auch noch dieses Product Null. Man kann es daher zu X addiren, und es ist noch vollkommen genau

$$\text{XI)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx$$

Damit nun das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man folgende identische Gleichung

$$\text{XII)}\quad 1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei wird auch der bei δy befindliche Factor zu Null; die Gleichung XII ist also auch zugleich Hauptgleichung, und als Gränzengleichung hat man

$$\text{XIII)}\quad \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) = 0$$

Aus XII folgt zunächst $x + B = \frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$; daraus folgt weiter $\frac{dy}{dx} = \frac{x + B}{\sqrt{L^2 - (x + B)^2}}$, und sonach ist $y = C - \sqrt{L^2 - (x + B)^2}$, oder

$$\text{XIV)}\quad (y - C)^2 + (x + B)^2 = L^2$$

Die Kreislinie mit dem Halbmesser L genügt also der Aufgabe. Dass aber die Kreislinie genügt, ist längst aus der Elementargeometrie bekannt. Hier sind B, C, L drei noch zu bestimmende Constanten.

Die Gränzengleichung geht nun über in

$$\text{XV)}\quad (\alpha + B) \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) - (a + B) \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) = 0$$

Dadurch, dass dieser Gleichung genügt wird, bestimmen sich aber nur zwei der drei Constanten B, C, L; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat, dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen. Nähere Kenntniss dieses Verfahrens mag man aus den Gränzfällen entnehmen.

Man multiplicire Gleichung VI mit dem bereits angewendeten Factor L; so ist auch dieses Product noch Null, und kann zu VIII addirt werden, ohne dass ${}_{(\delta_1)^2}U$ sich im Geringsten ändert. Man addire wirklich, forme um, und beachte die Hauptgleichung XII; so bleibt nur

$$\text{XVI)}\quad {}_{(\delta_1)^2}U =$$
$$\left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)^2}y_\alpha - \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)^2}y_a + \int_a^\alpha \frac{L}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Hier hat man ausserhalb des Integralzeichens das Abkürzungszeichen ${}_{(\delta_1)^2}y$ gesetzt, da dessen Bedeutung ohnehin bekannt ist. Sind nun die Gränzbedingungen von der Art, dass alle ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze ohneweiters wegfallen, so bleibt nur

Digitized by Google

$$\text{XVII)} \quad (\delta_1)^2U = \int_a^\alpha \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm}\right)^2 \cdot dx$$

und an diesem Ausdrucke erkennt man, dass er positiv oder negativ ist, je nachdem L bezüglich positiv oder negativ ist.

Sind aber die Gränzbedingungen von der Art, dass die in Gleichung XVI ausserhalb des Integralzeichens befindlichen Theilsätze nicht alle wegfallen; so gebe man (nach Bd. I. S. 284—289; und S. 353) der Gleichung XVI folgende Form:

$$\text{XVIII)} \quad (\delta_1)^2U = \left(\frac{L\cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)^2y_\alpha + \eta_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha^2 - \left(\frac{L\cdot p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)^2y_a - \eta_a \cdot (\delta_1)y_a^2$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d(\delta_1)y}{dx} + \varkappa(x)\cdot(\delta_1)y\right)^2 \cdot dx$$

Hier hat man durchweg die Abkürzungszeichen $(\delta_1)y$, $\frac{d(\delta_1)y}{dx}$ und $(\delta_1)^2y$ gesetzt, weil ihre Bedeutung ohnehin bekannt genug ist. Wie man das ausserhalb des Integralzeichens stehende Aggregat zu behandeln hat, ist bereits (an den so eben citirten Stellen des ersten Bandes) theoretisch auseinandergesetzt, und (in der 158sten und andern Aufgaben) praktisch angewendet. Somit gelangt man abermals zu der Erkenntniss, dass $(\delta_1)^2U$ positiv oder negativ, je nachdem L positiv oder negativ ist.

Diese Erscheinung hangt aber mit folgendem Umstande zusammen: Es kann ein Kreisbogen, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Weise zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. entweder concav oder convex gegen die Abscissenaxe. Im ersten Falle ist der Flächeninhalt ein Maximum-stand, im zweiten ist er ein Minimumstand.

Erster Fall. Sind zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben, von welchen alle in Betracht zu ziehenden Curven begränzt werden sollen; so muss (wie im ersten Falle der 214ten Aufgabe) einzeln stattfinden $(\delta_1)y_a = 0$, $(\delta_1)y_\alpha = 0$, $(\delta_1)^2y_a = 0$, $(\delta_1)^2y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung XV fällt also von selbst hinweg; und wenn man hier geradezu m statt L setzt, so geht Gleichung XIV über in

$$\text{XIX)} \quad (y - C)^2 + (x + B)^2 = m^2$$

Diese Gleichung geht an den Gränzen über in

$$1)\ (b - C)^2 + (a + B)^2 = m^2, \quad \text{und} \quad 2)\ (\beta - C)^2 + (\alpha + B)^2 = m^2$$

Dadurch lassen sich B und C als Functionen vom m bestimmen; und wenn man zur Abkürzung die für B und C sich ergebenden Functionen bezüglich mit $\xi(m)$ und $\zeta(m)$ bezeichnet, so geht Gleichung XVII über in

$$3)\ (y - \zeta(m))^2 + (x + \xi(m))^2 = m^2$$

Gleichung XVI reducirt sich jetzt auf

$$\text{XX)} \quad (\delta_1)^2U = \int_a^\alpha \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm}\cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Weil hier in diesem Gränzfalle $(\delta_1)y_a = 0$, $(\delta_1)y_\alpha = 0$, etc. ist; so reducirt sich Gleichung V auf $\int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot(\delta_1)y \cdot dx = 0$, oder, was dasselbe ist, auf

$$\text{XXI)} \quad \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

Nun folgt aus XII, dass $\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{L}$ ist; und so geht Gleichung XXI über in

$$\text{XXII)} \quad \frac{1}{L}\cdot\int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx = 0$$

Digitized by Google

und daraus folgt

$$\text{XXIII)}\quad \vartheta m = -\frac{\int_a^\alpha \delta y \cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_m y}{dm} \cdot dx}$$

Die für $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}$ sich ergebenden Ausdrücke müssen aus Gleichung 3 entnommen, und dann können in XX die gehörigen Substitutionen angebracht werden. Diese Substitutionen sind aber, wie schon oft bemerkt, rein überflüssig.

Wenn noch vorgeschrieben ist, dass die in Rede stehende Bogenlänge den bestimmten Werth g haben soll; so wird sich aus der Gleichung

$$4)\quad \int_a^\alpha \frac{m \cdot dx}{\sqrt{m^2 - (x + \xi(m))^2}} = g$$

der Werth des dritten Constanten m (oder L) ergeben.

Zweiter Fall. Sollen wieder die Gränzpunkte (a, b) und (α, β) gegebene feste Punkte sein, ist dagegen der Werth der Bogenlänge $\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}).dx$ nicht vorgeschrieben; so hat man auch nur die zwei Gleichungen 1 und 2, woraus sich abermals die Gleichung

$$4)\quad (y - \zeta(m))^2 + (x + \xi(m))^2 = m^2$$

ergibt. Aus dieser Gleichung werden dann die Ausdrücke $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx.dm}$ entnommen. Allein der Constante m ist noch unbestimmt. Man kann also die Kreislinie noch einer dritten Bedingung unterwerfen. Eine solche wäre z. B. die, dass die Kreislinie noch durch einen dritten Punkt (h, k) gehen soll. Für diesen Punkt geht Gleichung 4 über in

$$5)\quad (k - \zeta(m))^2 + (h + \xi(m))^2 = m^2$$

woraus sich der Constante m bestimmen lässt. Für $(\delta_1)^2 U$ bekommt man wieder den Ausdruck XX.

Dritter Fall. Ist nur der Anfangspunkt (a, b) und die Bogenlänge g gegeben; so ist $(\delta_1) y_a = 0$, $(\delta_1)^2 y_a = 0$, etc., dagegen $(\delta_1) y_\alpha$, $(\delta_1)^2 y_\alpha$, etc. sind willkürlich. Damit also die Gränzengleichung XV erfüllt wird, muss

$$6)\quad \alpha + B = 0$$

sein. Daraus folgt $B = -\alpha$; und Gleichung XIX geht an den Gränzen über in

$$7)\quad (b - C)^2 + (a - \alpha)^2 = m^2, \quad\text{und}\quad 8)\quad (\beta - C)^2 = m^2$$

Nun sind a, b und α gegeben. Die drei letzten Gleichungen reichen also hin, um β, B und C durch m auszudrücken. Aus 7 folgt $C = b - \sqrt{m^2 - (a - \alpha)^2}$, und somit geht Gleichung XIX (oder XIV) über in

$$9)\quad \left(y - b + \sqrt{m^2 - (a - \alpha)^2}\right)^2 + (x - \alpha)^2 = m^2$$

Gleichung XVI reducirt sich jetzt wieder auf

$$\text{XXIV)}\quad (\delta_1)^2 U = \int_a^\alpha \frac{L}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Weil hier in diesem Gränzfalle $(\delta_1) y_a = 0$, $(\delta_1)^2 y_a = 0$, etc. ist; so reducirt sich Gleichung V zunächst auf

$$10)\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_1) y_\alpha - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot (\delta_1) y \cdot dx = 0$$

Nun folgt aus XII, dass $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = \frac{1}{L}$ ist. Ferner ist $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{x + B}{L}$.

Gleichung 10 geht also über in

Digitized by Google

$$11)\quad \frac{\alpha + B}{L} \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha - \frac{1}{L} \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

Nun ist (nach Gleichung 6) auch $\alpha + B = 0$, und so folgt aus Gleichung 11 wieder

$$XXV)\quad \vartheta m = -\frac{\int_a^\alpha \delta y \cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_m y}{dm} \cdot dx}$$

Die für $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}$ sich ergebenden Ausdrücke müssen aus Gleichung 8 entnommen, und hierauf in die Gleichungen XXIV und XXV substituirt werden, wenn man ϑm eliminiren will.

Da der Werth g der Bogenlänge gegeben ist, so hat man noch die Gleichung

$$12)\quad \int_a^\alpha \frac{m \cdot dx}{\sqrt{m^2 - (x - \alpha)^2}} = g$$

welche dazu dient, den noch übrigen Constanten m zu bestimmen.

Vierter Fall. Wenn die beiden Gränzpunkte (a, b) und (α, β) gleichzeitig unbestimmt sind; so zerfällt die Gränzengleichung XV in folgende zwei

$$13)\quad a + B = 0, \qquad \text{und} \qquad 14)\quad \alpha + B = 0$$

Beide Gleichungen widersprechen einander, so dass dieser vierte Fall unmöglich ist, es mögen die übrigen Bedingungen sein, welche sie wollen. (Man vergleiche in der 214ten Aufgabe den vierten Fall, welcher bei ganz gleichen Gränzbedingungen dennoch möglich war.)

Die Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist eine von den isoperimetrischen im engern Sinne des Wortes. (Man vergl. die Schlussb. zur 214ten Aufgabe.)

Sie kommt schon vor in Eulers Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 192). Auch wurde sie später von fast allen Schriftstellern, welche über den (sogenannten) Variationscalcul schrieben, aufgenommen, aber überall sehr mangelhaft behandelt.

Unter den von mir gemachten Beiträgen beachte man besonders:

1) die verschiedenen Gränzfälle.
2) die Herstellung des jedesmal für ${}_{(\delta_1)}{}^2U$ sich ergebenden Ausdruckes.

Aufgabe 218.

Man sucht zwischen den beiden durch die Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen Gränzcurven unter allen gleichlangen Linien diejenige heraus, welche mit den rechtwinkeligen Gränzordinaten und mit der Abscissenaxe den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst.

Diese Aufgabe verlangt für y eine solche Function und für a und α solche Werthe, dass dabei das bestimmte Integral

$$I)\quad U = \int_a^\alpha y \cdot dx$$

der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimumstandes wird, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, welche alle bei den für a und α gesuchten Werthen folgendem bestimmten Integral

$$II)\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth beilegen. Wegen dieser Bedingung folgt aus II

Digitized by Google

$$-\left(\sqrt{1+p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \left(\sqrt{1+p^2}\right)_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right) \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Wenn man umformt, und zur Abkürzung u anstatt $\sqrt{1+p^2}$ setzt; so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)y_a + u_\alpha \cdot \vartheta\alpha - u_a \cdot \vartheta a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot (\delta_1)y \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Die Bedeutung von $(\delta_1)y$, $(\delta_1)y_a$, $(\delta_1)y_\alpha$, etc. ist (aus Nr. II der Einleitung zur 214[ten] Aufgabe) bekannt.

Aus I aber folgt

$$\text{V)} \quad ((\delta_1))U = y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - y_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha (\delta_1)y \cdot dx$$

etc. etc.

Die Bedeutung von $((\delta_1))U$ ist (aus Nr. VI der Einleitung zur 214[ten] Aufg.) bekannt.

Um das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen zu eliminiren, multiplicire man Gleichung IV mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L; so ist auch dieses Product noch Null, und kann zu V addirt werden, ohne dass $((\delta_1))U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\begin{aligned}\text{VI)} \quad ((\delta_1))U = &\left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right) + (y_\alpha + L \cdot u_\alpha) \cdot \vartheta\alpha \\ &- \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) - (y_a + L \cdot u_a) \cdot \vartheta a \\ &+ \int_a^\alpha \left[\left(1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Damit das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man folgende identische Gleichung

$$\text{VII)} \quad 1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei wird auch der zu δy gehörige Factor zu Null. Die Gleichung VII ist also auch Hauptgleichung, und man erkennt, dass sich dieselbe Function ergibt, wie wenn a und α unveränderlich sind. Als Gränzengleichung hat man

$$\begin{aligned}\text{VIII)} \quad &\left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_\alpha \cdot \left[\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right] + (y_\alpha + L \cdot u_\alpha) \cdot \vartheta\alpha \\ &- \left(\frac{L \cdot p}{u}\right)_a \cdot \left[\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right] - (y_a + L \cdot u_a) \cdot \vartheta a = 0\end{aligned}$$

Aus VII folgt $\dfrac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = x + B$, und daraus folgt weiter

$$\text{IX)} \quad (y - C)^2 + (x + B)^2 = L^2$$

Die Kreislinie mit dem Halbmesser L genügt also der Aufgabe. Hier sind B, C, L drei noch zu bestimmende Constanten.

Man ist nun auf dem Punkte, verschiedene Gränzbedingungen aufzustellen, wie dieses bereits in der 161[sten] Aufgabe geschehen ist.

Dadurch aber, dass den Gränzbedingungen genügt wird, bestimmen sich nur zwei der Constanten B, C, L; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat; dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Specieller Gränzfall. Man sucht unter allen Linien, welche die nemliche Länge haben, aber von jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind, diejenige, die zwischen den gegebenen Gränzcurven den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst.

Digitized by Google

Verfahrt man, wie im Gränzfalle der 215ten Aufgabe; so geht jetzt [illegible] VIII über in

$$\left[\frac{L}{u_\alpha}\cdot\left(1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+y_\alpha\right]\cdot\vartheta\alpha-\left[\frac{L}{u_a}\cdot\left(1+p_a\cdot\frac{db}{da}\right)+y_a\right]\cdot\vartheta a=0$$

Weil aber ϑa und $\vartheta\alpha$ willkürlich und unabhängig sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei

$$1)\quad \frac{L}{\sqrt{1+p_a^2}}\cdot\left(1+p_a\cdot\frac{db}{da}\right)+y_a=0$$

und

$$2)\quad \frac{L}{\sqrt{1+p_\alpha^2}}\cdot\left(1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+y_\alpha=0$$

oder, wenn man Alles mit L dividirt

$$3)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_a^2}}\cdot\left(1+p_a\cdot\frac{db}{da}\right)+\frac{y_a}{L}=0$$

$$4)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_\alpha^2}}\cdot\left(1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+\frac{y_\alpha}{L}=0$$

Die zwei letzten Gleichungen sind mit den Gleichungen 14 und 15 der 215ten Aufgabe ganz gleichbedeutend.

Gleichung IX geht an den Gränzen über in

$$5)\quad (b-C)^2+(a+B)^2=L^2$$

und

$$6)\quad (\beta-C)^2+(\alpha+B)^2=L^2$$

Wenn man aber den Halbmesser durch m anstatt durch L darstellt, so gehen letztere vier Gleichungen bezüglich über in

$$7)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_a^2}}\cdot\left(1+p_a\cdot\frac{db}{da}\right)+\frac{y_a}{m}=0$$

$$8)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_\alpha^2}}\cdot\left(1+p_\alpha\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}\right)+\frac{y_\alpha}{m}=0$$

$$9)\quad (b-C)^2+(a+B)^2=m^2$$

und

$$10)\quad (\beta-C)^2+(\alpha+B)^2=m^2$$

Die Gleichungen 7, 8, 9, 10, verbunden mit $f'(a, b)=0$ und $f''(\alpha, \beta)=0$, reichen hin, die sechs Stücke $a, b, \alpha, \beta, B, C$ durch das siebente Stück m (oder L) auszudrücken.

Wenn ferner die den gesuchten Abscissen a und α entsprechende Bogenlänge den gegebenen Werth g haben soll, so wird die Gleichung

$$11)\quad \int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx=g$$

dazu dienen, auch noch das siebente Stück m (oder L) zu bestimmen. Ist aber der Werth der besagten Bogenlänge nicht vorgeschrieben, sondern nur gesagt, dass er bei allen in Betracht zu ziehenden Curven der nemliche sein soll; so bleibt das siebente Stück m (oder L) willkürlich, wenn die gesuchte Kreislinie nicht einer weiteren Bedingung unterworfen wird, wie dieses im zweiten Falle der vorigen Aufgabe geschehen ist.

In dem hier gestellten Gränzfalle bekommt man für das Prüfungsmittel folgenden Ausdruck

Digitized by Google

$$X)\quad (\delta_1)^2U = \left(\frac{L \cdot p_\alpha}{\sqrt{1+p_\alpha^2}} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + 2 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta\alpha^2$$

$$- \left(\frac{L \cdot p_a}{\sqrt{1+p_a^2}} \cdot \frac{d^2b}{da^2} + 2 \cdot \frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta a^2$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx . dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Das abhängige Element ϑm wird, je nach den verschiedenen Gränzbedingungen, auch auf verschiedene Weise bestimmt. Hier in diesem Gränzfalle geschieht es auf folgende Weise: Man führe in Gleichung IV für das unter dem Integralzeichen stehende Abkürzungszeichen $(\delta_1)y$ seinen Ausdruck ein, so bekommt man

$$\left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)y_a + u_\alpha \cdot \vartheta\alpha - u_a \cdot \vartheta a$$

$$- \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx - \left(\int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m = 0$$

Aus dieser Gleichung eliminire man $(\delta_1)y_\alpha$ und $(\delta_1)y_a$, so gibt sich

$$\vartheta m = \frac{1}{\int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \frac{d_m y}{dm} \cdot dx} \left[\frac{1}{u_\alpha}\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot p_\alpha\right) \cdot \vartheta\alpha - \frac{1}{u_a}\left(1 + \frac{db}{da} \cdot p_a\right) \cdot \vartheta a\right.$$

$$\left. - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx\right].$$

Um aber die partiellen Differentialquotienten $\frac{d_m y}{dm}$ und $\frac{d_x d_m y}{dx . dm}$ herzustellen, muss man zuerst B und C durch m ausdrücken, wodurch die Gleichung der gesuchten Kreislinie folgende Form

$$(y - \zeta(m))^2 + (x + \xi(m))^2 = m^2$$

annimmt.

Dass es jedoch überflüssig ist, das noch zurückgebliebene ϑm aus X zu eliminiren braucht hier nicht mehr erwähnt zu werden; denn man erkennt an X gradezu Folgendes:

1) Ist L positiv, d. h. wendet die Kreislinie ihre convexe Seite gegen die Abscissenaxe, so ist der gefundene Flächeninhalt ein Minimum-stand; und wenn das mit den Differenzcoefficienten $\vartheta\alpha^2$ und ϑa^2 versehene Aggregat gleichfalls positiv ist, so hat der Minimum-stand auch einen Minimumwerth.

2) Ist L negativ, d. h. wendet die Kreislinie ihre concave Seite gegen die Abscissenaxe, so ist der gefundene Flächeninhalt ein Maximum-stand; und wenn das mit den Differenzcoefficienten $\vartheta\alpha^2$ und ϑa^2 versehene Aggregat gleichfalls negativ ist, so hat der Maximum-stand auch einen Maximumwerth.

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden, wie in der (bereits citirten) 161sten Aufgabe geschehen ist.

Schlussbemerkung. Aufgaben, wie die hiesige, sind sonst noch niemals gestellt und ausgeführt worden.

Wer sehen will, dass Lagrange, wenn er eine derartige Aufgabe gestellt, und mittelst seiner Methode aufgelöst hätte, zu dem nemlichen Resultate gelangt wäre; den verweise ich auf die fünfte Abtheilung des ersten theoretischen Nachtrages.

Aufgabe 219.

Unter allen Curven von gleicher Länge sucht man die, welche zwischen den zwei zu den Coordinatenwinkeln a und α gehörigen Leitstrahlen den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst.

Digitized by Google

Nach der Einleitung zur 216ten Aufgabe soll jetzt

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot \int_{a}^{\alpha} u^2 \cdot dw$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die gesuchte Function u von w nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_{a}^{\alpha} \left(\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{dw}\right)^2} \right) \cdot dw$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Wegen dieser Bedingung folgt aus letzterem Ausdrucke, wenn man noch p statt $\frac{du}{dw}$ setzt

$$\text{III)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_{\alpha} \cdot (\delta_1 u_{\alpha} - \left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_{a} \cdot (\delta_1 u_a$$
$$+ \int_{a}^{\alpha} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) \right) \cdot (\delta_1 u \cdot dw = 0$$

etc. etc.

und aus Gleichung I folgt

$$\text{IV)}\quad (\delta_1 U = \int_{a}^{\alpha} u \cdot (\delta_1 u \cdot dw$$

etc. etc.

Um das abhängige ϑm wegzubringen, multiplicire man Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach w constanten Factor M, und addire dieses Product zu IV; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad (\delta_1 U = \left(\frac{M \cdot p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_{\alpha} \cdot (\delta_1 u_{\alpha} - \left(\frac{M \cdot p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right)_{a} \cdot (\delta_1 u_a$$
$$+ \int_{a}^{\alpha} \left(u + \frac{M \cdot u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{M \cdot p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) \right) \cdot (\delta_1 u \cdot dw$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VI)}\quad u + \frac{M \cdot u}{\sqrt{u^2 + p^2}} - \frac{1}{dw} \cdot d\left(\frac{M \cdot p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $p = \frac{du}{dw}$, so bekommt man

$$u \cdot du + \frac{M \cdot u \cdot du}{\sqrt{u^2 + p^2}} - p \cdot d\left(\frac{M \cdot p}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

oder

$$u \cdot du + M \cdot d\sqrt{u^2 + p^2} - \frac{Mp \cdot dp}{\sqrt{u^2 + p^2}} - p \cdot d\left(\frac{Mp}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

oder

$$u \cdot du + M \cdot d\sqrt{u^2 + p^2} - d\left(p \times \frac{Mp}{\sqrt{u^2 + p^2}}\right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und man bekommt

$$\frac{1}{2} \cdot u^2 + M \cdot \sqrt{u^2 + p^2} - \frac{M \cdot p^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} = F$$

oder

$$\text{VII)}\quad \frac{1}{2} \cdot u^2 + \frac{M \cdot u^2}{\sqrt{u^2 + p^2}} = F$$

Daraus folgt

$$\text{VIII)}\quad dw = \frac{(2F - u^2) \cdot du}{u \cdot \sqrt{4M^2 \cdot u^2 - (2F - u^2)^2}}$$

Digitized by Google

Integrirt man diese Gleichung, so gibt sich

$$\text{IX)}\quad tg(2w + 2c) = \frac{(2F + u^2)\cdot\sqrt{4\cdot M^2\cdot u^2 - [\text{illegible}] - u^2)^2}}{4F^2 - 2\cdot M^2\cdot u^2 + u^4}$$

Dieses ist die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser = M, und c, F, M sind drei noch zu bestimmende Constanten.

Dass aber Gleichung IX wirklich einem Kreise angehört, mag dadurch nachgewiesen werden, dass man ihr (nach dem Vorgange der 216ten Aufgabe) folgende Form gibt

$$\text{X)}\quad \left(u\cdot\cos w - \left(\sqrt{M^2 + 2F}\right)\cdot\cos c\right)^2 + \left(u\cdot\sin w + \left(\sqrt{M^2 + 2F}\right)\cdot\sin c\right)^2 = M^2$$

Weil die Coordinatenwinkel zwischen der Ordinatenaxe und den Leitstrahlen genommen werden; so kann man y statt u . cos w, und x statt u . sin w setzen. Letztere Gleichung geht also über in

$$\text{XI)}\quad \left(y - \left(\sqrt{M^2 + 2F}\right)\cdot\cos c\right)^2 + \left(x + \left(\sqrt{M^2 + 2F}\right)\cdot\sin c\right)^2 = M^2$$

Nun ist man auf dem Punkte, verschiedene Gränzfälle aufzustellen, wie dieses in früheren Aufgaben geschehen ist.

Dadurch aber, dass den Gränzbedingungen genügt wird, bestimmen sich nur zwei der drei Constanten c, F, M; und wenn man wirklich zwei derselben bestimmt, d. h. durch den dritten ausgedrückt hat, dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht keine Schwierigkeit entgegen; und dann wird man erkennen, dass der Kreisbogen den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst, je nachdem er seine hohle oder erhabene Seite dem Coordinatenpol zuwendet.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist eine von den isoperimetrischen im engeren Sinne des Wortes. (Man vergleiche Schlussb. zur 214ten Aufgabe.)

Sie kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi etc. Seite 193 und [illegible]). Daselbst ist sie aber nur bis zu der hier mit VII bezeichneten Gleichung fortgesetzt; und anstatt die Urgleichung herzustellen, stellt Euler mit seiner Differentialgleichung der ersten Ordnung eine geometrische Betrachtung an, aus welcher allerdings [illegible] hervor[illegible], dass die gesuchte Curve die Kreislinie sei. Ganz das Nemliche thut er Seite 137, 156 und [illegible] desselben Werkes.

Poisson hat eine Abhandlung über Variationscalcul geschrieben, welche sich in dem (im Jahre 1833 gedruckten) XIIten Bande der Pariser Memoiren befindet, und eigentlich den Zweck hat, die Untersuchungen, wo Doppelintegrale mutirt werden, zu vervollständigen. In dieser Abhandlung spricht er zugleich Einiges über Untersuchungen, wo einfache Integrale mutirt werden; und bei dieser Gelegenheit legt er (Seite 282 des besagten XIIten Bandes) auch die hiesige Aufgabe vor, und zwar auf folgende Weise:

„Man sucht r als solche Function von ϑ, dass das bestimmte Integral

$$\text{XII)}\quad U = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi} r^2\cdot d\vartheta$$

„ein Maximum wird, während das zwischen denselben Gränzen erstreckte Integral $\int_0^{2\pi}\sqrt{dr^2 + r^2\cdot d\vartheta^2}$ einen gegebenen Werth l hat, d. h. während noch die Bedingungs-„gleichung

$$\text{XIII)}\quad \int_0^{2\pi}\sqrt{dr^2 + r^2\cdot d\vartheta^2} = l$$

„stattfindet.

Was ich mit u und w bezeichne, bezeichnet Poisson bezüglich mit r und ϑ; und indem er die Euler'sche Methode (man sehe den ersten theoretischen Nachtrag am Ende dieses Bandes) anwendet, multiplicirt er das zweite bestimmte Integral mit einem constanten Factor a, und setzt

$$\text{XIV)}\quad U = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot r^2 + a\cdot\sqrt{\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2}\right)\cdot d\vartheta$$

Nun mutirt er, und integrirt die Hauptgleichung. Dadurch bekommt er

$$\text{XV)}\quad d\vartheta = \frac{(r^2 - 2c)\cdot dr}{r\cdot\sqrt{4a^2\cdot r^2 - (r^2 - 2c)^2}}$$

wo c der durch die erste Integration eingegangene Constante ist.

Digitized by Google

(Wenn man bei meiner mit VIII bezeichneten Gleichung dem doppelten Wurzelzeichen seine negative Bedeutung beilegt, so geht sie gradezu in die Gleichung XV über.)

Jetzt transformirt Poisson seine Gleichung, indem er

$$4(a^2 + c^2) = h^2 + k^2, \text{ und } 2c = -h \cdot k$$

setzt. Dadurch geht XV über in

$$\text{XVI)} \quad d\vartheta = \frac{-(r^2 + h \cdot k) \cdot dr}{r \cdot \sqrt{(h^2 - r^2) \cdot (r^2 - k^2)}}$$

Daraus stellt er endlich folgende Urgleichung her

$$\text{XVII)} \quad r^2 - (h - k) \cdot r \cdot \cos\vartheta + \frac{1}{4} \cdot (h - k)^2 = \frac{1}{4} \cdot (h + k)^2 \quad .$$

Man erkennt, dass diese Gleichung einem Kreise angehört, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2} \cdot (h + k)$.

Diese von Poisson hergestellte Urgleichung hat aber nur die beiden Constanten h und k, hat also nicht die Eigenschaft, dass sie der Gränzengleichung und der Bedingungsgleichung XIII zugleich genügen kann; denn dazu sind drei Constanten nöthig, weil bekanntlich bei Erfüllung der Gränzengleichung allein schon zwei Constanten aufgebraucht werden.

Die von mir auf directem Wege und ohne Substitution hergestellte Urgleichung X leidet nicht an diesem Gebrechen, sondern ist vollständig, indem sie mit drei Constanten c, F, M versehen ist.

Aufgabe 220.

Unter allen ebenen Curven, welche zwischen den (zu x = a und x = α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten einerlei Länge haben, sucht man die, die bei der Rotation um die Abscissenaxe die grösste oder kleinste Oberfläche erzeugt.

Die hiesige Aufgabe verlangt, dass die von der gesuchten Curve erzeugte Fläche durch eine Function der Abscisse ausgedrückt, und hierauf von x = a bis x = α erstreckt werde. Da nun die Differenz (α — a) positiv ist, so muss (wie aus der Theorie der Complanation bekannt) die erste Ableitung der Fläche bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x positiv sein. Man kennt aber die gesuchte Curve noch nicht; desshalb weiss man auch noch nicht, ob y bei den zwischen a und α liegenden Werthen des x positiv ist. Man ist also auch nicht befugt, für die erste Ableitung der Fläche den eindeutigen Ausdruck $2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + p^2}$ zu nehmen; sondern man ist gezwungen, vorläufig den zweideutigen Ausdruck $2\pi \cdot y \cdot \mathcal{W}\overline{1 + p^2}$ zu nehmen, und wenn man die gesuchte Curve gefunden hat, dann wird man dem Radical diejenige Bedeutung beilegen, bei welcher die erste Ableitung der Fläche für jeden zwischen a und α liegenden Werth des x positiv wird. Die Aufgabe ist also: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot y \cdot (\mathcal{W}\overline{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Aus I folgt

$$\text{III)} \quad {}_{(}\delta_{1)}U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot (\mathcal{W}\overline{1 + p^2}) \cdot {}_{(}\delta_{1)}y + \frac{2\pi \cdot y \cdot p}{\mathcal{W}\overline{1 + p^2}} \cdot \frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} \right] \cdot dx$$

und aus II folgt

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} \right) \cdot dx = 0$$

Man multiplicire nun letztere Gleichung mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor $\frac{2\pi \cdot L}{\mathcal{W}1}$, wo das Radical $\mathcal{W}1$ dieselbe Bedeutung hat, wie

Digitized by Google

das in Gleichung III befindliche $W\overline{1+p^2}$. Weil das sich ergebende Product auch noch Null ist, so kann es zu III addirt werden, ohne dass $(\delta_1)U$ sich ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad (\delta_1)U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot (W\overline{1+p^2}) \cdot (\delta_1)y + \left(\frac{2\pi \cdot p \cdot y}{W1} + \frac{2\pi \cdot L \cdot p}{(W1) \cdot \sqrt{1+p^2}} \right) \cdot \frac{d(\delta_1)y}{dx} \right] \cdot dx$$

Aber eben, weil $W1$ dieselbe Bedeutung hat, wie $W\overline{1+p^2}$; so kann man $W\overline{1+p^2}$ statt $(W1) \cdot \sqrt{1+p^2}$ setzen; und letztere Gleichung geht über in

$$\text{VI)}\quad (\delta_1)U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot (W\overline{1+p^2}) \cdot (\delta_1)y + \frac{2\pi \cdot (y+L) \cdot p}{W\overline{1+p^2}} \cdot \frac{d(\delta_1)y}{dx} \right] \cdot dx$$

Führt man die gewöhnliche Umformung aus, so bekommt man für die zweite Form des $(\delta_1)U$ folgenden Ausdruck:

$$\text{VII)}\quad (\delta_1)U = 2\pi \cdot \left(\frac{yp+Lp}{W\overline{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha - 2\pi \cdot \left(\frac{yp+Lp}{W\overline{1+p^2}} \right)_a \cdot (\delta_1)y_a$$
$$2\pi \cdot \int_a^\alpha \left[W\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{yp+Lp}{W\overline{1+p^2}} \right) \right] \cdot (\delta_1)y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad W\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{yp+Lp}{W\overline{1+p^2}} \right) = 0$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so bekommt man

$$(W\overline{1+p^2}) \cdot dx - \frac{p \cdot dy}{W\overline{1+p^2}} - \frac{y+L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = 0$$

oder

$$\text{IX)}\quad dx = \frac{y+L}{1+p^2} \cdot dp$$

Wenn man mit p multiplicirt, so bekommt man $dy = \frac{y+L}{1+p^2} \cdot p \cdot dp$, oder $\frac{dy}{y+L} = \frac{p \cdot dp}{1+p^2}$. Also ist $\lg \text{nat} \frac{y+L}{B} = \lg \text{nat}\, W\overline{1+p^2}$, und daraus folgt

$$\text{X)}\quad dx = \frac{B \cdot dy}{W\overline{(y+L)^2 - B^2}}$$

Diese Differentialgleichung, durch deren Integration noch ein dritter Constanter A eingeht, zeigt an, dass die Kettenlinie die gesuchte Curve ist.

Als Gränzengleichung hat man

$$\text{XI)}\quad (W\overline{(y_\alpha+L)^2 - B^2}) \cdot (\delta_1)y_\alpha - (W\overline{(y_a+L)^2 - B^2}) \cdot (\delta_1)y_a = 0$$

Durch Erfüllung dieser Gleichung werden zwei der drei Constanten A, B, L bestimmt; und dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Wenn die Länge der gesuchten Curve den bestimmten Werth g haben soll, so muss die Gleichung

$$\text{XII)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = g$$

bei Bestimmung des m noch mitbenützt werden. (Man vergleiche die Gränzfälle der 214ten Aufg.) Ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, erkennt man an dem zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Factor. Dieser ist $= \frac{2\pi \cdot (y+L)}{(1+p^2) \cdot W\overline{1+p^2}}$. Das zweideutige Radical hat hier dieselbe Bedeutung, wie in Gleichung I; und somit hangt es von $(y+L)$ ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Digitized by Google

Es kann aber ein Kettenlinienbogen, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Weise zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. entweder concav oder convex gegen die Abscissenaxe. Im ersten Falle ist die Rotationsfläche ein Maximum-stand, im zweiten ist sie ein Minimum-stand.

Es ist hier $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y + L}{B}$. Wenn daher y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei Zeichen haben, so kehrt die Curve ihre erhabene Seite, wenn aber y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzte Zeichen haben, so kehrt die Curve ihre hohle Seite der Abscissenaxe zu.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist eine von den isoperimetrischen im engeren Sinne des Wortes. Sie kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 198).

Aufgabe 221.

Unter allen ebenen Curven, welche zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten einerlei Flächeninhalt einschliessen, sucht man diejenige, die bei der Rotation um die Abscissenaxe die grösste oder kleinste Oberfläche erzeugt.

Hier soll wieder, wie in voriger Aufgabe, der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha 2\pi y \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Aus I folgt

$$\text{III)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot {}_{(\delta_1)}y + \frac{2\pi \cdot y \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right] \cdot dx$$

und aus II folgt

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha {}_{(\delta_1)}y \cdot dx = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor $(-2\pi \cdot L)$; so ist auch das sich ergebende Product Null, und kann zu III addirt werden, ohne dass ${}_{(\delta_1)}U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot \left[\left(-L + \sqrt{1 + p^2}\right) \cdot {}_{(\delta_1)}y + \frac{p \cdot y}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right] \cdot dx$$

Man hat sonach zunächst die Hauptgleichung

$$\text{VI)}\quad -L + \sqrt{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{y \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

Man führe die angedeutete Differentiation aus, und multiplicire dann Alles mit $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man $\frac{dy}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{y \cdot p \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = L \cdot dy$, oder $d\left(\frac{y}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = L \cdot dy$. Daraus folgt $\frac{y}{\sqrt{1 + p^2}} = L \cdot y + B$; und somit hat man

$$\text{VII)}\quad dx = \frac{(L \cdot y + B) \cdot dy}{\sqrt{y^2 - (L \cdot y + B)^2}}$$

Digitized by Google

Indem man diese Gleichung integrirt, geht noch ein dritter Constanter A ein. Zwei derselben werden durch Benützung der Gränzengleichung

$$\text{VIII)}\quad (\sqrt{y^2-(Ly+B)^2})_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha - (\sqrt{y^2-(Ly+B)^2})_a \cdot {}_{(\delta_1)}y_a = 0$$

bestimmt, und dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Wenn der von der gesuchten Curve eingeschlossene Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 haben soll, so muss die Gleichung

$$\text{IX)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

bei Bestimmung dessen noch mit benützt werden. (Man vergleiche die Gränzfälle in der 214[ten] Aufgabe.)

Erster Fall. Trifft es sich einmal bei Bestimmung der Constanten, dass $B = 0$ wird; so hat man $dx = \frac{L \cdot dy}{\sqrt{1-L^2}}$. Also ist $y = \frac{\sqrt{1-L^2}}{L} \cdot x + A$, d. h. man hat die grade Linie.

Zweiter Fall. Trifft es sich einmal, dass $L = 0$, so hat man $dx = \frac{B \cdot dy}{\sqrt{y^2 - B^2}}$, d. h. man hat die Gleichung der gemeinen Kettenlinie, welche der Abscissenaxe ihre erhabene Seite zukehrt.

Dritter Fall. Trifft es sich einmal, dass $L = -1$; so hat man $dx = \frac{(B-y) \cdot dy}{\sqrt{2By - B^2}}$. Daraus folgt

$$x = A + \frac{2B - y}{3B} \cdot \sqrt{2By - B^2}$$

oder

$$9 \cdot B \cdot (x - A)^2 = (2B - y)^2 \cdot (2y - B)$$

Der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)$ gehörige Factor ist hier $\frac{y \cdot \sqrt{1+p^2}}{(1+p^2)^2}$, also positiv, weil $y \cdot \sqrt{1+p^2}$ als positiv vorausgesetzt ist; und somit erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

(Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, befindet sich schon in Euler's Werke „Methodus inveniendi, etc.", Seite 196.)

Aufgabe 222.

Unter allen ebenen Curven, welche zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten dieselbe Länge haben, sucht man die, die bei der Rotation um die Abscissenaxe den grössten oder kleinsten Körper erzeugt.

Die Aufgabe ist: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \pi \cdot y^2 \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Aus I folgt

$$\text{III)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot y \cdot {}_{(\delta_1)}y \cdot dx$$

Aus II aber folgt

Digitized by Google

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d(\delta_1)y}{dx} \cdot dx = 0$$

Man multiplicire die vierte Gleichung mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor $\pi \cdot L$, und addire dieses Product zur dritten Gleichung; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)} \quad (\delta_1)U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot y \cdot (\delta_1)y + \frac{\pi \cdot L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d(\delta_1)y}{dx}\right] \cdot dx$$

Wenn man umformt, so gibt sich für die zweite Form des $(\delta_1)U$ folgender Ausdruck

$$\text{VI)} \quad (\delta_1)U = \left(\frac{\pi L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha - \left(\frac{\pi \cdot L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_1)y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[2\pi y - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi \cdot L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot (\delta_1)y \cdot dx$$

Hieraus folgt die Hauptgleichung

$$2\pi y - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi \cdot L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Factor π weglässt, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad 2y \cdot dx - d\left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Führt man die angezeigte Differentiation aus, und multiplicirt man dann Alles mit p; so gibt sich

$$2y \cdot dy - \frac{Lp \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Daraus folgt

$$\text{VIII)} \quad y^2 + B + \frac{L}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

und hieraus folgt weiter

$$\text{IX)} \quad dx = \frac{(y^2+B) \cdot dy}{\sqrt{L^2 - (y^2+B)^2}}$$

Aus Gleichung VII folgt auch noch $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{L}{2y}$, d. h. die Krümmungshalbmesser verhalten sich umgekehrt, wie die Ordinaten. Die gesuchte Curve gehört also in die Klasse derjenigen, welche den Namen elastische Curven haben, und bereits vielfach untersucht sind. Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\left(\sqrt{L^2-(y_\alpha^2+B)^2}\right) \cdot (\delta_1)y_\alpha - \left(\sqrt{L^2-(y_a^2+B)^2}\right) \cdot (\delta_1)y_a = 0$$

und wenn die Länge der gesuchten Linie den vorgeschriebenen Werth g haben soll, so muss die Gleichung

$$\int_a^\alpha \left(\sqrt{1+p^2}\right) \cdot dx = g$$

bei Bestimmung desjenigen Constanten, welcher mit m bezeichnet werden wird, noch mit benützt werden. (Man vergl. die Gränzfälle in der 214[ten] Aufg.) Ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, erkennt man an dem zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörigen Factor. Dieser aber ist $\frac{\pi \cdot L}{(1+p^2) \cdot \sqrt{1+p^2}}$; und somit hangt es von L ab, welcher von beiden Zuständen vorhanden ist. Es kann aber der Bogen einer elastischen Linie, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Weise zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. die Curve kann gegen die Abscissenaxe entweder concav oder convex

Digitized by Google

sein. Im ersten Falle ist der Rotationskörper ein Maximum-stand, im zweiten ist er ein Minimum-stand.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist eine von den isoperimetrischen im engeren Sinne des Wortes. Sie kommt schon vor in **Euler's** Werke (methodus inveniendi, Seite 196 und 197.)

Aufgabe 223.

Unter allen ebenen Curven, welche zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten denselben Flächeninhalt einschliessen, sucht man die, die bei der Rotation um die Abscissenaxe den grössten oder kleinsten Körper erzeugt.

Man hat also folgende Aufgabe: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \pi \cdot y^2 \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die gesuchte Curve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Aus I folgt

$$\text{III)}\quad \delta_1 U = \int_a^\alpha 2\pi y \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

Aus II aber folgt

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

Man multiplicire diese vierte Gleichung mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor $2\pi \cdot L$, und addire dieses Product zu III; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad \delta_1 U = \int_a^\alpha \left[(2\pi y + 2\pi \cdot L) \cdot \delta y + (2\pi y + 2\pi L) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx$$

Daraus gibt sich die Hauptgleichung

$$\text{VI)}\quad 2\pi y + 2\pi L = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht. Es ist also

$$\text{VII)}\quad y = -L$$

und wenn man m statt $-L$ setzt, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad y = m$$

Man hat somit die mit der Abscissenaxe parallele Gerade; und der hierdurch erzeugte Rotationskörper ist der senkrechte circuläre Cylinder. Wenn aber der von der gesuchten Linie eingeschlossene Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 haben soll, so kann aus folgender Gleichung

$$\text{IX)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha m \cdot dx = m \cdot (\alpha - a) = g^2$$

der Constante m bestimmt werden; denn es ist $m = \frac{g^2}{\alpha - a}$. Wenn dagegen der Werth dieses Flächeninhaltes nicht vorgeschrieben, sondern nur gesagt ist, dass er bei allen zu vergleichenden Curven der nemliche sein soll; dann muss irgend eine andere Bedingung gegeben sein, woraus sich der Constante m bestimmen lässt.

Wenn man die Hauptgleichung VI berücksichtigt, so bekommt man zunächst

Digitized by Google

$$\text{X)} \quad \delta_1^2 U = 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Aus der Gleichung $y = m$ folgt $\frac{d_m y}{dm} = 1$, und somit geht Gleichung IV über in $\int_a^\alpha \delta y \cdot dx + (\alpha - a) \cdot \vartheta m = 0$. Daraus folgt $\vartheta m = -\frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$; und Gleichung X geht jetzt über in

$$\text{XI)} \quad \delta_1^2 U = 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y - \frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2 \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist beständig positiv, also der gesuchte Körperinhalt ein Minimum-stand.

Aufgabe 224.

Unter allen Curven, bei denen das bestimmte Integral

$$\text{I)} \quad \int_a^\alpha x \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

immer den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, sucht man diejenige, bei welcher der Ausdruck

$$\text{II)} \quad U = \int_a^\alpha y \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Aus I folgt

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta_1 y}{dx}\right) \cdot dx = 0$$

und aus II folgt

$$\text{IV)} \quad \delta_1 U = \int_a^\alpha \left[(\sqrt{1 + p^2}) \cdot \delta_1 y + \frac{py}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta_1 y}{dx}\right] \cdot dx$$

Man multiplicire Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, addire dieses Product zu IV, und führe die gehörige Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)} \quad \delta_1 U = \left(\frac{py + Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta_1 y_\alpha - \left(\frac{py + Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta_1 y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\sqrt{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{py + Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right] \cdot \delta_1 y \cdot dx$$

Daraus folgt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{VI)} \quad \sqrt{1 + p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{py + Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man zum Zwecke eines späteren Gebrauches vorläufig herstellen

$$\text{VII)} \quad (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx = d\left(\frac{py + Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right)$$

Multiplicirt man nun Gleichung VI mit p, und zerlegt hierauf; so ergibt sich

$$\text{VIII)} \quad (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dy - p \cdot d\left(\frac{py}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = p \cdot d\left(\frac{Lpx}{\sqrt{1 + p^2}}\right)$$

Diese Gleichung lässt sich noch weiter umformen in

$$d(y \cdot \sqrt{1 + p^2}) - \frac{p \cdot y}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp - p \cdot d\left(\frac{p \cdot y}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = d\left(Lp \cdot \frac{px}{\sqrt{1 + p^2}}\right) - \frac{Lpx}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot dp$$

Digitized by Google

oder

$$d(y \cdot \sqrt{1+p^2}) - d\left(p \cdot \frac{p \cdot y}{\sqrt{1+p^2}}\right) = d\left(\frac{L \cdot p^2 \cdot x}{\sqrt{1+p^2}}\right) - d(Lx \cdot \sqrt{1+p^2}) + L \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

oder

$$d\left(\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}\right) = -d\left(\frac{Lx}{\sqrt{1+p^2}}\right) + L \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{IX)} \quad (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = d\left(\frac{y+Lx}{L \cdot \sqrt{1+p^2}}\right)$$

Aus Gleichung VII und IX folgt also mittelst Comparation

$$\text{X)} \quad d\left(\frac{y+Lx}{L \cdot \sqrt{1+p^2}}\right) = d\left(\frac{py+Lpx}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XI)} \quad \frac{y+Lx}{L \cdot \sqrt{1+p^2}} = A + \frac{py+Lpx}{\sqrt{1+p^2}}$$

Daraus folgt weiter, wenn man zugleich B statt AL setzt

$$y + L \cdot x = B \cdot \sqrt{1+p^2} + L \cdot p \cdot (y + Lx)$$

oder

$$\text{XII)} \quad y + Lx = \frac{B \cdot \sqrt{1+p^2}}{1 - L \cdot p}$$

Differentiirt man auf beiden Seiten, und setzt zugleich $p \cdot dx$ statt dy; so ist

$$(p + L) \cdot dx = \frac{B \cdot (p + L)}{(1 - L \cdot p)^2 \cdot \sqrt{1+p^2}} \cdot dp$$

Also hat man

$$\text{XIII)} \quad dx = \frac{B \cdot dp}{(1 - Lp)^2 \cdot \sqrt{1+p^2}}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XIV)} \quad x = C + \frac{LB \cdot (p + \sqrt{1+p^2}) - B}{(1 + L^2) \cdot (1 - Lp)}$$

$$+ \frac{B}{(1+L^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \lg\text{nat} \frac{L + (1 + \sqrt{1+L^2}) \cdot (p + \sqrt{1+p^2})}{L + (1 - \sqrt{1+L^2}) \cdot (p + \sqrt{1+p^2})}$$

Aus XII folgt $y = \frac{B \cdot \sqrt{1+p^2}}{1 - L \cdot p} - L \cdot x$; also ist

$$\text{XV)} \quad y = -LC + \frac{B \cdot (L - L^2 \cdot p + \sqrt{1+p^2})}{(1 + L^2) \cdot (1 - L \cdot p)}$$

$$- \frac{L \cdot B}{(1+L^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \lg\text{nat} \frac{L + (1 + \sqrt{1+L^2}) \cdot (p + \sqrt{1+p^2})}{L + (1 - \sqrt{1+L^2}) \cdot (p + \sqrt{1+p^2})}$$

Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{XVI)} \quad \left(\frac{y + Lx}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{B}{L}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha - \left(\frac{y + Lx}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{B}{L}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}y_a = 0$$

Durch Erfüllung dieser Gleichung werden zwei der drei Constanten B, G, L bestimmt; und dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Wenn das bestimmte Integral I den vorgeschriebenen Werth g^2 haben soll, dann muss die Gleichung

$$\text{XVII)} \quad \int_a^\alpha x \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = g^2$$

Digitized by Google

bei Bestimmung des m noch mitbenützt werden. (Man vergleiche die Gränzfälle der 224ten Aufgabe).

Der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor ist $\frac{y + Lx}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$, so dass es vom Zähler abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Die gesuchte Curve ist hier, wie es oft geschieht, durch zwei Gleichungen gegeben, und kann durch ihre Tangente construirt werden. Uebrigens kann man aus Gleichung XII das p bestimmen, und den sich ergebenden zweideutigen Ausdruck entweder in XIV oder XV substituiren, wodurch man die zwischen x und y stattfindende Gleichung bekommt.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, befindet sich schon in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. Seite 203).

Aufgabe 225.

Unter allen gleichlangen Curven sucht man diejenige, bei welcher

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \frac{q^2}{(1 + p^2)^3} \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimumstand wird.

Wegen der hier gestellten Nebenbedingung, darf die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Es ist bekanntlich $\frac{q^2}{(1 + p^2)^3} \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{\rho^2} \cdot ds$, wo s den Bogen und ρ den Krümmungshalbmesser bedeutet. Verfahrt man hier, wie in den vorigen Aufgaben, so bekommt man die Hauptgleichung

$$\text{III)}\quad d\left[\frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{5p \cdot q^2}{(1 + p^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right)\right] = 0$$

Daraus folgt durch Integration gradezu

$$\text{IV)}\quad B + \frac{L \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{5p \cdot q^2}{(1 + p^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

Als Gränzengleichung hat man zunächst

$$\text{V)}\quad \left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right)_a \cdot \left(\frac{d_{(\delta_1)}y}{dx}\right)_a - B \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha + B \cdot {}_{(\delta_1)}y_a = 0$$

Man setze in Gleichung IV die beiden letzten Theilsätze auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, und multiplicire dann die ganze Gleichung mit $q = \frac{dp}{dx}$; so bekommt man

$$B \cdot dp + \frac{L \cdot p \cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{5p \cdot q^2}{(1 + p^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot dp + q \cdot d\left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

oder

$$\frac{Lp \cdot dp}{\sqrt{1 + p^2}} + B \cdot dp = -\, d\left(\frac{q^2}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right) + \frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot dq + q \cdot d\left(\frac{2q}{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

oder

Digitized by Google

$$\frac{Lp\cdot dp}{\sqrt{1+p^2}} + B\cdot dp = -d\left(\frac{q^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\right) + d\left(q \times \frac{2q}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}\right).$$

integrirt man, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad L\cdot\sqrt{1+p^2} + B\cdot p + C = \frac{q^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Die Gränzengleichung V geht nun über in

$$\text{VII)}\quad 2\cdot(C+B\cdot p+L\cdot\sqrt{1+p^2})_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta_1 y}{dx}\right)_\alpha - 2\cdot(C+B\cdot p+L\cdot\sqrt{1+p^2})_a\cdot\left(\frac{d\delta_1 y}{dx}\right)_a$$
$$- B\cdot\delta_1 y_\alpha + B\cdot\delta_1 y_a = 0$$

Der zu $\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$ gehörige Factor ist $\frac{1}{(1+p^2)^3}\cdot(\sqrt{1+p^2})$; und somit erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Wenn man Gleichung VI noch weiter integrirt, so bekommt man eine Urgleichung mit fünf willkürlichen Constanten, von welchen vier dadurch bestimmt werden, dass man der Gränzengleichung VII genügt. Dann kann man den fünften oder einen aus dem fünften gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen; und wenn die Bogenlänge der gesuchten Curve den vorgeschriebenen Werth g haben soll, so muss die Gleichung

$$\text{VIII)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx = g$$

bei Bestimmung des m noch mitbenützt werden. (Man vergleiche die Gränzfälle der 214ten Aufgabe).

Aus Gleichung VI folgt zunächst

$$q^2 = (C + B\cdot p + L\cdot\sqrt{1+p^2})\cdot(1+p^2)^{\frac{5}{2}}$$

und daraus folgt weiter

$$\text{IX)}\quad q = \frac{dp}{dx} = \sqrt{(C + B\cdot p + L\cdot\sqrt{1+p^2})\cdot\sqrt{(1+p^2)^5}}$$

Es ist also

$$\text{X)}\quad dx = \frac{dp}{\sqrt{(C + B\cdot p + L\cdot\sqrt{1+p^2})\cdot\sqrt{(1+p^2)^5}}}$$

und somit gibt sich, wenn man beiderseits mit $\frac{dy}{dx} = p$ multiplicirt,

$$\text{XI)}\quad dy = \frac{p\cdot dp}{\sqrt{(C + B\cdot p + L\cdot\sqrt{1+p^2})\cdot\sqrt{(1+p^2)^5}}}$$

Integrirt man diese beiden Gleichungen, so geht in jede noch ein willkürlicher Constanter ein; und eliminirt man dann p, so bekommt man, wie schon einmal gesagt ist, eine Urgleichung mit fünf willkürlichen Constanten. Multiplicirt man aber Gleichung X mit B, und Gleichung XI mit C, und subtrahirt man dann das zweite Product von dem ersten; so bekommt man

$$\text{XII)}\quad B\cdot dx - C\cdot dy = \frac{(B - C\cdot p)\cdot dp}{\sqrt{(C + B\cdot p + L\cdot\sqrt{1+p^2})\cdot\sqrt{(1+p^2)^5}}}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XIII)}\quad Bx - Cy + E = 2\cdot\sqrt{L + \frac{C + B\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}}$$

Man setze $\frac{1}{2}\cdot(Bx - Cy + E) = v$, so bekommt man aus XIII

$$(v^2 - L)\cdot\sqrt{1+p^2} = C + B\cdot p$$

und daraus folgt weiter

Digitized by Google

$$\text{XIV)}\quad p = \frac{BC + (v^2 - L)\cdot\sqrt{B^2 + C^2 - (v^2 - L)^2}}{(v^2 - L)^2 - B^2}$$

Aus der Gleichung $\frac{1}{2}(Bx - Cy + E) = v$ folgt aber $p = \frac{B}{C} - \frac{2}{C}\cdot\frac{dv}{dx}$; und wenn man diesen Ausdruck für p in XIV einsetzt, und dx absondert; so gibt sich

$$\text{XV)}\quad dx = \frac{2\cdot[(v^2 - L)^2 - B^2]\cdot dv}{B\cdot(v^2 - L^2) - B^3 - B\cdot C^2 - C\cdot(v^2 - L)\cdot\sqrt{B^2 + C^2 - (v^2 - L)^2}}$$

Integrirt man diese Gleichung, und führt man dann wieder $\frac{1}{2}\cdot(Bx - Cy + E)$ an die Stelle des v zurück, so bekommt man gradezu die zwischen x und y stattfindende Function mit ihren fünf willkürlichen Constanten.

Trifft es sich einmal, dass B und C gleichzeitig zu Null werden; so geht Gleichung XV über in $dx = \frac{2\cdot(v^2 - L)^2\cdot dv}{0}$; und der Umstand, dass Null in den Nenner kommt, deutet darauf hin, dass man diesen speciellen Fall von Anfang an besonders behandeln müsse. Man kehre also zu Gleichung XI zurück, und es gibt sich $dy = \frac{p\cdot dp}{\sqrt{L\cdot(1+p^2)^3}}$.

Daraus folgt $y + G = -\frac{1}{\sqrt{L\cdot(1+p^2)}}$, woraus ferner $dx = \frac{(y+G)\cdot\sqrt{L}}{\sqrt{1-(y+G)^2\cdot L}}\cdot dy$ folgt. Daraus gibt sich durch Integration

$$x + F = -\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot\sqrt{1 - (y+G)^2\cdot L}$$

oder

$$(x + F)^2 + (y + G)^2 = \frac{1}{L}$$

und wenn man m^2 statt $\frac{1}{L}$ setzt, so geht letztere Gleichung über in

$$(x + F)^2 + (y + G)^2 = m^2$$

so dass man die Gleichung des Kreises hat. Dieses Resultat hätte man auch ohne Integration, durch Betrachtung der Gleichung VI, erlangen können; denn wegen $B = 0$ und $C = 0$ geht VI über in $\frac{q^2}{(1+p^2)^3} = L$, woraus $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{1}{\sqrt{L}}$ folgt. Nun ist $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ der Krümmungshalbmesser der ebenen Curven, welcher aber jetzt $= \frac{1}{\sqrt{L}}$, d. h. constant ist; und die Curve, deren Krümmungshalbmesser constant ist, ist bekanntlich der Kreis.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe ist eine von den isoperimetrischen im engeren Sinne des Wortes. Sie kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 248 und 249).

Aufgabe 226.

Unter allen ebenen Curven, deren zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckte Bögen gleiche Länge haben und auch gleichen Flächeninhalt einschliessen, sucht man die, welche bei der Rotation um die Abscissenaxe den grössten oder kleinsten Körper erzeugt.

Die Aufgabe ist also: Es soll

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \pi\cdot y^2\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während man die für y gesuchte

Digitized by Google

Function nur aus der Zahl derer herauswählen darf, bei welchen allen nicht nur folgendes bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen allen auch noch folgendes bestimmte Integral

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

Man nehme an, $y = \varphi(m, n, x)$ sei die gesuchte Function, in welcher, wenn die bestimmten Integrale II und III gegebene Werthe bekommen sollen, die beiden Constanten m und n so eingerichtet werden können, dass diese Integrale eben die vorgeschriebenen Werthe annehmen. Alle diejenigen Functionen, welche der Function $\varphi(m, n, x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegen, und bei denen zugleich die bestimmten Integrale II und III die nemlichen Werthe bekommen, wie bei $\varphi(m, n, x)$, werden bekanntlich (man sehe §. 266 und 269) dargestellt durch

$$\text{IV)} \quad y + \varkappa \cdot (\delta_2)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_2)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta_2)^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

wo, wie man bereits (aus der Einleitung zur 214[ten] Aufg.) weiss

$$\text{V)} \quad (\delta_2)y = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n$$

$$\text{VI)} \quad (\delta_2)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + 2 \cdot \frac{d_n \delta y}{dn} \cdot \vartheta n + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta^2 n$$
$$+ \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + 2 \cdot \frac{d_m d_n y}{dm . dn} \cdot \vartheta m \cdot \vartheta n + \frac{d_n^2 y}{dn} \cdot \vartheta n^2$$

etc. etc.

ist, daraus folgt gradezu

$$\text{VII)} \quad \frac{d(\delta_2)y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx . dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_n y}{dx . dn} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

Setzt man nun die Reihe IV statt y in den Ausdruck III ein, so bekommt man

$$\text{VIII)} \quad \int_a^\alpha (\delta_2)y \cdot dx = 0, \quad \text{und} \quad \text{IX)} \quad \int_a^\alpha (\delta_2)^2 y \cdot dx = 0$$

Setzt man ebenso die Reihe IV in den Ausdruck II ein, so bekommt man

$$\text{X)} \quad \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d(\delta_2)y}{dx} \cdot dx = 0$$

und

$$\text{XI)} \quad \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d(\delta_2)^2 y}{dx} + \frac{1}{1+p^2} \cdot \left(\frac{d(\delta_2)y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx = 0$$

Setzt man ebenso die Reihe IV in den Ausdruck I ein, so bekommt man

$$\text{XII)} \quad (\delta_2)U = \int_a^\alpha 2\pi y \cdot (\delta_2)y \cdot dx$$

und

$$\text{XIII)} \quad (\delta_2)^2 U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot (y \cdot (\delta_2)^2 y + (\delta_2)y^2) \cdot dx$$

Man multiplicire nun die Gleichungen VIII und X mit zwei (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factoren πL und πM, und addire diese Producte zu XII; so ist noch vollkommen genau

Digitized by Google

$$\delta_2 U = \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot y \cdot \delta_2 y + \pi L \cdot \delta_2 y + \frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta_2 y}{dx} \right] \cdot dx$$

Man forme um, und setze dann für das Abkürzungszeichen $\delta_2 y$ seinen Ausdruck ein; so bekommt man für die zweite Form des $\delta_2 U$ folgenden Ausdruck:

$$\text{XIV)} \quad \delta_2 U = \left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_\alpha \cdot \vartheta n\right)$$
$$- \left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_a \cdot \vartheta n\right)$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(2\pi y + \pi L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \right.$$
$$+ \left(2\pi y + \pi \cdot L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$
$$\left. + \left(2\pi y + \pi L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n \right] \cdot dx$$

Damit nun die abhängigen Elemente ϑm und ϑn zunächst unter dem Integralzeichen wegfallen, lasse man die identische Gleichung

$$\text{XV)} \quad 2\pi y + \pi L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Dabei fällt auch der zu δy gehörige Factor weg, und Gleichung XV ist zugleich die Hauptgleichung. Als Gränzengleichung aber hat man jetzt

$$\text{XVI)} \quad \left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_\alpha \cdot \vartheta n\right)$$
$$- \left(\frac{\pi M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_n y}{dn}\right)_a \cdot \vartheta n\right) = 0$$

Wenn man den gemeinschaftlichen Factor π weglässt, so geht Gleichung XV über in $2y + L - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Mp}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$, oder $(2y + L) \cdot dx = \frac{M \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Multiplicirt man Alles mit $p = \frac{dy}{dx}$, so geht letztere Gleichung über in $(2y + L) \cdot dy = \frac{M \cdot p \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ also ist $y^2 + Ly + C = -\frac{M}{\sqrt{1+p^2}}$, und daraus folgt

$$\text{XVII)} \quad dx = \frac{(y^2 + Ly + C) \cdot dy}{\sqrt{M^2 - (y^2 + Ly + C)^2}}$$

Die gesuchte Curve gehört also in die Klasse derjenigen, welche den Namen elastische Curven haben, und bereits vielfach untersucht sind.

Man multiplicire nun die Gleichungen IX und XI mit den bereits angewendeten constanten Factoren πL und πM, addire diese Producte zu XIII, und führe dann die gehörige Umformung aus; so bleibt nur

$$\text{XVIII)} \quad \delta_2^2 U = \left(\frac{\pi \cdot M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta_2^2 y_\alpha - \left(\frac{\pi \cdot M \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta_2^2 y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot \delta_2 y^2 + \frac{\pi \cdot M}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta_2 y}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx$$

so dass es auf M ankommt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Wenn man Gleichung XVII weiter integrirt, so geht noch ein vierter Constanter B ein, so dass man eine Urgleichung mit den vier willkürlichen Constanten B, C, L M bekommt. Zwei davon bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung

Digitized by Google

XVI genügt. Dann kann man den dritten und vierten bezüglich mit m und n bezeichnen; und wenn man es angemessener oder bequemer findet, so kann man auch zwei aus dem dritten und vierten Constanten gebildete Ausdrücke durch m und n darstellen.

Ist auch noch vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = \alpha$ die gesuchte Curve die bestimmte Bogenlänge g habe und den bestimmten Flächeninhalt h^2 einschliesse; so müssen die Gleichungen

$$\text{XIX)} \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = g, \text{ und XX)} \int_a^\alpha y \cdot dx = h^2$$

bei Bestimmung von m und n mitbenützt werden. Fehlen aber diese beiden letzten Vorschriften, so kann die Curve zweien andern Bedingungen unterworfen werden.

Alles dieses nach Analogie der zur 214ten Aufgabe gehörigen Gränzfälle. (Dort hat man es im ersten Gränzfalle angemessen gefunden, m anstatt $\frac{1}{L}$ zu setzen).

Specieller Fall. Sind zwei feste Punkte (a, b) und (α, β) gegeben; durch welche die gesuchte Curve begränzt werden soll; so müssen auch alle andern in Betracht zu ziehenden nächstanliegenden Nachbarcurven durch diese zwei festen Punkte begränzt werden. Alle in Betracht zu ziehenden Curven haben also bei der Abscisse a eine Ordinate, deren Werth $= y_a = b$; ebenso haben alle in Betracht zu ziehenden Curven bei der Abscisse α eine Ordinate, deren Werth $= y_\alpha = \beta$. Desshalb bestehen zwischen den Gränzordinaten der gesuchten und aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende zwei Gleichungen:

$$y_a = y_a + \varkappa \cdot (\delta_2) y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_2)^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta_2)^3 y_a + \ldots\ldots\ldots$$

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot (\delta_2) y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_2)^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta_2)^3 y_\alpha + \ldots\ldots\ldots$$

Es muss also (nach Analogie des §. 268) sein $(\delta_2) y_a = 0$, $(\delta_2) y_\alpha = 0$, $(\delta_2)^2 y_a = 0$, $(\delta_2)^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung XVI wird somit von selbst erfüllt.

Gränzfälle lassen sich in beliebiger Menge aufstellen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. Seite 238 und 239).

Aufgabe 227.

Unter allen ebenen Curven, deren zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckte Bögen einerlei Flächeninhalt einschliessen, sucht man diejenige, welche bei der Rotation um die Abscissenaxe die grösste oder kleinste Oberfläche erzeugt.

Schaut man (auf die Einleitung zur 220sten Aufgabe) zurück, so hat man jetzt folgende Aufgabe: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha 2\pi \cdot y \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

wo das zweideutige Radical jedesmal so genommen werden muss, dass $y \cdot \sqrt{1+p^2}$ positiv ist, ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei welchen allen nicht nur folgendes bestimmte Integral

$$\text{II)} \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen allen auch noch folgendes bestimmte Integral

$$\text{III)} \int_a^\alpha y \cdot dx$$

Digitized by Google

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Verfahrt man, wie in voriger Aufgabe, so gibt sich aus III folgende Gleichung

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha (\delta_2)y \cdot dx = 0$$

und aus II ergibt sich folgende Gleichung

$$\text{V)}\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2)y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2)y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot (\delta_2)y \cdot dx = 0$$

Aus I aber ergibt sich für die zweite Form des $(\delta_2)U$ folgender Ausdruck:

$$\text{VI)}\quad (\delta_2)U = \left(\frac{2\pi \cdot y \cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)_\alpha \cdot (\delta_2)y_\alpha - \left(\frac{2\pi \cdot y \cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)_a \cdot (\delta_2)y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[2\pi \cdot \mathcal{W}\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{2\pi \cdot y \cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)\right] \cdot (\delta_2)y \cdot dx$$

Hier hat man statt $(\delta_2)y$ überall die (schon in voriger Aufgabe aufgestellten) Ausdrücke eingeführt zu denken. Man multiplicire nun die Gleichungen IV und V mit zwei (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factoren $2\pi \cdot L$ und $\frac{2\pi \cdot M}{\mathcal{W}1}$, wo das Radical $\mathcal{W}1$ dieselbe Bedeutung hat, wie das in Gleichung V befindliche $\mathcal{W}\overline{1+p^2}$. Weil die beiden sich ergebenden Producte auch noch Null sind, so können sie zu VI addirt werden, ohne dass $(\delta_2)U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$(\delta_2)U =$$
$$\left(\frac{2\pi yp}{\mathcal{W}1+p^2} + \frac{2\pi Mp}{(\mathcal{W}1)\cdot\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2)y_\alpha - \left(\frac{2\pi yp}{\mathcal{W}1+p^2} + \frac{2\pi Mp}{(\mathcal{W}1)\cdot\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2)y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[2\pi L + 2\pi \cdot \mathcal{W}\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{2\pi y \cdot p}{\mathcal{W}1+p^2} + \frac{2\pi Mp}{(\mathcal{W}1)\cdot\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot (\delta_2)y \cdot dx$$

Aber eben, weil $\mathcal{W}1$ dieselbe Bedeutung hat, wie $\mathcal{W}\overline{1+p^2}$; so kann man $\mathcal{W}\overline{1+p^2}$ statt $(\mathcal{W}1)\cdot\sqrt{1+p^2}$ setzen, und letztere Gleichung geht über in

$$\text{VII)}\quad (\delta_2)U = \left(\frac{2\pi\cdot(y+M)\cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)_\alpha \cdot (\delta_2)y_\alpha - \left(\frac{2\pi\cdot(y+M)\cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)_a \cdot (\delta_2)y_a$$
$$+ 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left[L + \mathcal{W}\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(y+M)\cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right)\right] \cdot (\delta_2)y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad L + \mathcal{W}\overline{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(y+M)\cdot p}{\mathcal{W}1+p^2}\right) = 0$$

Führt man die angezeigte Differentiation aus, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad L \cdot dx + \frac{dx}{\mathcal{W}1+p^2} - \frac{y \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{M \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Man multiplicire die ganze Gleichung mit p, so bekommt man

$$\text{X)}\quad L \cdot dy + \frac{dy}{\mathcal{W}1+p^2} - \frac{y \cdot p \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Mp \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder

$$L \cdot dy + d\left(\frac{y}{\mathcal{W}1+p^2}\right) + d\left(\frac{M}{\mathcal{W}1+p^2}\right) = 0$$

Also ist

$$L \cdot y + \frac{y}{\mathcal{W}1+p^2} + \frac{M}{\mathcal{W}1+p^2} = C$$

Digitized by Google

oder

$$Ly + \frac{y + M}{\sqrt{1 + p^2}} = C$$

Daraus folgt

$$\text{XI)} \quad dx = \frac{(C - Ly) \cdot dy}{\sqrt{(y + M)^2 - (C - Ly)^2}}$$

Um diese Gleichung zu integriren, vereinfache man sie zuvor, und setze w statt $(C - Ly)$; so geht Gleichung XI über in

$$\text{XII)} \quad dx = - \frac{w \cdot dw}{\sqrt{(C + LM)^2 - 2 \cdot (C + LM) \cdot w + (1 - L^2) \cdot w^2}}$$

Integrirt man, und setzt zur weiteren Abkürzung W anstatt

$$\sqrt{(C + LM)^2 - 2 \cdot (C + LM) \cdot w + (1 - L^2) \cdot w^2}$$

so gibt sich entweder

$$\text{XIII)} \quad x = - \frac{W}{1 - L^2} - \frac{C + LM}{(1 - L^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \lg \text{nat} \frac{2 \cdot (1 - L^2) \cdot w - 2(C + LM) + 2W \cdot \sqrt{1 - L^2}}{E}$$

oder

$$\text{XIV)} \quad x = F + \frac{W}{L^2 - 1} + \frac{C + LM}{(L^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \arcsin \frac{(L^2 - 1) \cdot w + (C + LM)}{L \cdot (C + LM) \cdot \sqrt{1}}$$

In diese beiden Gleichungen hat man wieder $(C - Ly)$ an die Stelle des w zurückzuführen; Gleichung XIII ist brauchbar, wenn $L < 1$; dagegen Gleichung XIV ist brauchbar, wenn $L > 1$.

Die Gränzengleichung ist jetzt folgende:

$$\text{XV)} \quad \left(\sqrt{(y + M)^2 - (C - Ly)^2}\right)_\alpha \cdot (\delta_2 y_\alpha) - \left(\sqrt{(y + M)^2 - (C - Ly)^2}\right)_a \cdot (\delta_2 y_a) = 0$$

Unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bekommt man ferner

$$\text{XVI)} \quad (\delta_2)^2 U = 2\pi \cdot \left(\frac{(y + M) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2)^2 y_\alpha - 2\pi \cdot \left(\frac{(y + M) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2)^2 y_a$$
$$+ 2\pi \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{2p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot (\delta_2 y) \cdot \frac{d(\delta_2 y)}{dx} + \frac{y + M}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d(\delta_2 y)}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

so dass es auf $(y + M)$ ankommt, ob ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand stattfindet; denn das zweideutige Radical hat dieselbe Bedeutung, wie in Gleichung I.

Die Gleichung der gesuchten Curve hat vier willkürliche Constanten; nemlich

1) entweder C, E, L, M, wenn die erste Form (XIII) gilt,

2) oder C, F, L, M, wenn die zweite Form (XIV) gilt.

Zwei dieser Constanten bestimmen sich jedesmal dadurch, dass man der Gränzengleichung XV genügt. Dann kann man den dritten und vierten bezüglich mit m und n bezeichnen; und wenn man es angemessener oder bequemer findet, so kann man auch zwei aus dem dritten und vierten Constanten gebildete Ausdrücke durch m und n darstellen.

Ist auch noch vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ die gesuchte Curve die bestimmte Bogenlänge g habe und den bestimmten Flächeninhalt h^2 einschliesse; so müssen die Gleichungen

$$\text{XVII)} \quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + p^2}\right) \cdot dx = g, \quad \text{und} \quad \text{XVIII)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx = h^2$$

bei Bestimmung von m und n mitbenützt werden. Fehlen aber diese beiden letzten Vorschriften, so kann die gesuchte Curve zweien andern Bedingungen unterworfen werden.

(Man vergleiche die Gränzfälle in der 214ten Aufgabe).

Digitized by Google

Aufgabe 228.

Welche unter allen gleichlangen räumlichen Curven hat die Eigenschaft, dass sie das bestimmte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha x \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht?

Wegen der hier gestellten Nebenbedingung dürfen die für y und z gesuchten Functionen nur solche zusammengehörige sein, dass bei ihnen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

immer den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Man nehme nun an, $y = \varphi'(x, m)$ und $z = \varphi''(x, m)$ seien die für y und z gesuchten Functionen, in welchen, wenn das bestimmte Integral II einen vorgeschriebenen Werth bekommen soll, der Constante m noch so eingerichtet werden kann, dass dieses Integral eben den vorgeschriebenen Werth annimmt. Alle diejenigen Functionen, welche den Functionen $\varphi'(x, m)$ und $\varphi''(x, m)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegen, und bei denen zugleich das bestimmte Integral II den nemlichen Werth bekommt, wie bei $\varphi'(x, m)$ und bei $\varphi''(x, m)$, werden bekanntlich (man sehe §. 265 und 267, und besonders die Einleitung zur 214[ten] Aufgabe) dargestellt durch

$$\text{III)}\quad y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

wo, wie man gleichfalls (aus den so eben citirten Stellen) weiss

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{1)}y = \delta\varphi'(x, m) + \frac{d_m\varphi'(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{1)}z = \delta\varphi''(x, m) + \frac{d_m\varphi''(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m = \delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

ist. Daraus folgt gradezu

$$\text{VII)}\quad \frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_{(}\delta_{1)}z}{dx} = \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

Setzt man jetzt die Reihe III statt y, und die Reihe IV statt z in II ein; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \int_a^\alpha \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} \left[p\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right) + \mathfrak{p}\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m\right)\right] \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Setzt man ebenso die Reihe III statt y, und die Reihe IV statt z in I ein; so bekommt man

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \int_a^\alpha \frac{x}{\sqrt{p^2 + \mathfrak{p}^2}} \left[p\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx \cdot dm}\vartheta m\right) + \mathfrak{p}\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx \cdot dm}\vartheta m\right)\right] \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung IX mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, addire dieses Product zu X, setze zur Abkürzung P statt $\sqrt{p^2 + \mathfrak{p}^2}$ und Q statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$, und führe die gehörige Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \left(\frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}y_\alpha - \left(\frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}y_a$$

$$+ \left(\frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}z_\alpha - \left(\frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}z_a$$

$$- \int_a^\alpha \left\{ \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q}\right)\right) \cdot \delta z \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q}\right)\right) \cdot \frac{d_m z}{dm}\right] \cdot \vartheta m \right\} \cdot dx.$$

Um nun das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegzubringen, lasse man den dazu gehörigen Factor eine identische Gleichung sein, d. h. man setze

$$\text{XII)}\quad \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{xp}{P} + \frac{Lp}{Q}\right)\right] \cdot \frac{d_m y}{dm} + \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x\mathfrak{p}}{P} + \frac{L\mathfrak{p}}{Q}\right)\right] \cdot \frac{d_m z}{dm} = 0$$

Damit aber auch die mit den willkürlichen und untereinander unabhängigen Elementen δy und δz behafteten Theilsätze wegfallen, müssen noch die beiden Hauptgleichungen

$$\text{XIII)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q}\right) = 0$$

und

$$\text{XIV)}\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q}\right) = 0$$

stattfinden. Man erkennt nun, dass alle diejenigen Functionen y und z von x, durch welche die Gleichungen XIII und XIV identisch werden, auch die Gleichung XII identisch machen; und wenn man XIII und XIV integrirt, so gibt sich

$$\text{XV)}\quad \frac{x \cdot p}{P} + \frac{L \cdot p}{Q} = A$$

$$\text{XVI)}\quad \frac{x \cdot \mathfrak{p}}{P} + \frac{L \cdot \mathfrak{p}}{Q} = B$$

Dividirt man beide Gleichungen in einander, so gibt sich

$$\text{XVII)}\quad A \cdot \mathfrak{p} = B \cdot p$$

Durch Integration folgt daraus

$$\text{XVIII)}\quad A \cdot z = B \cdot y + C$$

Eliminirt man nun $\mathfrak{p}$ aus XV, und sondert man dann p ab; so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad p = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \times \frac{x - \sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{L^2 - (x - \sqrt{A^2 + B^2})^2}}$$

Integrirt man, so bekommt man zunächst

$$\text{XX)}\quad y + E = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sqrt{L^2 - (x - \sqrt{A^2 + B^2})^2}$$

und daraus folgt weiter

$$\text{XXI)}\quad \left(\frac{(y + E) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}{A \cdot L}\right)^2 + \left(\frac{x - \sqrt{A^2 + B^2}}{L}\right)^2 = 1$$

Durch die Gleichungen XVIII und XXI ist also die gesuchte Curve vollkommen gegeben. An Gleichung XVIII sieht man, dass die gesuchte Curve eine ebene Curve ist; und an Gleichung XXI sieht man, dass die in XY liegende Projection der gesuchten Curve eine Ellipse ist. Die gesuchte Curve selbst ist ein Kreis, wie nachgewiesen werden kann, wenn man in die durch XVIII gegebene Linie eine auf YZ senkrechte Ebene legt, und die auf diese Ebene bezogene Gleichung der gesuchten Linie herstellt. Die Abscissen x bleiben dabei unverändert, dagegen die Ordinaten sind in besagter Ebene grösser, als in der Coordinatenebene XY. Nun erhellet aus XVIII, dass $\frac{B}{A}$ die goniometrische Tangente des von der besagten Ebene und der Coordinatenebene XY

Digitized by Google

eingeschlossenen Winkels ist. Bezeichnet man die in besagter Ebene liegende Ordinate durch y', so ist $y' = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}$; und daraus folgt $y = \frac{y'}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}}$. Gleichung XXI geht also über in

$$\text{XXII)} \quad \left(y' + E \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}\right)^2 + (x - \sqrt{A^2 + B^2})^2 = L^2$$

welches die Gleichung eines Kreises ist, dessen Halbmesser $= L$.

Die Gränzengleichung nimmt jetzt folgende Form an

$$\text{XXIII)} \quad A \cdot ({}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}y_a) + B \cdot ({}_{(}\delta_{1)}z_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}z_a) = 0$$

Man hat hier fünf willkürliche Constanten. Vier davon werden dadurch bestimmt, dass man der Gleichung XXIII genügt. Dann kann man den fünften dieser Constanten oder einen aus ihm gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Ist auch noch vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ alle in Betracht zu ziehenden Curven die bestimmte Bogenlänge g haben, so muss die Gleichung

$$\text{XXIV)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx = g$$

bei Bestimmung des m mitbenützt werden. Fehlt aber diese Vorschrift, so kann die Curve einer andern Bedingung unterworfen werden.

(Alles nach Analogie der Gränzfälle in der 214ten Aufg.)

Als Prüfungsmittel bekommt man

$$\text{XXV)} \quad {}_{(}\delta_{1)}^2 U = A\,({}_{(}\delta_{1)}^2 y_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}^2 y_a) + B\,({}_{(}\delta_{1)}^2 z_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}^2 z_a)$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{x}{P^3}\left(\mathfrak{p}\,\frac{d{}_{(}\delta_{1)}y}{dx} - p\,\frac{d{}_{(}\delta_{1)}z}{dx}\right)^2 + \frac{L}{Q^3}\left(\left(\mathfrak{p}\,\frac{d{}_{(}\delta_{1)}y}{dx} - p\,\frac{d{}_{(}\delta_{1)}z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d{}_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d{}_{(}\delta_{1)}z}{dx}\right)^2\right)\right] \cdot dx$$

Für den Fall, dass a nicht negativ ist, bleibt $\frac{x}{(p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x positiv; und wenn auch L positiv ist, so ist auch $\frac{L}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x positiv. Dabei ist auch ${}_{(}\delta_{1)}^2 U$ positiv, d. h. dabei findet ein Minimum-stand statt.

Für den Fall, dass a und α zugleich negativ sind, bleibt $\frac{x}{(p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x negativ; und wenn auch L negativ ist, so ist auch $\frac{L}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ negativ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x. Dabei ist auch ${}_{(}\delta_{1)}^2 U$ negativ, d. h. dabei findet ein Maximumstand statt. Da aber hier auch

$$U = \int_a^\alpha x \cdot (\sqrt{p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$$

negativ ist, so kann nur insoferne von einem Maximum-stande die Rede sein, als in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt.

Für den Fall, dass $\frac{x}{(p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ und $\frac{L}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}$ nicht einerlei Zeichen haben bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x, findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Aufgaben dieser Art sind sonst noch nie auf räumliche Curven ausgedehnt worden. Diese Bemerkung gilt auch von den Aufgaben 245, 246, 247.

Digitized by Google

Aufgabe 229.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgendes Product

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \left(m - (x - y)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical $(x - y)^{\frac{2}{3}}$ darf, wie man sieht, nur nach seiner reellen Bedeutung genommen werden. Aus I folgt zunächst

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x - y}} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left(m - (x - y)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$$

Man setze (nach §. 225)

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \left(m - (x - y)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

Dabei geht Gleichung II über in

$$\delta U = \left[\int_a^\alpha \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x - y}} \cdot \delta y \cdot dx + A \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right] \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

oder

$$\text{IV)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{2 + 3A \cdot \sqrt[3]{x - y}}{3 \cdot \sqrt[3]{x - y}} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

Erstens. Lässt man den bei δy befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung

$$\text{V)} \quad 2 + 3A \cdot \sqrt[3]{x - y} = 0$$

Die gesuchte Function ist also

$$\text{VI)} \quad y = x + \left(\frac{2}{3A}\right)^3$$

wo der Constante A noch zu bestimmen ist, was mittelst Gleichung III geschieht. Diese geht über in

$$\left(m - \left(\frac{2}{3A}\right)^2\right) \cdot (\alpha - a) = A \cdot \left(\frac{1}{2}(a + \alpha) + \left(\frac{2}{3A}\right)^3\right) \cdot (\alpha - a)$$

oder

$$\text{VII)} \quad 27(a + \alpha) \cdot A^3 - 54m \cdot A^2 + 40 = 0$$

Diese Gleichung enthält keinen Widerspruch in sich selbst, sondern liefert wenigstens einen reellen Werth des A. Andere Schriftsteller haben die Nothwendigkeit der Untersuchung, ob ein Widerspruch stattfinde oder nicht, übersehen, und desshalb Irrthümer begangen. Wenn man Gleichung II noch einmal mutirt, und dann Gleichung III und V berücksichtigt; so gibt sich zuletzt

$$\delta^2 U = \frac{9 \cdot A^4}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}(a + \alpha) + \left(\frac{2}{3A}\right)^2\right) \cdot (\alpha - a) \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$$

$$+ 2A \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$$

Digitized by Google

Die beiden Integrale $\int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$ und $\left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$ sind unter allen Umständen positiv; es kommt also auf ihre Coefficienten an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Schaut man wieder auf Gleichung IV zurück, und gibt man dem bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$; so hat man die identische Gleichung

$$\text{VIII)} \quad y - x = 0$$

Die gesuchte Function ist also

$$\text{IX)} \quad y = x$$

Diese Function ist aber von den Gränzen a und α ganz unabhängig. Bei $y = x$ geht Gleichung I über in

$$\text{X)} \quad U' = \frac{1}{2} m \cdot (a + \alpha) \cdot (\alpha - a)^2$$

Zur Herstellung des Prüfungsmittels setze man

$$(U' + \Delta U) \text{ an die Stelle des } U$$

und

$$\left(x + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } (x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \text{ statt } y$$

in Gleichung I ein. Dadurch bekommt man

$$U' + \Delta U = \int_a^\alpha \left(m - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{2}{3}}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha (x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot dx$$

oder

$$U' + \Delta U = \left(m(\alpha - a) - \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dx\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\alpha^2 - a^2) + \varkappa \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P} \cdot dx\right)$$

oder

$$U' + \Delta U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a + \alpha) \cdot (\alpha - a)^2 - \frac{1}{2} \cdot (\alpha^2 - a^2) \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$
$$+ m \cdot (\alpha - a) \cdot \varkappa \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P} \cdot dx - \varkappa^{\frac{5}{3}} \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dx \times \int_a^\alpha \mathfrak{P} \cdot dx$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler setzen

$$U' + \Delta U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a + \alpha) \cdot (\alpha - a)^2 - \frac{1}{2} \cdot (\alpha^2 - a^2) \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

woran man erkennt, dass U' ein Maximum-stand ist.

Aufgabe 230.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$U = \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha px \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Hier ist, wie gewöhnlich, $p = \frac{dy}{dx}$; es wird also jetzt die erste Form des δU folgender Ausdruck sein:

$$\delta U = \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha px \cdot dx + \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot x \cdot dx$$

Wenn man umformt, so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

Digitized by Google

$$\delta U = \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha px \cdot dx + (\alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \delta y \cdot dx) \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

oder

$$\delta U = \left(\int_a^\alpha px \cdot dx - \int_a^\alpha y \cdot dx\right) \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx + (\alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a) \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

Aus dieser letzteren Form bekommt man nun die Hauptgleichung

$$\text{I)} \quad \int_a^\alpha px \cdot dx - \int_a^\alpha y \cdot dx = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{II)} \quad \alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\int_a^\alpha y \cdot dx$ weggelassen hat. Mutirt man die erste für δU hergestellte Form noch einmal, und führt man hierauf die gewöhnlichen Umformungen aus; so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \left(\int_a^\alpha px \cdot dx - \int_a^\alpha y \cdot dx\right) \times \int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx + 2 \cdot (\alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a) \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$$

$$+ (\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - a \cdot \delta^2 y_a) \times \int_a^\alpha y \cdot dx - 2 \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$$

In Folge der Gleichungen I und II bleibt aber nur

$$\text{III)} \quad \delta^2 U = (\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - a \cdot \delta^2 y_a) \times \int_a^\alpha y \cdot dx - 2 \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$$

Da aber a und α feste Werthe sind, so wird hier die Hauptgleichung von allen jenen Functionen erfüllt, in welchen willkürliche Constanten vorkommen, die sich noch so bestimmen lassen, dass die Gleichung $\int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha px \cdot dx$ stattfindet.

Erstens. Die Gleichung $\int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha px \cdot dx$ wird zwischen allen beliebigen Gränzen, also auch zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erfüllt, wenn $y = px$; und wenn man diese Gleichung integrirt so gibt sich

$$\text{IV)} \quad y = A \cdot x$$

wo A ein willkürlicher Constanter ist.

Zweitens. Setzt man gradezu $y = A \cdot x + B$, wo A und B zwei willkürliche Constanten sind; so bekommt man

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha (Ax + B) \cdot dx = \frac{1}{2} A \cdot (\alpha^2 - a^2) + B \cdot (\alpha - a)$$

und

$$\int_a^\alpha px \cdot dx = \int_a^\alpha Ax \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha^2 - a^2)$$

Setzt man diese Ausdrücke einander gleich, so bekommt man

$$\frac{1}{2} A \cdot (\alpha^2 - a^2) + B \cdot (\alpha - a) = \frac{1}{2} A \cdot (\alpha^2 - a^2)$$

Daraus folgt $B = 0$, d. h. man hat abermals

$$\text{V)} \quad y = A \cdot x$$

wo A ein noch willkürlicher Constanter ist.

Drittens. Setzt man gradezu $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$, wo A, B und C drei noch willkürliche Constanten sind; so ist

Digitized by Google

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = \int_a^\alpha (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3} A \cdot (\alpha^3 - a^3) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot (\alpha^2 - a^2) + C \cdot (\alpha - a)$$

und

$$\int_a^\alpha px \cdot dx = \int_a^\alpha (2A \cdot x^2 + B \cdot x) \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot A \cdot (\alpha^3 - a^3) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot (\alpha^2 - a^2)$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so bekommt man

$$C = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot a + a^2)$$

und man hat jetzt

$$\text{VI)} \quad y = A \cdot x^2 + B \cdot x + \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot a + a^2)$$

wo A und B zwei noch willkürliche Constanten sind.

Auf diese Weise lassen sich noch unendlichviele Functionen so einrichten, dass Gleichung I erfüllt wird. Es muss aber auch noch die Gränzengleichung II erfüllt werden, zu welchem Ende folgende specielle Fälle aufgestellt werden mögen.

Erster Fall. Soll bei $x = a$ das y den bestimmten Werth b, und soll ebenso bei $x = \alpha$ das y den bestimmten Werth β bekommen; so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc.; und die Gränzengleichung II fällt von selbst weg.

1) Schaut man nun auf Gleichung V oder IV, so geht diese an den Gränzen über in $b = A \cdot a$ und $\beta = A \cdot \alpha$, d. h. man hat zwei Gleichungen zur Bestimmung des einzigen Constanten A, so dass dieser Fall ein überbestimmter ist, a[illegible]n $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$.

2) Schaut man aber auf Gleichung VI, so geht diese an [illegible]en über in $b = A \cdot a^2 + B \cdot a + \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot a + a^2)$ und in $\beta = A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot a + a^2)$, welche zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Constanten A und B hinreichen.

Was man auch immer für eine Function y von x nehmen mag, es reducirt sich Gleichung III jedesmal auf $\delta^2 U = -2 \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$, woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Wenn $a = 0$ ist, und bei $x = \alpha$ d[illegible]mmten Werth β haben soll, so ist jetzt auch $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc.; und die [illegible]engleichung fällt von selbst weg.

1) Schaut man auf Gleichung IV oder V, so geht diese an der Endgränze über in $\beta = A \cdot \alpha$, woraus $A = \frac{\beta}{\alpha}$ folgt, so dass dieser Fall vollkommen bestimmt ist.

2) Schaut man auf Gleichung VI, so geht diese, eben weil $a = 0$ ist, bei der Endgränze über in $\beta = \frac{4}{3} \cdot A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha$, so dass jetzt einer der beiden Constanten A oder B unbestimmt bleibt.

Was man auch immer für eine Function y von x nehmen mag, es reducirt sich Gleichung III doch jedesmal auf $\delta^2 U = -\left(\int_0^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$, woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Dritter Fall. Soll man die gesuchte Function y von x nur aus der Zahl derer herauswählen, bei welchen allen die Gleichung $a \cdot y_a = \alpha \cdot y_\alpha$ erfüllt wird; so ist jetzt $a \cdot \delta y_a = \alpha \cdot \delta y_\alpha$, $a \cdot \delta^2 y_a = \alpha \cdot \delta^2 y_\alpha$, etc., und die Gränzengleichung fällt abermals von selbst weg.

1) Schaut man auf IV oder V, so geht diese an den beiden Gränzen über in

Digitized by Google

$y_a = A \cdot a$, und $y_\alpha = A \cdot \alpha$, welche zwei Gleichungen, verbunden mit $a \cdot y_a = \alpha \cdot y_\alpha$, hinreichen, die drei Stücke y_a, y_α, A zu bestimmen.

2) Schaut man wieder auf Gleichung VI, so geht diese an den Gränzen über in $y_a = A \cdot a^2 + B \cdot a + \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + \alpha \cdot a + a^2)$, und $y_\alpha = A \cdot \alpha^2 + B \cdot \alpha + \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^2 + a \cdot \alpha + a^2)$, welche zwei Gleichungen, verbunden mit $a \cdot y_a = \alpha \cdot y_\alpha$, nur dazu dienen, um von den vier Stücken y_a, y_α, A, B drei zu bestimmen, während eines von ihnen unbestimmt bleibt.

Auch hier reducirt sich Gleichung III auf $\delta^2 U = -2 \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2$, so dass abermals ein Maximum-stand stattfindet.

Und dergleichen speciellen Fälle mehr.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., S. 148), wo sie aber sehr mangelhaft durchgeführt ist. Sie wurde später in viele andere Schriften aufgenommen, aber eben so mangelhaft behandelt, indem daselbst

1) der speciellen Fälle kaum gedacht ist, und
2) das Prüfungsmittel überall fehlt.

Aufgabe 231.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Quotient

$$U = \frac{\int_a^\alpha y \cdot dx}{\int_a^\alpha p \cdot x \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Auch hier ist $p = \frac{dy}{dx}$. Man mutire, und setze dann im Nenner G anstatt $\int_a^\alpha p . x . dx$; so bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \frac{1}{G^2} \cdot \left[\int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha px \cdot dx - \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha x \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx\right]$$

Führt man nun die gewöhnliche Umformung aus, so gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{1}{G^2} \cdot \left[\left(\int_a^\alpha px \cdot dx + \int_a^\alpha y \cdot dx\right) \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \right.$$

$$\left. - (\alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a) \times \int_a^\alpha y \cdot dx\right]$$

Aus dieser letzteren Form bekommt man jetzt die Hauptgleichung

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha p \cdot x \cdot dx + \int_a^\alpha y \cdot dx = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IV)} \quad \alpha \cdot \delta y_\alpha - a \cdot \delta y_a = 0$$

bei welcher man aber den gemeinschaftlichen Factor $\int_a^\alpha y \cdot dx$ weggelassen hat. Da nun a und α feste Werthe sind, so wird hier die Hauptgleichung III von allen jenen Functionen erfüllt, in welchen willkürliche Constanten vorkommen, die sich noch so bestimmen lassen, dass eben diese Gleichung III eine richtige ist.

Digitized by Google

Erstens. Die Gleichung III wird zwischen allen beliebigen Gränzen, also auch zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erfüllt, wenn $px + y = 0$ eine identische Gleichung ist. Integrirt man, so gibt sich

$$\text{V)} \quad x \cdot y = A$$

wo A ein noch willkürlicher Constanter ist.

Zweitens. Setzt man gradezu $y = A \cdot x + B$, so ist

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha^2 - a^2) + B \cdot (\alpha - a)$$

und

$$\int_a^\alpha px \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha^2 - a^2)$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke, so muss

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha^2 - a^2) + B \cdot (\alpha - a) + \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha^2 - a^2) = 0$$

sein; und daraus folgt $B = - A \cdot (\alpha + a)$, so dass die hier angenommene Gleichung übergeht in

$$\text{VI)} \quad y = A \cdot (x - a - \alpha)$$

wo A ein noch willkürlicher Constanter ist.

Drittens. Setzt man gradezu $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$, so ist

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (\alpha^3 - a^3) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot (\alpha^2 - a^2) + C \cdot (\alpha - a)$$

und

$$\int_a^\alpha p \cdot x \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot A \cdot (\alpha^3 - a^3) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot (\alpha^2 - a^2)$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke, so muss

$$A \cdot (\alpha^3 - a^3) + B \cdot (\alpha^2 - a^2) + C \cdot (\alpha - a) = 0$$

sein; und daraus folgt $C = - A \cdot (\alpha^2 + \alpha a + a^2) - B \cdot (\alpha + a)$, so dass die hier angenommene Gleichung übergeht in

$$\text{VII)} \quad y = A \cdot (x^2 - \alpha^2 - \alpha \cdot a - a^2) + B \cdot (x - a - \alpha)$$

wo A und B zwei noch willkürliche Constanten sind.

Auf diese Weise lassen sich noch unendlichviele Functionen so einrichten, dass Gleichung III erfüllt wird. Es muss aber auch noch die Gränzengleichung IV erfüllt werden, zu welchem Ende man specielle Fälle aufstellen kann, wie in voriger Aufgabe geschehen.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, hat man in Gleichung I nur den Zähler zu mutiren; und so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{G^2} \cdot \left[\int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx \times \int_a^\alpha p \cdot x \cdot dx - \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha x \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right) \cdot dx \right]$$

Führt man jetzt die gewöhnliche Umformung aus, so gibt sich

$$\delta^2 U = \frac{1}{G^2} \cdot \left[\left(\int_a^\alpha p \cdot x \cdot dx + \int_a^\alpha y \cdot dx \right) \cdot \int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx \right.$$
$$\left. - (\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - a \cdot \delta^2 y_a) \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx \right]$$

In Folge der Gleichung III reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\delta^2 U = - \frac{1}{G^2} \cdot (\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - a \cdot \delta^2 y_a) \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist desshalb bemerkenswerth, weil er keinen Mutationscoefficienten unter dem Integralzeichen hat. Er wird in sehr vielen Fällen zu Null

Digitized by Google

werden. Uebrigens erkennt man gradezu, dass er nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten kann, d. h. dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 232.

Welche unter allen zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckten ebenen Curven ist es, bei welcher der Schwerpunkt der von der Curve und den Gränzordinaten eingeschlossenen Fläche am höchsten oder tiefsten liegt?

Man gebe der Abscissenaxe eine horizontale, dagegen der Ordinatenaxe eine verticale Richtung; dann ist bekanntlich

$$U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von der Abscissenaxe; und dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Mutirt man, und setzt dann zur Abkürzung im Nenner A anstatt $\int_a^\alpha y \cdot dx$; so bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot A^2} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx - \int_a^\alpha y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \right]$$

Man setze (nach §. 225)

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha y^2 \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)} \quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot A^2} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot \delta y \cdot dx - C \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \right] \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

und wenn man im Zähler und Nenner A gegen $\int_a^\alpha y \cdot dx$ aufhebt, so gibt sich

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha (2y - C) \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad 2y - C = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht. Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Grade.

Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, hat man jetzt in Gleichung I nur den Zähler zu mutiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A^2} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot \delta^2 y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx + 2 \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx - \int_a^\alpha y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx \right]$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A^2} \cdot \left[\int_a^\alpha (2y - C) \cdot \delta^2 y \cdot dx + 2 \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx \right] \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$$

Man erkennt also, dass es auf A ankommt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Bei Bestimmung des Constanten C muss noch Gleichung II mit benützt werden; und da aus Gleichung V folgt $y = \frac{C}{2}$, so geht Gleichung II über in

$$\int_a^\alpha \frac{C^2}{4} \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha \frac{C}{2} \cdot dx$$

oder in

$$\frac{C^2}{4} \cdot (\alpha - a) = \frac{C^2}{2} \cdot (\alpha - a)$$

oder in

$$\frac{C^2}{4} = \frac{C^2}{2}$$

Diese Gleichung enthält einen Widerspruch in sich selbst, ausgenommen den Fall, wo man $C = 0$ setzen würde. In diesem Falle hätte man aber die in die Abscissenaxe fallende Grade, so dass keine Fläche vorhanden wäre, also auch von dem Schwerpunkte einer Fläche keine Rede sein könnte. Man erkennt daher, dass die Aufgabe, so wie sie hier gestellt ist, gar keine Aufgabe ist.

Andere Schriftsteller haben die Nothwendigkeit der Untersuchung, ob ein Widerspruch stattfinde oder nicht, ganz übersehen, und desshalb Irrthümer begangen. (Man vergleiche Aufgabe 260.) Die nächstfolgende Aufgabe wird noch eine Nebenbedingung stellen, und dadurch zu einem Resultate führen.

Aufgabe 233.

Man sucht unter allen ebenen Curven, welche zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten einerlei Flächeninhalt einschliessen, diejenige, bei welcher der Schwerpunkt dieser Fläche am höchsten oder tiefsten (der horizontal genommenen Abscissenaxe so nahe oder ferne als möglich) liegt.

Die hiesige Aufgabe verlangt also: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Man mutire den Ausdruck II (nach §. 265, und nach der Einleitung zur 214ten Aufg.), so bekommt man

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

und

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) \cdot dx = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung im Nenner A anstatt $\int_a^\alpha y \cdot dx$; so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{V)} \quad {}_{(\delta_1)}U = \frac{1}{2A^2} \cdot \left[\int_a^\alpha y \cdot dx \times 2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx \right.$$
$$\left. - \int_a^\alpha y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx \right]$$

Aber wegen Gleichung III reducirt sich dieser Ausdruck gradezu auf

$$\text{VI)} \quad {}_{(\delta_1)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha y \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

Mutirt man jetzt noch einmal, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad {}_{(\delta_1^2)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[y \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) \right.$$
$$\left. + \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \right] \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm aus VI zu eliminiren, multiplicire man Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L; dann ist auch noch $L \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$. Man kann also dieses Product zu VI addiren, ohne dass sich ${}_{(\delta_1)}U$ ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{VIII)} \quad {}_{(\delta_1)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[(y + AL) \cdot \delta y + (y + AL) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m \right] \cdot dx$$

Damit das abhängige ϑm unter dem Integralzeichen wegfalle, setze man

$$\text{IX)} \quad y + AL = 0$$

Dabei verschwindet auch der zu δy gehörige Factor, und Gleichung IX ist zugleich Hauptgleichung; aber eine Gränzengleichung gibt es nicht. Aus IX folgt $y = -AL$; und wenn man m statt $-AL$ setzt, so bekommt man

$$\text{X)} \quad y = m$$

d. h. man hat die Gleichung der mit der Abscissenaxe parallelen Graden. Aus X folgt $\frac{d_m y}{dm} = 1$ und $\frac{d_m^2 y}{dm^2} = 0$; die Gleichungen IV und VII gehen also über in

$$\text{XI)} \quad \int_a^\alpha \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \vartheta^2 m\right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XII)} \quad {}_{(\delta_1^2)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[m\left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \vartheta^2 m\right) + (\delta y + \vartheta m)^2 \right] \cdot dx$$

Multiplicirt man jetzt XI mit L, und addirt man dieses Product zu XII; so bekommt man

$${}_{(\delta_1^2)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[(m + AL) \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \vartheta^2 m\right) + (\delta y + \vartheta m)^2 \right] \cdot dx$$

Aber eben weil $AL = -m$, so bleibt nur

$$\text{XIII)} \quad {}_{(\delta_1^2)}U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha (\delta y + \vartheta m)^2 \cdot dx$$

Man hätte nun noch ϑm zu eliminiren; allein man erkennt schon, dass es nur auf A ankommt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Will man aber dennoch ϑm eliminiren, so beachte man, dass $\frac{d_m y}{dm} = 1$ ist; und somit geht Gleichung III über in $(\alpha - a) \cdot \vartheta m + \int_a^\alpha \delta y \cdot dx = 0$, woraus $\vartheta m = -\frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$ folgt, und XIII geht über in

Digitized by Google

$$\text{XIV)} \quad (\delta_1)^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y - \frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2 \cdot dx$$

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven einen gleichgrossen Flächeninhalt einschliessen müssen; und wenn diesem Flächeninhalte der bestimmte Werth g^2 zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XV)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

bei Bestimmung des Constanten m zu benützen. Es ist nemlich $\int_a^\alpha y \cdot dx = m \cdot (\alpha - a) = g^2$; und daraus folgt $m = \frac{g^2}{\alpha - a}$. Die Gleichung der gesuchten Curve ist also jetzt

$$\text{XVI)} \quad y = \frac{g^2}{\alpha - a}$$

und Gleichung XIV geht über in

$$\text{XVII)} \quad (\delta_1)^2 U = \frac{1}{g^2} \cdot \int_a^\alpha \left(\delta y - \frac{1}{\alpha - a} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2 \cdot dx$$

dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv; es findet also ein Minimum-stand statt, d. h. unter allen auf vorgeschriebene Weise begränzten Figuren, welche denselben Flächeninhalt einschliessen, hat das Rechteck seinen Schwerpunkt am tiefsten. Diese Eigenschaft des Rechtecks ist aber längst bekannt.

Schlussbemerkung. Die hiesige Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., S. 219 und 220). Auch sie wurde später von vielen andern Schriftstellern aufgenommen. Ueberall aber fehlt das Prüfungsmittel.

Aufgabe 234.

Welche unter allen ebenen Curven von gleicher Länge hat die Eigenschaft, dass der Schwerpunkt der von der Curve und den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten eingeschlossenen Fläche am höchsten oder tiefsten liegt?

Hier soll wieder der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt. Man mutire Gleichung II (nach §. 265, und nach der Einleitung zur 214[ten] Aufgabe), und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man

$$\text{III)} \quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1) y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1) y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

und



$$\text{IV)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y_a - \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) + \frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dx = 0.$$

Ausserhalb der Integralzeichen hat man die bekannten Abkürzungszeichen ${}_{(}\delta_{1)}y$ und ${}_{(}\delta_{1)}{}^2 y$ gesetzt. Man mutire jetzt auch Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung A anstatt $\int_a^\alpha y \cdot dx$, und (nach §. 225),

$$\text{V)}\quad \int_a^\alpha y^2 \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

d. h. man setze auch noch AC anstatt $\int_a^\alpha y^2 \cdot dx$; so gibt sich nach ausgeführten Reductionen

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha (2y - C) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

und

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}{}^2 U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha (2y - C) \cdot {}_{(}\delta_{1)}{}^2 y \cdot dx + \frac{1}{A^2} \cdot \left[A \cdot \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}y^2 \cdot dx \right.$$

$$\left. - 2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx \times \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx + C \cdot \left(\int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx\right)^2\right]$$

Um nun das abhängige ϑm aus VI zu eliminiren, multiplicire man Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor K, und addire dieses Product zu VI; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_a$$

$$+ \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha \left[2y - C - 2A \cdot K \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot {}_{(}\delta_{1)}y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad 2y - C - 2A \cdot K \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so gibt sich

$$\text{X)}\quad 2y \cdot dx - C \cdot dx - \frac{2A \cdot K \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Man multiplicire Alles mit $p = \frac{dy}{dx}$, so gibt sich

$$\text{XI)}\quad 2y \cdot dy - C \cdot dy - \frac{2A \cdot K \cdot p \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{XII)}\quad y^2 - C \cdot y + E + \frac{2A \cdot K}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

Man setze N statt $A \cdot K$, so folgt aus dieser Gleichung

$$\text{XIII)}\quad dx = \frac{(y^2 - C \cdot y + E) \cdot dy}{\sqrt{4N^2 - (y^2 - C \cdot y + E)^2}}$$

Die gesuchte Curve gehört also in die Klasse derjenigen, welche den Namen elastische Curven haben, und bereits vielfach untersucht sind.

Digitized by Google

Durch Integration der letzten Gleichung geht noch ein weiterer Constanter F ein, so dass man eine Urgleichung mit vier willkürlichen Constanten C, E, F, N bekommt. Zwei davon bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung

$$\text{XIV)}\quad \left(\sqrt{4 \cdot N^2 - (y^2 - Cy + E)^2_\alpha}\right) \cdot (\delta_1)y_\alpha - \left(\sqrt{4 \cdot N^2 - (y^2 - Cy + E)^2_a}\right) \cdot (\delta_1)y_a = 0$$

genügt. Der dritte Constante bestimmt sich, weil noch die Gleichung

$$\text{XV)}\quad \int_a^\alpha y^2 \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

bestehen muss. Hat man drei dieser Constanten bestimmt, dann kann man den vierten oder einen aus dem vierten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven eine gleichgrosse Bogenlänge haben müssen; und wenn dieser Bogenlänge der bestimmte Werth g zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XVI)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx = g$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die Curve einer andern Bedingung unterworfen werden. (Alles nach Analogie der Gränzfälle in der 214[ten] Aufgabe.)

Es kann der Bogen einer elastischen Linie, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Weise zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. entweder concav oder convex gegen die Abcissenaxe. Es wäre also zu untersuchen, ob, wenn sie concav oder convex gegen die Abscissenaxe ist, der Schwerpunkt der von ihr eingeschlossenen Fläche im ersten Falle am weitesten von der Abscissenaxe, und im zweiten am nächsten bei ihr liegt. Um aber das Prüfungsmittel herzustellen, multiplicire man Gleichung IV mit dem schon einmal gebrauchten Factor K, addire dieses Product zu VII, und berücksichtige die Hauptgleichung; so bekommt man

$$\text{XVII)}\quad (\delta_1)^2U = \left(\frac{Kp}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)^2y_\alpha - \left(\frac{K \cdot p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)^2y_a + \frac{1}{A^2} \cdot \left[A \cdot \int_a^\alpha (\delta_1)y^2 \cdot dx\right.$$
$$\left. - 2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot (\delta_1)y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\delta_1)y . dx + C . \left(\int_a^\alpha (\delta_1)y . dx\right)^2 + A^2 . K . \int_a^\alpha \frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{d(\delta_1)y}{dx}\right)^2 \cdot dx\right]$$

Hier müsste noch ϑm eliminirt werden. Diesem Geschäfte braucht man sich aber gar nicht zu unterziehen; denn man sieht schon jetzt, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Der Multiplicator K, wenn man ihn grade kennen lernen will, ist gegeben durch die Gleichung $A \cdot K = N$, welche gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XVIII)}\quad \left(\int_a^\alpha y \cdot dx\right) \cdot K = N$$

Aufgabe 235.

Welche unter allen ebenen Curven, deren zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckte Bögen einerlei Länge haben, und auch einerlei Flächeninhalt einschliessen, hat die Eigenschaft, dass der Schwerpunkt des Flächeninhaltes am höchsten oder tiefsten liegt?

Hier soll abermals der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

Digitized by Google

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen nicht nur das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, sondern bei welchen auch noch folgendes bestimmte Integral

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Man mutire (nach §. 266 und 269, und nach der Einleitung zur 214ten Aufgabe), so bekommt man aus II folgende Gleichung:

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

und aus III bekommt man

$$\text{V)} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2) y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2) y_a$$

$$- \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung I, setze dann zur Abkürzung im Nenner A anstatt $\int_a^\alpha y \cdot dx$, und berücksichtige noch Gleichung IV; so gibt sich

$$\text{VI)} \quad (\delta_2) U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha y \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx$$

Um nun die abhängigen Elemente ϑm und ϑn aus VI zu eliminiren, multiplicire man die Gleichungen IV und V bezüglich mit den nach x constanten (aber vorerst noch unbekannten) Factoren L und K, und addire beide Producte zu VI; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VII)} \quad (\delta_2) U = K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2) y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2) y_a$$

$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[y + AL - AK \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot (\delta_2) y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VIII)} \quad y \cdot dx + AL \cdot dx - \frac{AK \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

und wenn man Alles mit 2p multiplicirt, so gibt sich

$$\text{IX)} \quad 2y \cdot dy + 2AL \cdot dy - \frac{2AK \cdot p \cdot dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{X)} \quad y^2 + 2AL \cdot y + E + \frac{2AK}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

Man setze M und N bezüglich statt $A \cdot K$ und $A \cdot L$, so folgt aus dieser Gleichung

$$\text{XI)} \quad dx = \frac{(y^2 + 2Ny + E) \cdot dy}{\sqrt{4 \cdot M^2 - (y^2 + 2Ny + E)^2}}$$

Man hat also hier dieselbe Curve, wie in der vorigen Aufgabe.

Durch Integration der letzten Gleichung geht noch ein weiterer Constanter F ein.

Digitized by Google

so dass man im Ganzen vier willkürliche Constanten E, F, M, N hat. Zwei davon bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung

$$\text{XII)}\quad \left(\sqrt{4\cdot M^2 - (y^2 + 2Ny + E)^2_\alpha}\right)\cdot \delta_2 y_\alpha - \left(\sqrt{4\cdot M^2 - (y^2 + 2Ny + E)^2_a}\right)\cdot \delta_2 y_a = 0$$

genügt. Dann kann man den dritten und vierten Constanten bezüglich mit m und n bezeichnen; und wenn man es angemessener oder bequemer findet, so kann man auch zwei aus dem dritten und vierten gebildete Ausdrücke durch m und n darstellen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven eine gleichgrosse Bogenlänge haben und einen gleichgrossen Flächeninhalt einschliessen müssen; und wenn dieser Bogenlänge und diesem Flächeninhalte bezüglich die bestimmten Werthe h und g^2 zukommen sollen, so hat man die Gleichungen

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx = g,\quad \text{und}\quad \text{XIV)}\quad \int_a^\alpha y\cdot dx = h^2$$

welche dazu dienen, die Constanten m und n zu bestimmen. Fehlen aber letztere Gleichungen, so kann die gesuchte Curve noch zwei weiteren Bedingungen unterworfen werden. (Alles nach Analogie der Gränzfälle in der 214ten Aufg.)

Wenn man die bereits angewendeten Multiplicatoren L und K benützt, und die Hauptgleichung beachtet; so bekommt man für das Prüfungsmittel folgenden Ausdruck

$$\text{XV)}\quad \delta_2{}^2 U = K\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot \delta_2{}^2 y_\alpha - K\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot \delta_2{}^2 y_a + \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left[(\delta_2 y)^2 + \frac{A\cdot K}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d(\delta_2 y)}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Daran erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet, wenn $A\cdot K$ positiv, und ein Maximum-stand, wenn $A\cdot K$ negativ ist.

Die beiden Multiplicatoren L und K, wenn man sie grade kennen lernen will, sind gegeben durch die Gleichungen $A\cdot K = M$ und $AL = N$, welche bezüglich gleichbedeutend sind mit

$$\left(\int_a^\alpha y\cdot dx\right)\cdot K = M,\quad \text{und}\quad \left(\int_a^\alpha y\cdot dx\right)\cdot L = N$$

Aufgabe 236.

Welche unter allen zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckten ebenen Curven ist es, bei welcher der Schwerpunkt des Bogens am höchsten oder tiefsten liegt?

Man nehme diesmal die Ordinatenaxe Y in horizontaler, dagegen die Abscissenaxe X in verticaler Richtung. Man hat also diesmal die Entfernung des Schwerpunktes von der horizontal liegenden Ordinatenaxe zu untersuchen, und diese Entfernung ist

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha x\cdot(\sqrt{1+p^2})\cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx}$$

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung im Nenner A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx$; so gibt sich zunächst

Digitized by Google

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{1}{A^2}\left[\int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx \right.$$

$$\left. - \int_a^\alpha x\cdot(\sqrt{1+p^2})\cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx\right]$$

Man setze (nach §. 233)

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha x\cdot(\sqrt{1+p^2})\cdot dx = C\cdot\int_a^\alpha(\sqrt{1+p^2})\cdot dx$$

d. h. man setze $\int_a^\alpha x(\sqrt{1+p^2})\cdot dx = A\mathfrak{C}$, so kann man Gleichung II umformen in

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha \frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$

Daraus gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck:

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$-\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{VI)}\quad d\left(\frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Also ist

$$\text{VII)}\quad \frac{(x-C)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = E.$$

Daraus folgt $dy = \frac{E\cdot dx}{\sqrt{(x-C)^2-E^2}}$, so dass

$$\text{VIII)}\quad y = E\cdot \lg\text{ nat}\,\frac{x-C+\sqrt{(x-C)^2-E^2}}{F}$$

die Gleichung der gesuchten Curve, die gesuchte Curve selbst also die Kettenlinie ist. Als Gränzengleichung hat man

$$\text{IX)}\quad E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, hat man jetzt in Gleichung II nur den Zähler zu mutiren; und wenn man zur Abkürzung noch u statt $\sqrt{1+p^2}$ setzt, so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{A^2}\cdot\left[\int_a^\alpha \frac{px}{u}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx}\cdot dx\times\int_a^\alpha u\cdot dx - \int_a^\alpha ux\cdot dx\times\int_a^\alpha\frac{p}{u}\cdot\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)\cdot dx\right.$$

$$\left.+\int_a^\alpha\frac{x}{u^3}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx\times\int_a^\alpha u\cdot dx - \int_a^\alpha xu\cdot dx\times\int_a^\alpha\frac{1}{u^3}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx\right]$$

Nun forme man um, berücksichtige die Hauptgleichung VI, hierauf noch Gleichung III; und man bekommt

$$\delta^2 U = \frac{E}{A}\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) + \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\frac{x-C}{(x+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Es kommt also auf $(x-C)$ an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Bei Bestimmung der Constanten muss aber Gleichung III noch mitbenützt werden; sie geht jetzt über in

$$\int_a^\alpha\frac{x\cdot(x-C)\cdot dx}{\sqrt{(x-C)^2-E^2}} = C\cdot\int_a^\alpha\frac{(x-C)\cdot dx}{\sqrt{(x-C)^2-E^2}}$$

Digitized by Google

Aber eben weil C constant ist, so geht diese Gleichung gradezu über in

$$\text{X)} \quad \int_a^\alpha \frac{(x - C)^2 \cdot dx}{\sqrt{(x - C)^2 - E^2}} = 0$$

Wenn ω positiv und so klein ist, dass in der Reihe

$$a, (a + \omega), (a + 2\omega), \ldots\ldots, (a + (n-1)\omega), \alpha$$

durch die einzelnen Glieder alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe des x repräsentirt sind; so ist bekanntlich

$$\int_a^\alpha \frac{(x - C)^2 \cdot dx}{\sqrt{(x - C)^2 - E^2}} = \omega \cdot \Big[\frac{(a - C)^2}{\sqrt{(a - C)^2 - E^2}} + \frac{(a + \omega - C)^2}{\sqrt{(a + \omega - C)^2 - E^2}}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{(a + (n-1) \cdot \omega - C)^2}{\sqrt{(a + (n-1) \cdot \omega - C)^2 - E^2}}\Big]$$

Da das Radical nur nach seiner positiven Bedeutung vorausgesetzt ist, so sind alle innerhalb der eckigen Klammern stehenden Theilsätze positiv, ihre Summe kann also nicht Null sein; und somit enthält Gleichung X einen Widerspruch in sich selbst, woraus folgt, dass die hiesige Aufgabe in der Weise, wie sie gestellt ist, gar keine Aufgabe ist.

Andere Schriftsteller haben die Nothwendigkeit der Untersuchung, ob ein Widerspruch stattfinde, ganz übersehen, und desshalb Irrthümer begangen. Die nächstfolgende Aufgabe wird noch eine Nebenbedingung stellen, und dadurch zu einem Resultate führen.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, befindet sich schon in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. Seite 157—160).

Aufgabe 237.

Welche unter allen ebenen Curven, die zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten gleiche Länge haben, hat ihren Schwerpunkt am höchsten oder tiefsten?

Man nehme wieder die Ordinatenaxe Y in horizontaler, dagegen die Abscissenaxe X in verticaler Richtung; so hat man wieder für des Schwerpunktes Entfernung von der horizontal liegenden Ordinatenaxe denselben Ausdruck, wie in voriger Aufgabe, d. h. es soll wieder

$$\text{I)} \quad U = \frac{\int_a^\alpha x(\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y gesuchte Function von x nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen der Ausdruck

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Man mutire den Ausdruck II (nach §. 267, und nach der Einleitung zur 214ten Aufg.), und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \frac{p}{u} \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

oder in anderer Form

$$\text{IV)} \quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1) y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1) y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

Digitized by Google

Man mutire ebenso Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$ in den Nenner; so bekommt man zunächst

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{A^2}\left[\int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)\cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx - \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)\cdot dx\right]$$

Wegen Gleichung III reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)\cdot dx$$

oder wenn man umformt, so gibt sich für die zweite Form des ${}_{(}\delta_{1)}U$ folgender Ausdruck

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_a - \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{px}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung III oder vielmehr Gleichung IV mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, und addire dieses Product zu VII; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{(x+AL)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \left(\frac{(x+AL)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_a\right] - \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x+AL)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad d\left(\frac{(x+AL)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$\text{X)}\quad \frac{(x+AL)\cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = E$$

Man setze N statt AL, und sondere p ab; so gibt sich $p = \frac{E}{\sqrt{(x+N)^2 - E^2}}$, und daraus folgt durch abermalige Integration

$$\text{XI)}\quad y = E\cdot \lg\text{ nat}\,\frac{x+N+\sqrt{(x+N)^2-E^2}}{F}$$

Die gesuchte Curve ist also die Kettenlinie. Von den drei willkürlichen Constanten E, F, N werden zwei dadurch bestimmt, dass man der Gränzengleichung

$$\text{XII)}\quad E\cdot({}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}y_a) = 0$$

genügt. Dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven eine gleichgrosse Bogenlänge haben müssen; und wenn dieser Bogenlänge der bestimmte Werth g zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx = g$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die Curve einer andern Bedingung unterworfen werden. (Man vergleiche die Gränzfälle der 214ten Aufg.)

Digitized by Google

Wenn man den bereits angewendeten Multiplicator L wieder benützt, und die Hauptgleichung berücksichtigt; so bekommt man für das Prüfungsmittel folgenden Ausdruck

$$\text{XIV)} \quad \delta_1^2 U = \frac{E}{A} \cdot (\delta_1^2 y_\alpha - \delta_1^2 y_a) + \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \frac{x + AL}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d\delta_1 y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Der Multiplicator, wenn man ihn grade kennen lernen will, ist gegeben durch die Gleichung $AL = N$, welche gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XV)} \quad \left(\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx\right) \cdot L = N$$

Wenn also bei allen von a bis α liegenden Werthen des x die Summe $(x + AL)$ positiv bleibt, so findet ein Minimum-stand statt; wenn aber bei allen von a bis α liegenden Werthen des x die Summe $(x + AL)$ negativ bleibt, so findet ein Maximum-stand statt. Es kann nemlich der Kettenlinienbogen, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Art zwischen zwei Punkten gezogen werden, je nachdem er der horizontalen Ordinatenaxe seine convexe oder concave Seite zukehrt; und im ersten Falle findet ein Minimum-stand, im zweiten ein Maximum-stand statt.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, befindet sich schon in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 220 und 221.)

Aufgabe 238.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$U = \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx + \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Man setze (nach §. 232)

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Daraus gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck:

$$\text{IV)} \quad \delta U = \left[\left(\frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a\right] \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \left(1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad dx - d\left(\frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt vorerst

$$\text{VI)} \quad x + E = \frac{C \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{x + E}{\sqrt{C^2 - (x + E)^2}}$; und somit gibt sich

Digitized by Google

$$\text{VII)}\quad (y + F)^2 + (x + E)^2 = C^2$$

als die für y gesuchte Function. Die Gränzengleichung ist

$$\text{VIII)}\quad (\alpha + E) \cdot \delta y_\alpha - (a + E) \cdot \delta y_a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$ weggelassen hat. Um entscheiden zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, mutire man Gleichung I noch einmal, benütze dann die Gleichung II, und führe die gehörigen Umformungen aus; so bekommt man, wenn man noch u statt $\sqrt{1 + p^2}$ setzt, in Folge alles Vorhergehenden

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \left((\alpha + E) \cdot \delta^2 y_\alpha - (a + E) \cdot \delta^2 y_a\right) \times \int_a^\alpha u \cdot dx$$

$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{u} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx + C \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha u \cdot dx$$

Nun ist

$$\int_a^\alpha \frac{p}{u} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx = \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Aus Gleichung V folgt $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) = \frac{1}{C}$, und somit geht letztere Gleichung über in

$$\int_a^\alpha \frac{p}{u} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx = \frac{1}{C}\left[(\alpha + E) \cdot \delta y_\alpha - (a + E) \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right]$$

In Folge der Gleichung VIII bleibt aber nur

$$\int_a^\alpha \frac{p}{u} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx = - \frac{1}{C} \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx$$

Gleichung IX geht also jetzt über in

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = \left((\alpha + E) \cdot \delta^2 y_\alpha - (a + E) \cdot \delta^2 y_a\right) \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

$$- \frac{2}{C} \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2 + C \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

und daran erkennt man, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Bei Bestimmung der Constanten muss Gleichung II noch mitbenützt werden; diese aber geht jetzt über in

$$\int_a^\alpha \left(- F + \sqrt{C^2 - (x + E)^2}\right) \cdot dx = C^2 \cdot \int_a^\alpha \frac{dx}{\sqrt{C^2 - (x + E)^2}}$$

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. Seite 146 und 149).

Aufgabe 239.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während die gesuchte Function nur

Digitized by Google

aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.

Man mutire den Ausdruck II (nach §. 267, und nach der Einleitung zur 214ten Aufgabe), so bekommt man

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

Wenn man umformt, und zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2}$ setzt; so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_a - \int_a^\alpha\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{u}\right)\right)\cdot\left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung I, so bekommt man

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{1)}y\cdot dx \times \int_a^\alpha u\cdot dx + \int_a^\alpha y\cdot dx + \int_a^\alpha \frac{p}{u}\cdot\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\cdot dx$$

Aber wegen Gleichung III reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \int_a^\alpha\left(\delta y + \frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx \times \int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung IV mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, und addire dieses Product zu VI; so ändert sich ${}_{(}\delta_{1)}U$ nicht im Geringsten.

Man setze noch

$$\text{VII)}\quad A = \int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

und führe dann die gehörige Umformung aus; so gibt sich

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \left(\frac{L\cdot p}{u}\right)_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \left(\frac{L\cdot p}{u}\right)_a\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_a + \int_a^\alpha\left[A - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{Lp}{u}\right)\right]\cdot{}_{(}\delta_{1)}y\cdot dx$$

Man bekommt also jetzt die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad A - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{L\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Man setze noch $L = A\cdot N$, so geht diese Gleichung über in

$$\text{X)}\quad dx - d\left(\frac{N\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XI)}\quad x + H = \frac{N\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{x+H}{\sqrt{N^2-(x+H)^2}}$, und somit gibt sich

$$\text{XII)}\quad (y+K)^2 + (x+H)^2 = N^2$$

Als Gränzengleichung hat man

$$\text{XIII)}\quad (\alpha + H)\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - (a+H)\cdot{}_{(}\delta_{1)}y_a = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{L}{N} = A = \int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$ weggelassen hat.

Um unterscheiden zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man Gleichung VI noch einmal, und beachte die in II ausgesprochene Bedingung; so bleibt nur

$$\text{XIV)}\quad {}_{(}\delta_{1)}^2U = \int_a^\alpha {}_{(}\delta_1)^2y\cdot dx \times \int_a^\alpha\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

Digitized by Google

Man mutire aber auch Gleichung III noch einmal, so gibt sich

$$\text{XV)} \quad \left(\frac{p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2 y_\alpha - \left(\frac{p}{u}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(-\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{u}\right) \right) \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2 y + \frac{1}{u^3} \left(\frac{d_{(\delta_1)} y}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx = 0$$

Man multiplicire diese Gleichung mit dem bereits schon einmal angewendeten Factor L, addire dieses Product zu XIV, und berücksichtige die Hauptgleichung IX; so bleibt nur

$$\text{XVI)} \quad {}_{(\delta_1)}{}^2 U = \left(\frac{Lp}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2 y_\alpha - \left(\frac{Lp}{u}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{L}{u^3} \left(\frac{d_{(\delta_1)} y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Es kommt also auf L an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Der Factor L selbst gibt sich aus der Gleichung

$$\text{XVII)} \quad L = A \cdot N = N \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Man hat hier drei willkürliche Constanten H, K, N. Zwei davon bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung XIII genügt. Dann kann man den dritten oder einen aus dem dritten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Functionen dem Integral $\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$ einen gleichgrossen Werth beilegen müssen; und wenn dieser bestimmt $= g$ sein soll, so hat man noch die Gleichung

$$\text{XVIII)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx = g$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die Function einer andern Bedingung unterworfen werden. (Alles nach dem Vorgange der Gränzfälle in der 214[ten] Aufg.)

Aufgabe 240.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$U = \int_a^\alpha x \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{px}{u} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha u \cdot dx + \int_a^\alpha xu \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{u} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Man setze (nach §. 232)

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha x \cdot (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Dadurch geht Gleichung I über in

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{(x + C) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

Durch die gewöhnliche Umformung bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{(x + C)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{(x + C)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a\right] \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2})\cdot dx$$
$$- \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x + C)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right]\cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2})\cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x + C)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{VI)}\quad \frac{(x + C)\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}} = E$$

Es ist also $\frac{dy}{dx} = \frac{E}{\sqrt{(x + C)^2 - E^2}}$, so dass

$$\text{VII)}\quad y = E \cdot \lg \text{nat} \frac{(x + C) + \sqrt{(x + C)^2 - E^2}}{H}$$

die gesuchte Function ist. Als Gränzengleichung hat man

$$\text{VIII)}\quad E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) = 0$$

Bei Bestimmung der Constanten muss noch die Gleichung II mitbenützt werden; diese geht aber über in

$$\int_a^\alpha \frac{x\cdot(x + C)\cdot dx}{\sqrt{(x + C)^2 - E^2}} = C\cdot\int_a^\alpha \frac{(x + C)\cdot dx}{\sqrt{(x + C)^2 - E^2}}$$

Aber weil C constant ist, so bleibt, indem man den rechten Theil der Gleichung vom linken subtrahirt, nur übrig

$$\text{IX)}\quad \int_a^\alpha \frac{(x + C)\,(x - C)\cdot dx}{\sqrt{(x + C)^2 - E^2}} = 0$$

Diese Gleichung ist nun zu integriren, und dann wird sich zeigen, ob die sich ergebende Integralgleichung zur Bestimmung der Constanten mitbenützt werden kann, oder ob sie einen Widerspruch in sich selbst enthält. Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man Gleichung I noch einmal. Dann benütze man die Gleichung II, führe die gehörige Umformung aus, beachte noch die Gleichungen V und VI, und setze wieder zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2}$; so bekommt man

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = E\cdot(\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) \times \int_a^\alpha u\cdot dx + 2\cdot\int_a^\alpha \frac{px}{u}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{p}{u}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{x + C}{u^3}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx \times \int_a^\alpha u\cdot dx$$

Diesen Ausdruck kann man nun noch auf verschiedene Weise umformen; so z. B. folgt aus Gleichung VI gradezu

$$\frac{px}{\sqrt{1 + p^2}} = E - \frac{C\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Es ist also

$$\int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1 + p^2}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx = \int_a^\alpha \left(E\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{C\cdot p}{\sqrt{1 + p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$
$$= E\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) - C\cdot\int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$

Wegen Gleichung VIII bleibt aber nur

Digitized by Google

$$\int_a^\alpha \frac{px}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx = - C \cdot \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Somit geht Gleichung X über in

$$\text{XI)} \quad \delta^2 U = E \cdot (\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a) \times \int_a^\alpha u \cdot dx - 2C \cdot \left[\int_a^\alpha \frac{p}{u} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx\right]^2$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{x+C}{u^3} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha u \cdot dx$$

Aufgabe 241.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha y \cdot dx \times \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während die gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei welchen allen nicht nur das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, sondern bei welchen allen auch noch das bestimmte Integral

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.

Man mutire die Ausdrücke II und III (nach §. 266 und 269, und nach der Einleitung in der 214ten Aufgabe), so bekommt man bezüglich

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_n y}{dx \cdot dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

und

$$\text{V)} \quad \int_a^\alpha x \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

Man mutire auch Gleichung I, und beachte Gleichung V, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad (\delta_2) U = \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

Um nun aus VI die abhängigen Elemente ϑm und ϑn zu eliminiren, multiplicire man die Gleichungen IV und V bezüglich mit den (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factoren K und L, addire diese beiden Producte zu VI, setze dann zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$, und führe die gewöhnliche Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VII)} \quad (\delta_2) U = K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot (\delta_2) y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot (\delta_2) y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[A + Lx - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{K \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot (\delta_2) y \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad A + L \cdot x - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{K \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Man setze noch $L = A \cdot M$ und $K = A \cdot N$, so geht diese Gleichung über in

$$\text{IX)}\quad 1 + Mx - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Np}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{X)}\quad \frac{M}{2} \cdot x^2 + x + F = \frac{N \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Also ist

$$\text{XI)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{M}{2} \cdot x^2 + x + F}{\sqrt{N^2 - \left(\frac{M}{2} \cdot x^2 + x + F\right)^2}}$$

Wenn man diese Gleichung integrirt, so geht noch ein Constanter E ein, so dass man im Ganzen vier willkürliche Constanten M, N, E, F zu bestimmen hat. Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{XII)}\quad \frac{K}{N} \cdot \left[\left(\frac{M}{2} \cdot \alpha^2 + \alpha + F\right) \cdot {}_{(}\delta_{2)}y_\alpha - \left(\frac{M}{2} \cdot a^2 + a + F\right) \cdot {}_{(}\delta_{2)}y_a\right] = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{K}{N}$ auch hätte weglassen können.

Zwei der vier Constanten E, F, M, N bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung genügt, dann kann man den dritten und vierten bezüglich mit m und n bezeichnen; und wenn man es angemessener oder bequemer findet, so kann man auch zwei aus dem dritten und vierten gebildete Ausdrücke durch m und n darstellen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Functionen nicht nur dem Integral $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$ einerlei Werth, sondern auch dem Integral $\int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$ einerlei Werth beilegen müssen; und wenn diesen Integralen bezüglich die festen Werthe h und g^3 zukommen sollen, so hat man die Gleichungen

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = h, \quad \text{und} \quad \text{XIV)}\quad \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx = g^3$$

welche dazu dienen, die Constanten m und n zu bestimmen. Fehlen aber letztere Gleichungen, so kann die gesuchte Function noch zwei weiteren Bedingungen unterworfen werden. (Alles nach Analogie der Gränzfälle in der 214ten Aufg.)

Um entscheiden zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man die Gleichungen IV, V, VI noch einmal. Dann bekommt man bezüglich

$$\text{XV)}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d_{(}\delta_{2)}^2 y}{dx} + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{2)}y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XVI)}\quad \int_a^\alpha x \cdot {}_{(}\delta_{2)}^2 y \cdot dx = 0$$

und, wenn man die Gleichungen V und XVI beachtet,

$$\text{XVII)}\quad {}_{(}\delta_{2)}^2 U = \int_a^\alpha {}_{(}\delta_{2)}^2 y \cdot dx \times \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

Nun multiplicire man die Gleichungen XV und XVI bezüglich mit den schon einmal angewendeten Factoren K und L, addire dann diese Producte zu XVII, setze wieder A statt $\int_a^\alpha xy \cdot dx$, und berücksichtige die Hauptgleichung; so bleibt nur

Digitized by Google

$$\delta_2{}^2 U = K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta_2{}^2 y_\alpha - K \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta_2{}^2 y_a$$
$$+ K \cdot \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta_2 y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Es kommt also auf K an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Die beiden Multiplicatoren K und L bestimmen sich durch die Gleichungen

$$L = A \cdot M = M \cdot \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

$$K = A \cdot N = N \cdot \int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$$

Aufgabe 242.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Quotient

$$U = \frac{\int_a^\alpha (\sin y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx}{\int_a^\alpha (\cos y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze hierauf B statt $\int_a^\alpha (\cos y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$, und

$$\text{I)} \quad \int_a^\alpha (\sin y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx = M \cdot \int_a^\alpha (\cos y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

so bekommt man als erste Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{1}{B} \cdot \int_a^\alpha \left[(\cos y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot \delta y + \frac{p \cdot \sin y}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right.$$
$$\left. + M \cdot (\sin y) \cdot (\sqrt{1+p^2}) \cdot \delta y - \frac{Mp \cdot \cos y}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \right] \cdot dx$$

Führt man jetzt die gehörige Umformung aus, so gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck:

$$\text{III)} \quad \delta U = \frac{1}{B} \cdot \left[\left(\frac{(\sin y - M \cdot \cos y) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{(\sin y - M \cdot \cos y) \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} \right)_a \cdot \delta y_a \right]$$
$$+ \frac{1}{B} \cdot \int_a^\alpha \left[(\cos y) \cdot \sqrt{1+p^2} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p \cdot \sin y}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right.$$
$$\left. + M \cdot (\sin y) \cdot \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Mp \cdot \cos y}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Daraus folgt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{IV)} \quad (\cos y)\,(\sqrt{1+p^2}) \cdot dx - d\left(\frac{p \cdot \sin y}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$
$$+ M \cdot (\sin y)\,(\sqrt{1+p^2}) \cdot dx + M \cdot d\left(\frac{p \cdot \cos y}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Man multiplicire diese ganze Gleichung mit $p = \frac{dy}{dx}$, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad (\cos y)\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dy - p\cdot d\left(\frac{p\cdot\sin y}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

$$+ M\cdot(\sin y)\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dy + M\cdot p\cdot d\left(\frac{p\cdot\cos y}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Diese Gleichung geht nun über in

$$d\left[(\sin y)\cdot\sqrt{1+p^2}\right] - \frac{p\cdot\sin y}{\sqrt{1+p^2}}\cdot dp - p\cdot d\left(\frac{p\cdot\sin y}{\sqrt{1+p^2}}\right)$$

$$- M\cdot d\left[(\cos y)\cdot\sqrt{1+p^2}\right] + M\cdot\frac{p\cdot\cos y}{\sqrt{1+p^2}}\cdot dp + Mp\cdot d\left(\frac{p\cdot\cos y}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Man vereinige den zweiten und dritten, sowie auch den fünften und sechsten Theilsatz, so bekommt man

$$d\left[(\sin y)\cdot\sqrt{1+p^2}\right] - d\left(p\cdot\frac{p\cdot\sin y}{\sqrt{1+p^2}}\right) - M\cdot d\left[(\cos y)\cdot\sqrt{1+p^2}\right]$$

$$+ M\cdot d\left(p\cdot\frac{p\cdot\cos y}{\sqrt{11+p^2}}\right) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich gradezu integriren, und es ist

$$(\sin y)\cdot\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2\cdot\sin y}{\sqrt{1+p^2}} - M\cdot(\cos y)\cdot\sqrt{1+p^2} + \frac{M\cdot p^2\cdot\cos y}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

Nach gehöriger Reduction ist aber

$$\text{VI)}\quad \sin y - M\cdot\cos y = C\cdot\sqrt{1+p^2}$$

Man setze $M = \operatorname{tg} N = \frac{\sin N}{\cos N}$, **so geht VI über in**

$$\text{VII)}\quad \frac{\sin(y-N)}{\cos N} = C\cdot\sqrt{1+p^2}$$

oder

$$\text{VIII)}\quad \sin(y-N) = C\cdot(\cos N)\cdot\sqrt{1+p^2}$$

Wenn man zur Abkürzung E statt $C\cdot\cos N$ **setzt, so bekommt man** $\sin(y-N) = E\cdot\sqrt{1+p^2}$, **und daraus folgt**

$$\text{IX)}\quad y - N = \operatorname{arc}\sin\left(E\cdot\sqrt{1+p^2}\right)$$

Also ist

$$\text{X)}\quad y = N + \operatorname{arc}\sin\left(E\cdot\sqrt{1+p^2}\right)$$

Differentiirt man diese Gleichung, so bekommt man $dy = \frac{E\cdot p\cdot dp}{\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot\sqrt{1-E^2\cdot(1+p^2)}}$; **und weil** $dy = p\cdot dx$, **so folgt aus letzterer Gleichung**

$$\text{XI)}\quad dx = \frac{E\cdot dp}{\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot\sqrt{1-E^2\cdot(1+p^2)}}$$

Wenn man diese Gleichung integrirt, geht noch ein weiterer Constanter ein. Dann hat man noch p zu eliminiren, und bekommt zwischen x und y eine Urgleichung mit drei Constanten, bei deren Bestimmung die Gleichung I, oder vielmehr

$$\text{XII)}\quad \int_a^\alpha (\sin y)\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx = (\operatorname{tg} N)\cdot\int_a^\alpha (\cos y)\left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx$$

mitbenützt werden muss. Kennt man aber $\operatorname{tg} N$, **so kennt man auch N selbst. Aus Gleichung VI folgt** $\frac{\sin y - M\cdot\cos y}{\sqrt{1+p^2}} = C = \frac{E}{\cos N}$; **und man hat als Gränzengleichung**

$$\text{XIII)}\quad \frac{1}{\cos N}\cdot\left(E\cdot p_\alpha\cdot\delta y_\alpha - E\cdot p_a\cdot\delta y_a\right) = 0$$

Und so fort.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., Seite 168 und 169).

Digitized by Google

Aufgabe 243.

Man sucht y als solche Function von x, dass das Product

$$U = \int_a^\alpha y \cdot dx \times y_\alpha^{\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann A statt $\int_a^\alpha y \cdot dx$, B statt y_α, und m statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U =$$

$$B^m \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx + mA \cdot B^{m-1} \cdot \delta y_\alpha + A \cdot B^m \cdot (\lg\text{nat}\,B) \cdot \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Man forme um, so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\delta U = B^m \cdot \int_a^\alpha \left[1 - A \cdot (\lg\text{ nat }B) \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ A \cdot B^m \cdot \left[\frac{m}{B} + (\lg\text{ nat }B)\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\right] \cdot \delta y_\alpha - A . B^m . (\lg\text{nat}\,B)\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{II)} \quad 1 - A \cdot (\lg\text{nat}\,B) \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt

$$\text{III)} \quad x + E = A \cdot (\lg\text{ nat }B) \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

und daraus folgt weiter

$$\text{IV)} \quad p = \frac{x + E}{\sqrt{(A \cdot \lg\text{ nat }B)^2 - (x + E)^2}}$$

Also ist durch die Gleichung

$$\text{V)} \quad (y + F)^2 + (x + E)^2 = (A \cdot \lg\text{ nat }B)^2 = R^2$$

die gesuchte Function gegeben.

Als Gränzengleichung hat man

$$\text{VI)} \quad \left(\frac{m}{B} + \frac{\alpha + E}{A}\right) \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{a + E}{A}\right) \cdot \delta y_a = 0$$

welche dadurch merkwürdig ist, dass die Ausdrücke an beiden Gränzen nicht gleichförmig sind.

Man hat hier drei willkürliche Constanten E, F, R. Zwei davon werden dadurch bestimmt, dass man der Gränzengleichung VI genügt; und bei Bestimmung des dritten muss die Gleichung $A \cdot \lg\text{ nat }B = R$, welche mit folgender

$$\text{VII)} \quad \left(\int_a^\alpha y \cdot dx\right) \cdot (\lg\text{ nat }y_\alpha) = R$$

gleichbedeutend ist, mitbenützt werden, d. h. man muss untersuchen, ob letztere Gleichung keinen Widerspruch mit sich selbst enthält.

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht keine Schwierigkeit entgegen.

Specieller Gränzfall. Soll die gesuchte Function unter allen möglichen herausgewählt werden, so dürfen die Werthe von y_a und y_α nicht vorgeschrieben sein. Dabei wird die Gränzengleichung nur erfüllt, wenn man sie in folgende zwei einzelne zerlegt

$$\text{VIII)} \quad \frac{m}{B} + \frac{\alpha + E}{A} = 0, \quad \text{und} \quad \text{IX)} \quad a + E = 0$$

Digitized by Google

Gleichung VIII ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$\text{X)}\quad \frac{\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx}{y_\alpha} + \frac{\alpha + E}{\int_a^\alpha y\cdot dx} = 0$$

Die Gleichungen VII, IX und X müssen in dem hiesigen speciellen Gränzfalle zur Bestimmung der drei Constanten E, F, R benützt werden.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc., S. 165 und 166).

Aufgabe 244.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$U = (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \int_a^\alpha y\cdot dx + y_\alpha \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann m statt $(\sqrt{1+p^2})_a$, B statt $\int_a^\alpha y\cdot dx$, C statt y_α, und E statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = B\cdot\left(\frac{p}{u}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + m\cdot\int_a^\alpha \delta y\cdot dx + E\cdot\delta y_\alpha + C\cdot\int_a^\alpha \frac{p}{u}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$

wo zur weitern Abkürzung noch u statt $\sqrt{1+p^2}$ gesetzt ist.

Man forme um, so bekommt man für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\delta U = B\cdot\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \left(E + \frac{C\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{C\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[m - C\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus folgt als Hauptgleichung

$$\text{II)}\quad m\cdot dx - C\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und daraus folgt weiter

$$\text{III)}\quad (y+C)^2 + (x+F)^2 = \frac{C^2}{m^2} = R^2$$

Als Gränzengleichung ergiebt sich

$$\text{IV)}\quad \frac{Bm}{C}\cdot(a+F)\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + (E + m\alpha + mF)\cdot\delta y_\alpha - m\cdot(a+F)\cdot\delta y_a = 0$$

welche dadurch merkwürdig ist, dass die Ausdrücke an beiden Gränzen nicht gleichförmig sind.

Man hat hier drei willkürliche Constanten F, G, R. Zwei davon werden dadurch bestimmt, dass man der Gränzengleichung IV genügt; und bei Bestimmung des dritten muss die Gleichung $\frac{C}{m} = R$, welche mit folgender

$$\text{V)}\quad \frac{y_\alpha}{\sqrt{1+p_a^2}} = R$$

gleichbedeutend ist, mit benützt werden, d. h. man muss untersuchen, ob letztere Gleichung keinen Wiederspruch mit sich selbst enthält.

Digitized by Google

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht keine Schwierigkeit entgegen.

Specieller Gränzfall. Soll die gesuchte Function unter allen möglichen herausgewählt werden, so dürfen die Werthe von y_a, y_α und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ nicht vorgeschrieben sein. Dabei wird aber die Gränzengleichung nur erfüllt, wenn man sie in folgende zwei einzelne zerlegt:

$$\text{VI)} \quad a + F = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{VII)} \quad E + n\alpha + mF = 0$$

Gleichung VII ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$\text{VIII)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx + (\alpha + F) \cdot (\sqrt{1 + p^2})_a = 0$$

Die Gleichungen V, VI, VIII müssen in dem hiesigen speciellen Gränzfalle zur Bestimmung der drei Constanten F, G, R benützt werden.

Schlussbemerkung. Diese Aufgabe, als solche, kommt schon vor in Euler's Werke (methodus inveniendi, etc. Seite 164 und 165.)

Aufgabe 245.

Welche unter allen zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckten räumlichen Curven ist es, bei welcher der Schwerpunkt des Bogens am höchsten oder tiefsten liegt?

Man nehme die Coordinatenebene YZ in horizontaler, dagegen die Abscissenaxe X in verticaler Richtung. Man hat also die Entfernung des Schwerpunktes von der horizontal liegenden Coordinatenebene YZ zu untersuchen, und diese Entfernung ist bekanntlich

$$U = \frac{\int_a^\alpha x(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx}$$

wo p und $\mathfrak{p}$ bezüglich statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ gesetzt sind. Man mutire, und setze zur Abkürzung im Nenner A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}) \cdot dx$, und dann durchweg u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \frac{1}{A^2} \cdot \left[\int_a^\alpha \left(\frac{px}{u}\,\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}x}{u}\,\frac{d\delta z}{dx}\right) dx \times \int_a^\alpha u \cdot dx \right.$$
$$\left. - \int_a^\alpha xu \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\frac{p}{u}\,\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{p}}{u}\,\frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx\right]$$

Man setze (nach §. 233)

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha x(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$$

so bekommt man nach den gehörigen Umformungen für die zweite Form des δU folgenden Ausdruck

$$\text{III)} \quad \delta U =$$
$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{(x-C)p}{u}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{(x-C)\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha - \left(\frac{(x-C)p}{u}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{(x-C)\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot \delta z_a\right]$$
$$- \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x-C)p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x-C)\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Digitized by Google

Man hat also die zwei Hauptgleichungen

$$\text{IV)}\quad d\left(\frac{(x - C) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \text{V)}\quad d\left(\frac{(x - C) \cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

Daraus folgt bezüglich

$$\text{VI)}\quad \frac{(x - C) \cdot p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = B \quad \text{und} \quad \text{VII)}\quad \frac{(x - C) \cdot \mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \mathfrak{B}$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen in einander, so gibt sich

$$\text{VIII)}\quad \frac{p}{\mathfrak{p}} = \frac{B}{\mathfrak{B}}$$

Daraus folgt

$$\text{IX)}\quad \mathfrak{B}y = Bz + F$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene, welche auf der Coordinatenebene YZ senkrecht steht. Die gesuchte Curve ist also eine ebene Curve. Eliminirt man p aus VI und VIII, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{\sqrt{(x - C)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}}$$

Daraus folgt

$$\text{XI)}\quad y = B \cdot \lg\cdot\text{nat}\, \frac{x - C + \sqrt{(x - C)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}}{K}$$

Die gesuchte Curve ist also die Kettenlinie, welche in einer auf der Coordinatenebene YZ senkrechten Ebene liegt. Die Gränzengleichung ist jetzt

$$\text{XII)}\quad B \cdot (\delta y_\alpha - \delta y_a) + \mathfrak{B} \cdot (\delta z_\alpha - \delta z_a) = 0$$

Bei Bestimmung der fünf Constanten B, $\mathfrak{B}$, C, F, K muss die Gleichung II mit benützt werden; diese geht aber jetzt über in

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha \frac{x \cdot (x - C) \cdot dx}{\sqrt{(x - C)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}} = C \cdot \int_a^\alpha \frac{(x - C) \cdot dx}{\sqrt{(x - C)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}}$$

Diese Gleichung kann auch dargestellt werden durch

$$\int_a^\alpha \frac{(x - C)^2 \cdot dx}{\sqrt{(x - C)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}} = 0$$

Von dieser Gleichung kann man (wie schon bei Gleichung X der 236sten Aufgabe geschehen ist) nachweisen, dass sie einen Wiederspruch mit sich selbst enthält, dass also die Aufgabe in der Weise, wie sie gestellt ist, gar keine Aufgabe ist. Die nächstfolgende Aufgabe wird noch eine Nebenbedingung stellen, und dadurch zu einem Resultate führen.

Aufgaben dieser Art sind sonst noch nie auf räumliche Curven ausgedehnt worden. Diese Bemerkung gilt auch von den Aufgaben 228, 246, 247.

Aufgabe 246.

Welche unter allen räumlichen Curven, die zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten gleiche Länge haben, hat ihren Schwerpunkt am höchsten oder tiefsten?

Verfahrt man, wie in voriger Aufgabe, so hat man jetzt für y und z solche Functionen von x zu suchen, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha z(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx}$$

Digitized by Google

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei der Ausdruck

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$$

immer den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Mutirt man den Ausdruck II, und setzt man dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \left(\frac{p}{u}\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right) + \frac{\mathfrak{p}}{u}\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right)\right) \cdot dx = 0$$

Man mutire auch Gleichung I, berücksichtige Gleichung III, und setze dann im Nenner A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx$, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad (\delta_1)U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \frac{x}{u} \cdot \left(p\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right) + \mathfrak{p}\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx.dm} \cdot \vartheta m\right)\right) \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung III mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, addire dieses Product zu IV, und führe die gewöhnliche Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)} \quad (\delta_1)U = \frac{1}{A}\left[\left(\frac{(x + AL)\,p}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)y_\alpha + \left(\frac{(x + AL)\,\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)z_\alpha - \left(\frac{(x + AL)\,p}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)y_a - \left(\frac{(x + AL)\,\mathfrak{p}}{u}\right)_a \cdot (\delta_1)z_a\right]$$
$$- \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left\{\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,p}{u}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \delta z \right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,p}{u}\right)\right)\frac{d_m y}{dm} + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,\mathfrak{p}}{u}\right)\right)\frac{d_m z}{dm}\right] \cdot \vartheta m\right\} \cdot dx$$

Damit das abhängige ϑm unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man den dazu gehörigen Factor eine identische Gleichung sein, d. h. man setze

$$\text{VI)} \quad \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,p}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} + \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{(x + AL)\,\mathfrak{p}}{u}\right)\right) \cdot \frac{d_m z}{dm} = 0$$

Damit auch die mit den untereinander unabhängigen Elementen δy und δz versehenen Theilsätze wegfallen, müssen noch die ferneren identischen Hauptgleichungen

$$\text{VII)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p\,(x + A \cdot L)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

und

$$\text{VIII)} \quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{\mathfrak{p}\,(x + A \cdot L)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}}\right) = 0$$

stattfinden. Man erkennt aber, dass alle diejenigen Functionen y und z von x, durch welche die Gleichungen VII und VIII identisch werden, auch die Gleichung VI identisch machen. Integrirt man VII und VIII, so gibt sich

$$\text{IX)} \quad \frac{p\,(x + AL)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = B, \quad \text{und} \quad \text{X)} \quad \frac{\mathfrak{p}\,(x + AL)}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \mathfrak{B}$$

Dividirt man beide Gleichungen ineinander, so gibt sich

$$\text{XI)} \quad \frac{p}{\mathfrak{p}} = \frac{B}{\mathfrak{B}}$$

Daraus folgt $\mathfrak{B} \cdot p = B \cdot \mathfrak{p}$, und somit ist wieder

$$\text{XII)} \quad \mathfrak{B} \cdot y = Bz + F$$

wie in voriger Aufgabe. Dieses ist wieder die Gleichung einer auf der Coordinaten-

Digitized by Google

ebene YZ senkrechten Ebene, die gesuchte Curve ist also wieder eine ebene Curve. Eliminirt man p aus IX und XI, so bekommt man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{\sqrt{(x + A \cdot L)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}}$$

Setzt man zur Abkürzung M statt AL, und integrirt man dann; so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad y = B \cdot \lg\text{nat} \frac{x + M + \sqrt{(x + M)^2 - (B^2 + \mathfrak{B}^2)}}{K}$$

Durch die beiden Gleichungen XII und XIII, welche zusammen fünf willkürliche Constanten B, $\mathfrak{B}$, F, K, M enthalten, ist die gesuchte räumliche Curve dargestellt. Diese ist aber eine ebene Curve, und zwar die Kettenlinie. Vier der fünf willkürlichen Constanten bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung

$$\text{XIV)} \quad B \cdot ((\delta_1 y)_\alpha - (\delta_1 y)_a) + \mathfrak{B} \cdot ((\delta_1 z)_\alpha - (\delta_1 z)_a) = 0$$

genügt. Dann kann man den fünften oder einen aus dem fünften gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven eine gleichgrosse Bogenlänge haben müssen; und wenn dieser Bogenlänge der bestimmte Werth g zukommen soll, so hat man noch die Gleichung

$$\text{XV)} \quad \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx = g$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die Curve einer andern Bedingung unterworfen werden. (Alles nach Analogie der Gränzfälle in der 214[ten] Aufg.)

Benützt man den bereits angewendeten Multiplicator L auch bei Herstellung des Prüfungsmittels, so bekommt man dafür folgenden Ausdruck

$$\text{XVI)} \quad \delta_1^2 U = \frac{1}{A} \cdot [B \cdot ((\delta_1^2 y)_\alpha - (\delta_1^2 y)_a) + \mathfrak{B} \cdot ((\delta_1^2 z)_\alpha - (\delta_1^2 z)_a)]$$

$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \frac{x + AL}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\left(p \frac{d\delta_1 z}{dx} - \mathfrak{p} \frac{d\delta_1 y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta_1 y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta_1 z}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Der Multiplicator L bestimmt sich durch die Gleichung $AL = M$, d. h. durch

$$\text{XVII)} \quad \left(\int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}) \cdot dx\right) \cdot L = M$$

Wenn also bei allen von a bis α liegenden Werthen des x die Summe $(x + AL)$ positiv bleibt, so findet ein Minimum-stand statt; wenn aber bei allen von a bis α liegenden Werthen des x diese Summe negativ bleibt, so findet ein Maximum-stand statt. Es kann nemlich der Kettenlinienbogen, ohne dass er seine Länge ändert, auf zweierlei Art zwischen zwei Punkten gezogen werden, d. h. er kann der Coordinatenebene YZ seine convexe oder concave Seite zukehren; und im ersten Falle findet ein Minimum-stand, im zweiten ein Maximum-stand statt.

Man sehe den Nachtrag hinter der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 247.

Man sucht unter denjenigen räumlichen Curven, bei welchen allen die goniometrische Tangente des von der Berührungslinie und der Coordinatenebene XY gebildeten Neigungswinkels eine bestimmte Function der Abscisse x ist, und deren zwischen den (zu den Abscissen a und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckte Bögen alle einerlei Länge haben, diejenige, deren Schwerpunkt am höchsten oder tiefsten liegt.

Digitized by Google

Man nehme die Coordinatenebene YZ in horizontalen, und die Abscissenaxe X in verticaler Lage; so ist die Entfernung des Schwerpunktes von der so gelegten Coordinatenebene YZ bekanntlich gegeben durch

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha x(\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2})\cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2})\cdot dx}$$

und dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, bei denen allen der Ausdruck

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2})\cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt, und bei denen allen (man sehe die Einleitung zur 190sten Aufgabe) noch die Gleichung,

$$\text{III)}\quad \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2}} = w$$

erfüllt wird.

Erste Auflösung.

Aus III folgt $\mathfrak{p} = w\cdot\sqrt{1+p^2}$, und somit gehen die Ausdrücke I und II bezüglich über

$$\text{IV)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha x(\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)})\cdot dx}{\int_a^\alpha (\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)})\cdot dx}$$

und in

$$\text{V)}\quad \int_a^\alpha (\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)})\cdot dx$$

Mutirt man den Ausdruck V, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \int_a^\alpha \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\left(p\,\frac{d\delta y}{dx} + p\,\frac{d_m d_x y}{dm.dx}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung IV, berücksichtige Gleichung VI, und setze dann im Nenner A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{(1+w^2)\cdot(1+p^2)})\cdot dx$; so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta_1 U = \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha \frac{x\,p\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung VI mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, addire dieses Product zu VII, und führe die gewöhnliche Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

$$\begin{aligned}\text{VIII)}\quad \delta_1 U = {} & \frac{1}{A}\left(\frac{(x+AL)p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta_1 y_\alpha - \frac{1}{A}\left(\frac{(x+AL)p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta_1 y_a \\ & - \frac{1}{A}\int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x+AL)p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\delta y \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x+AL)p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\frac{d_m y}{dm}\cdot\vartheta m\right]\cdot dx\end{aligned}$$

Digitized by Google

Damit aber das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man die identische Gleichung

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{(x+AL)\cdot p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0$$

stattfinden. Dabei wird auch der bei δy befindliche Factor zu Null, und Gleichung IX ist zugleich Hauptgleichung. Sie ist von der zweiten Ordnung, und durch ihre Integration gehen noch zwei willkürliche Constanten B und C ein. Gleichung III ist von der ersten Ordnung, und durch deren Integration geht noch ein fernerer Constanter E ein.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren: Man integrire Gleichung IX, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{(x+AL)\cdot p\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}}=B$$

Setzt man zur Abkürzung H statt AL; und sondert man p ab; so gibt sich

$$\text{XI)}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{B}{\sqrt{(x+H)^2\cdot(1+w^2)-B^2}}$$

Eliminirt man p aus III, so gibt sich

$$\text{XII)}\quad \frac{dz}{dx}=\frac{(x+H)\cdot w\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{(x+H)^2\cdot(1+w^2)-B^2}}$$

Um diese Gleichungen abermals integriren zu können, muss zuvor eine bestimmte Function von x an die Stelle des w gesetzt werden, sei es nun, dass diese Function nach Willkür genommen werden kann, oder dass sie auf irgend eine Weise vorgeschrieben ist. Durch Integration der Gleichung XI geht noch ein Constanter C, und durch Integration der Gleichung XII geht abermals ein Constanter E ein. Man hat also im Ganzen vier Constanten B, C, E, H. Zwei derselben bestimmen sich dadurch, dass man der Gränzengleichung, welche folgende Form

$$\text{XIII)}\quad B\cdot({}_{(}\delta_{1)}y_\alpha-{}_{(}\delta_{1)}y_a)=0$$

annimmt, genügt. Der dritte muss auf andere Weise bestimmt werden, wie dieses bereits in den Aufgaben 188, 189, 190 geschehen ist. Dann kann man den vierten Constanten oder einen aus dem vierten gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a und α alle in Betracht zu ziehenden Curven eine gleichgrosse Bogenlänge haben müssen; und wenn dieser Bogenlänge der feste Werth g zukommen soll, so hat man noch die Gleichung

$$\text{XIV)}\quad \int_a^\alpha(\sqrt{1+p^2+p^2})\cdot dx=g$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die gesuchte Curve noch einer andern Bedingung unterworfen werden.

Benützt man den bereits angewendeten Multiplicator L auch bei Herstellung des Prüfungsmittels, so bekommt man dafür folgenden Ausdruck

$$\text{XV)}\quad {}_{(}\delta_{1)}{}^2U=\frac{B}{A}({}_{(}\delta_{1)}{}^2y_\alpha-{}_{(}\delta_{1)}{}^2y_a)+\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\frac{(x+AL)\cdot\sqrt{1+w^2}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

woran man erkennt, dass es von der Summe $(x+AL)$ abhangt, ob ein Maximumstand oder Minimum-stand stattfindet. (Man sehe den Schluss zur vorigen Aufgabe.)

Der Multiplicator L bestimmt sich durch die Gleichung $AL=H$, welche mit folgender gleichbedeutend ist

$$\text{XVI)}\quad \left(\int_a^\alpha(\sqrt{(1+p^2)(1+w^2)})\cdot dx\right)\cdot L=H$$

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Aus III folgt die nach x identische Gleichung

$$\text{XVII)}\quad \mathfrak{p} - w\cdot\sqrt{1+p^2} = 0$$

Man multiplicire sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nicht constanten Function K von x, so ist auch das Product

$$K\cdot(\mathfrak{p} - w\cdot\sqrt{1+p^2}) = 0$$

noch eine identische Gleichung, und kann zu I unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XVIII)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha \left(K(\mathfrak{p} - w\cdot\sqrt{1+p^2}) + x\cdot\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}\right)\cdot dx}{\int_a^\alpha \left(\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}\right)\cdot dx}$$

Man mutire den Ausdruck II, und setze dann zur Abkürzung u statt $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$; so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad \int_a^\alpha \frac{1}{u}\left[\left(p\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right) + \mathfrak{p}\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)\right]\cdot dx = 0.$$

Man mutire auch Gleichung XVIII, berücksichtige Gleichung XIX, und setze dann zur Abkürzung A statt $\int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2})\cdot dx$, u statt $\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$, und v statt $\sqrt{1+p^2}$; und so bekommt man

$$\text{XX)}\quad \delta_1 U = \frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha \left[\left(K + \frac{x\mathfrak{p}}{u}\right)\cdot\frac{d(\delta_1 z)}{dx} + \left(-\frac{Kw\cdot p}{v} + \frac{x\cdot p}{u}\right)\cdot\frac{d(\delta_1 y)}{dx}\right]\cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm zu eliminiren, multiplicire man Gleichung XIX mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor L, addire dieses Product zu XX, und führe die gewöhnliche Umformung aus; so ist noch vollkommen genau

$$\text{XXI)}\quad \delta_1 U = \frac{1}{A}\Bigg[\left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)_\alpha\cdot(\delta_1 y)_\alpha + \left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha\cdot(\delta_1 z)_\alpha$$
$$- \left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)_a\cdot(\delta_1 y)_a - \left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)_a\cdot(\delta_1 z)_a\Bigg]$$
$$-\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha \Bigg\{\left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)\right]\cdot\delta y + \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)\right]\cdot\delta z$$
$$+\left[\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)\right)\frac{d_m y}{dm} + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)\right)\frac{d_m z}{dm}\right]\cdot\vartheta m\Bigg\}.dx$$

Damit aber das abhängige ϑm unter dem Integralzeichen wegfalle, lasse man den dazugehörigen Factor eine identische Gleichung sein, d. h. man setze

$$\text{XXII)}\quad \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)\right]\frac{d_m y}{dm} + \left[\frac{1}{dx}\cdot d\left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)\right]\frac{d_m z}{dm} = 0$$

Damit das mittelbare δz unterhalb des Integralzeichens wegfalle, muss die fernere identische Gleichung

$$\text{XXIII)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right) = 0$$

stattfinden; und damit die mittelbaren Elemente δz_α und δz_a auch ausserhalb des Integralzeichens wegfallen, bestimme man (nach Bd. I. S. 324) zwei der eingehenden Constanten so, dass auch noch die zwei Gleichungen

Digitized by Google

$$\text{XXIV)}\ \left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)_\alpha = 0 \ \text{und}\ \text{XXV)}\ \left(K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}\right)_a = 0$$

stattfinden. Man hat somit die Hauptgleichung

$$\text{XXVI)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXVII)}\ \left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - \left(-\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{1)}y_a = 0$$

Die Gleichungen XXIII und XXVI sind von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen vier willkürliche Constanten ein. Die Gleichung III ist von der ersten Ordnung, und durch deren Integration geht noch ein weiterer Constanter ein. Man hat daher ausser L noch fünf, somit im Ganzen sechs Constanten, von welchem jedoch zwei durch die Gleichungen XXIV und XXV bestimmt werden, so dass nur vier noch ihre Bestimmung erwarten, wie bei der ersten Auflösung.

Integrirt man Gleichung XXIII, so bekommt man

$$\text{XXVIII)}\quad K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u} = F$$

d. h. der Ausdruck $K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u}$ ist constant bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe der durch Integration eingehenden Constanten. Die Gleichungen XXIV und XXV gehen also über in die einzige

$$\text{XXIX)}\quad F = 0$$

Dadurch reducirt sich Gleichung XXIX auf

$$\text{XXX)}\quad K + \frac{(x+AL)\mathfrak{p}}{u} = 0$$

Man integrire XXVI, so bekommt man

$$\text{XXXI)}\quad -\frac{Kwp}{v} + \frac{(x+AL)p}{u} = B$$

Die Gränzengleichung XXVII reducirt sich also jetzt auf

$$\text{XXXII)}\quad B\cdot({}_{(}\delta_{1)}y_\alpha - {}_{(}\delta_{1)}y_a) = 0$$

Eliminirt man K aus XXX und XXXI, so bekommt man

$$\text{XXXIII)}\quad \frac{p\cdot(x+AL)\cdot(w\mathfrak{p} + \sqrt{1+p^2})}{(\sqrt{1+p^2})\cdot(\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} = B$$

Eliminirt man $\mathfrak{p}$ mittelst III, so geht XXXIII über in

$$\text{XXXIV)}\quad \frac{p\cdot(x+AL)\cdot\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+p^2}} = B$$

was genau wieder Gleichung X ist, so dass sich für y und z dieselben Functionen ergeben, wie bei der ersten Auflösung.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels beachte man die Gleichungen XXII, XXIII, XXVI, so wie auch, dass $F = 0$ ist. Hierauf eliminire man noch $\mathfrak{p}$ und $\frac{d_{(}\delta_{1)}z}{dx}$, indem man aus III die folgenden zwei Ausdrücke herstellt

$$\mathfrak{p} = w\cdot\sqrt{1+p^2},\ \text{und}\ \frac{d_{(}\delta_{1)}z}{dx} = \frac{w\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d_{(}\delta_{1)}y}{dx}$$

Hinsichtlich der Bestimmung der willkürlichen Constanten ist schon in der ersten Auflösung das Nöthige besprochen.

Digitized by Google

Diese ganze Auflösung konnte also durchgeführt werden, ohne dass es nöthig war, die Function K von x kennen zu lernen. Man sehe den Schluss des §. 251.

Diese Aufgabe hat das Eigenthümliche, dass von den zwei vorgeschriebenen Bedingungen die eine auf eine Differentialgleichung und die andere auf ein bestimmtes Integral geführt hat.

Aufgaben dieser Art sind anderwärts noch nie gestellt worden.

Aufgabe 248.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \left[\int_a^{x} (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx^2\right] \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch das Zeichen $\int_a^{x}\limits^{(2)} (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx^2$ ist (nach §. 7) ein zweimal wiederholendes einfaches Integral vorgestellt, d. h. es ist

$$\int_a^{x}\limits^{(2)} (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx^2 \text{ soviel als } \int_a^x \left(\int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx\right) \cdot dx$$

Man setze

$$\text{II)}\quad \int_a^{x}\limits^{(2)} (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx^2 = v$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha v \cdot dx$$

Wenn man Gleichung II zweimal differentiirt, so gibt sich die identische

$$\text{IV)}\quad \sqrt{1+p^2} - \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function K von x multiplicirt; so ist auch das Product $K \cdot \left(\sqrt{1+p^2} - \frac{d^2v}{dx^2}\right)$ noch eine identische Gleichung, und kann bei Gleichung III unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad U = \int_a^\alpha \left[v + K \cdot \left(\sqrt{1+p^2} - \frac{d^2v}{dx^2}\right)\right] \cdot dx$$

Man mutire, und forme um; so gibt sich für die zweite Form des δU folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}\text{VI)}\quad \delta U = &\left(\frac{K \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - K_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{dK}{dx}\right)_\alpha \cdot \delta v_\alpha \\ &- \left(\frac{K \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + K_a \cdot \left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_a - \left(\frac{dK}{dx}\right)_a \cdot \delta v_a \\ &+ \int_a^\alpha \left[\left(1 - \frac{d^2K}{dx^2}\right) \cdot \delta v - \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{K \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta y\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Digitized by Google

Ehe dieser Ausdruck weiter behandelt wird, mag zuvor noch folgende Nebenuntersuchung angestellt werden. Man schreibe Gleichung V auf folgende Weise:

$$\text{V)}\quad v = \int_a^x \left(\int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx \right) \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{VII)}\quad \delta v = \int_a^x \left[\int_a^x \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \right] \cdot dx$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 v = \int_a^x \left[\int_a^x \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right) \cdot dx \right] \cdot dx$$

etc. etc.

Wenn man die zwei letzten Gleichungen differentiirt, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \frac{d\delta v}{dx} = \int_a^x \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

$$\text{X)}\quad \frac{d\delta^2 v}{dx} = \int_a^x \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right)$$

etc. etc.

Setzt man $x = a$, so gehen die fünf letzten Gleichungen über in

$$\text{XI)}\quad v_a = \int_a^a \left[\int_a^x (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx \right] \cdot dx = 0$$

$$\text{XII)}\quad \delta v_a = \int_a^a \left[\int_a^x \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \right] \cdot dx = 0$$

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 v_a = \int_a^a \left[\int_a^x \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right) \cdot dx \right] \cdot dx = 0$$

$$\text{XIV)}\quad \left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_a = \int_a^a \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XV)}\quad \left(\frac{d\delta^2 v}{dx}\right)_a = \int_a^a \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right) + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right) \cdot dx = 0$$

etc. etc.

d. h. es ist

$$v_a = 0,\ \delta v_a = 0,\ \left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_a = 0,\ d^2 v_a = 0,\ \left(\frac{d\delta^2 v}{dx}\right)_a = 0,\ \text{etc.}$$

und durch diese Gleichungen ist eine Grundbedingung der Aufgabe mit ausgesprochen.

Damit das mittelbare δv unter dem Integralzeichen wegfalle, denke man sich unter K eine solche Function, dass die identische Gleichung

$$\text{XVI)}\quad 1 - \frac{d^2 K}{dx^2} = 0$$

stattfinde. Nun ist $\delta v_a = 0$ und $\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_a = 0$, wie bereits bewiesen. Damit also jede Spur der von v herrührenden Mutation verschwinde, bestimme man zwei der eingehenden Constanten so, dass die Gleichungen

$$\text{XVII)}\quad K_\alpha = 0, \quad \text{und} \quad \text{XVIII)}\quad \left(\frac{dK}{dx}\right)_\alpha = 0$$

stattfinden. Gleichung VI reducirt sich also auf

$$\text{XIX)}\quad \delta U = \left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - \int_a^\alpha \left[\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right) \right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Digitized by Google

Man hat sonach die Hauptgleichung

$$\text{XX)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XXI)}\quad \left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{Kp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Gleichung XVI ist von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen zwei willkürliche Constanten ein. Die Gleichung XX ist ebenfalls von der zweiten Ordnung, und durch deren Integration gehen wieder zwei willkürliche Constanten ein. Man wird also im Ganzen vier solcher Constanten bekommen. Zwei davon werden, wie gesagt, durch die Gleichungen XVII und XVIII bestimmt; und die beiden andern erhalten dadurch ihre Bestimmung, dass der Gränzengleichung XXI genügt wird.

Integrirt man Gleichung XVI, so bekommt man successive

$$\text{XXII)}\quad \frac{dK}{dx} = A + x$$

$$\text{XXIII)}\quad K = B + Ax + \frac{1}{2}\cdot x^2$$

wo A und B die zwei durch die Integration eingegangenen Constanten sind. Damit den Gleichungen XVII und XVIII genügt werde, muss

$$B + A\alpha + \frac{1}{2}\cdot\alpha^2 = 0 \quad \text{und} \quad A + \alpha = 0$$

sein. Daraus folgt $A = -\alpha$ und $B = +\frac{1}{2}\cdot\alpha^2$; und somit geht XXIII über in

$$\text{XXIV)}\quad K = \frac{1}{2}\cdot(\alpha - x)^2$$

Integrirt man Gleichung XX, so gibt sich

$$\text{XXV)}\quad \frac{K\cdot p}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

d. h. der Ausdruck $\frac{K\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}$ ist constant bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$. (In dieser Beziehung vergleiche man sorgfältig den auf Seite 461 befindlichen Zusatz.) Gleichung XX geht also über in

$$\text{XXVI)}\quad C\cdot\delta y_\alpha - C\cdot\delta y_a = 0$$

Aus XXV folgt $p = \frac{C}{\sqrt{K^2 - C^2}}$, oder vielmehr

$$\text{XXVII)}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot(\alpha - x)^4 - C^2}}$$

Indem man diese Gleichung weiter integrirt, geht noch ein Constanter E ein, so dass man für y eine Function mit den zwei willkürlichen Constanten C und E bekommt, welche dadurch bestimmt werden, dass man der Gränzengleichung XXVI genügt.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels mutire man Gleichung V zum zweiten Male, forme dann um, und berücksichtige alles Vorhergehende; so bekommt man

$$\text{XXVIII)}\quad \delta^2 U = C\cdot\delta^2 y_\alpha - C\cdot\delta^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{K}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\cdot dx$$

Da nun $K = \frac{1}{2}\cdot(\alpha - x)^2$ positiv ist, so ist auch der zu $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ gehörige Factor positiv. Folglich findet ein Minimum-stand statt.

Digitized by Google

Schlussbemerkung. Die hier von mir gestellte Aufgabe wäre nicht durchführbar gewesen, wenn ich nicht gezeigt hätte, dass die Gleichungen

$$\delta v_a = 0, \ \left(\frac{d\delta v}{dx}\right)_a = 0, \ \delta^2 v_a = 0, \ \left(\frac{d\delta^2 v}{dx}\right)_a = 0, \text{ etc.}$$

eine Grundbedingung ausmachen.

Es ist überflüssig, solcher Aufgaben noch mehrere aufzustellen; denn sie alle können ohneweiters von den wiederholenden Integralen befreit, und dann mittelst Bedingungsgleichungen gelöst werden, wie dieses schon früher bei einfacheren Aufgaben (man vergleiche Aufg. 209—213) geschehen ist.

B) Aufgaben, wo Functionen mit mehr als einem absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht werden.

Aufgabe 249.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, bei welcher der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta (x^2 + y^2 - mz) \cdot z \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

Weil die Werthe von a, α, b, β nicht gesucht zu werden brauchen, sondern entweder bestimmt gegeben oder beliebig sind, also auch nicht mit ihren nächstanliegenden Nachbarwerthen verglichen werden müssen; desshalb kann hier nur im Allgemeinen von einem Maximum-stande oder Minimum-stande, und nicht von einem Maximumwerthe oder Minimumwerthe die Rede sein (vergl. §. 112). Die Werthe von a, α, b, β sind also als constant zu betrachten, jedoch mit steter Rücksicht, dass $\alpha > a$ und $\beta > b$, d. h. dass die Differenzen $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ positiv sind. Man mutire, so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta (x^2 + y^2 - 2mz) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta [(x^2 + y^2 - 2mz) \cdot \delta^2 z - 2m \cdot \delta z^2] \cdot dy \cdot dx$$

Aus $\delta U = 0$ folgt $z = \frac{1}{2m} \cdot (x^2 + y^2)$. Die gesuchte Fläche ist also die des Rotationsparaboloids, erzeugt von der zu der Gleichung $z = \frac{x^2}{2m}$ gehörigen und um die Axe Z rotirenden Parabel. Weil $\delta U = 0$, so reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{III)} \quad \delta^2 U = -2m \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z^2 \cdot dy \cdot dx$$

Dieser Ausdruck bleibt (nach §. 10) bei jeder beliebigen für δz zu nehmenden Function von x und y negativ; und somit ist

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad U' = \frac{(\alpha - a)\cdot(\beta - b)}{4m}\cdot\Big[\frac{1}{5}\cdot(\alpha^4 + \alpha^3\cdot a + \alpha^2\cdot a^2 + \alpha\cdot a^3 + a^4$$

$$+ \beta^4 + \beta^3\cdot b + \beta^2\cdot b^2 + \beta\cdot b^3 + b^4) + \frac{2}{9}\cdot(\alpha^2 + \alpha\cdot a + a^2)\cdot(\beta^2 + \beta\cdot b + b^2)\Big]$$

ein Maximum-stand. Aber eben weil die hier gefundene Function $z = \frac{1}{2m}\cdot(x^2 + y^2)$ von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen allen andern beliebigen Gränzen $x = a'$ und $y = b'$ bis $x = \alpha'$ und $y = \beta'$, wenn nur $\alpha' > a'$ und $\beta' > b'$ ist, einen Maximum-stand; denn auch dabei ist $\delta^2 U$ immer negativ.

Aufgabe 250.

Man sucht z als solche Function der beiden nichtmutablen und unter sich unabhängigen Veränderlichen x und y, dass folgender Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha\int_b^\beta\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot z^2 + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(x^2 + y^2 - z^2)^2}\right)\cdot dy\cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand, d. h. grösser oder kleiner wird, als bei allen andern der gesuchten Function bei jedem Werthe des x und des y nächstanliegenden Nachbarfunctionen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon im Anfange der vorigen Aufgabe auseinandergesetzt. Man mutire, so bekommt man

$$\delta U = 2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta\frac{\left(-m^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 - z^2}\right)\cdot z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 - z^2}}\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$

Erstens. Man lasse den Zähler des zu δz gehörigen Factors zu Null werden; und dieses geschieht, entweder wenn $z = 0$, oder wenn $\left(-m^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 - z^2}\right) = 0$ gesetzt wird.

I) Ist $z = 0$, d. h. ist z eine identische Function von x und y; so ist

$$\delta^2 U = 2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta\frac{-m^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}\cdot\delta z^2\cdot dy\cdot dx$$

woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet, so lange $m^2 > (x^2 + y^2)$, und dass ein Minimum-stand stattfindet, so lange $m^2 < (x^2 + y^2)$.

II) Ist $\left(-m^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x^2 + y^2 - z^2}\right) = 0$, so bekommt man $z = \sqrt{x^2 + y^2 - m^2}$. Dabei ist aber

$$\delta^2 U = -\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta(\sqrt{x^2 + y^2 - m^2})^2\cdot\delta z^2\cdot dy\cdot dx$$

Da nun $(x^2 + y^2 - m^2)$ positiv sein muss, weil sonst z imaginär wäre; so ist $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ; es findet also ein Maximum-stand statt.

Zweitens. Man lasse den Nenner des zu δz gehörigen Factors zu Null werden; so ist $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, d. h. es ist $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dabei wird

$$U' = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta(x^2 + y^2)\cdot dy\cdot dx$$

oder

Digitized by Google

$$U' = \frac{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}{3 \cdot m^{\frac{2}{3}}} \cdot (\alpha^2 + a \cdot \alpha + a^2 + \beta^2 + b \cdot \beta + b^2)$$

Zur Prüfung, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von diesen beiden Zuständen stattfinde, setze man $(U' + \Delta U)$ an die Stelle des U, und

$(\sqrt{x^2 + y^2}) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \ldots$ oder kurzweg $(\sqrt{x^2 + y^2}) + \varkappa \cdot \mathfrak{P}$ statt z in die ursprüngliche Gleichung ein, und entwickle eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe; so bekommt man

$$\Delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{3}{2} \cdot (-2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{2}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{2}{3}} + \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{m^{\frac{2}{3}}} (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + \ldots\right) \cdot dy \cdot dx$$

Weil aber $\varkappa$ von den Integrationselementen ganz unabhängig ist, so kann man $\varkappa$ auch ausserhalb des Integralzeichens setzen, und schreiben

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \cdot (-2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \frac{2}{m^{\frac{2}{3}}} \cdot \varkappa \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta (\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \mathfrak{P} \cdot dy \cdot dx + \ldots\ldots$$

Dieser Ausdruck ist sowohl bei positivem als negativem $\varkappa$ reell; denn weil das Radical $\sqrt[3]{(x^2 + y^2 - z^2)^2}$ gleich anfangs nur nach seiner reellen Bedeutung vorausgesetzt ist, so dürfen auch die Radicale $\varkappa^{\frac{2}{3}}$ und $\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}$ nur nach ihrer reellen Bedeutung genommen werden. Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist ΔU positiv; und somit findet diesmal ein Minimum-stand statt.

Aufgabe 251.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck: und man sucht z als solche Function der beiden nichtmutablen und untereinander unabhängigen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) auseinandergesetzt. Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$ und q statt $\frac{d_y z}{dy}$; so bekommt man vorerst

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{III)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}$$

$$+ \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz . dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2 \cdot \frac{d_z d_q V}{dz \cdot dq} \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$+ \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp . dq} \cdot \frac{d_x dz}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\Big] \cdot dy \cdot dx$$

Digitized by Google

Man berücksichtige, dass die durch $\frac{d_pV}{dp}$ und $\frac{d_qV}{dq}$ repräsentirten Ausdrücke das x und y sowohl unmittelbar als auch mittelbar in z, $\frac{d_xz}{dx}$, $\frac{d_yz}{dy}$ enthalten; und man beachte, dass die durch δz, $\frac{d_x\delta z}{dx}$, $\frac{d_y\delta z}{dy}$, $\delta^2 z$, $\frac{d_x\delta^2 z}{dx}$, $\frac{d_y\delta^2 z}{dy}$, etc. vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x und y zu behandeln sind. Nach allem diesem ist also

$$\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\cdot\delta z\right)=\left(\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)\right)\cdot\delta z+\frac{d_pV}{dp}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

Daraus folgt gradezu

$$\text{IV)}\quad \frac{d_pV}{dp}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}=\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\cdot dz\right)-\left(\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)\right)\cdot\delta z$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\cdot\delta z\right)=\left(\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)\cdot\delta z+\frac{d_qV}{dq}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$

und daraus folgt gradezu

$$\text{V)}\quad \frac{d_qV}{dq}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}=\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\cdot\delta z\right)-\left(\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)\cdot\delta z$$

Führt man diese Ausdrücke in II ein, so bekömmt man zunächst

$$\text{VI)}\quad \delta U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\left(\frac{d_zV}{dz}-\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)-\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)\cdot\delta z\right.$$
$$\left.+\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\cdot\delta z\right)+\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\cdot\delta z\right)\right]\cdot dy\cdot dx$$

Die zwei letzten dieser Theilsätze lassen eine einfache Integration zu; und führt man diese aus, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\frac{d_zV}{dz}-\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)-\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right]\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$
$$+\int_b^\beta\left[\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}-\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\right]\cdot dy$$
$$+\int_a^\alpha\left[\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,\beta}\cdot\delta z_{x,\beta}-\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,b}\cdot\delta z_{x,b}\right]\cdot dx$$

Auf die nemliche Weise kann man Gleichung III umformen, und bekommt

$$\text{VIII)}\quad \delta^2U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\frac{d_zV}{dz}-\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)-\frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right]\cdot\delta^2 z\cdot dy\cdot dx$$
$$+\int_b^\beta\left[\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{\alpha,y}\cdot\delta^2 z_{\alpha,y}-\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{a,y}\cdot\delta^2 z_{a,y}\right]\cdot dy$$
$$+\int_a^\alpha\left[\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,\beta}\cdot\delta^2 z_{x,\beta}-\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,b}\cdot\delta^2 z_{x,b}\right]\cdot dx$$
$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\frac{d_z^2V}{dz^2}\cdot\delta z^2+2\cdot\frac{d_zd_pV}{dz.dp}\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}+2\cdot\frac{d_zd_qV}{dz.dq}\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2+2\cdot\frac{d_pd_qV}{dp.dq}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}+\frac{d_q^2V}{dq^2}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Man hat jetzt dafür zu sorgen, dass die für ΔU herzustellende Reihe kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält. Man

Digitized by Google

ist aber, eben weil man dem δU zwei verschiedene Formen geben kann, gezwungen, auch beide Formen besonders zu untersuchen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für ΔU herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wenn eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen

$$1)\quad \frac{d_zV}{dz} = 0, \quad \frac{d_pV}{dp} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_zV}{dz} = 0, \quad \frac{d_pV}{dp} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = \frac{\mathfrak{K}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_zV}{dz} = 0, \quad \frac{d_pV}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_zV}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \quad \frac{d_pV}{dp} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = 0.$$

$$5)\quad \frac{d_zV}{dz} = 0, \quad \frac{d_pV}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = \frac{\mathfrak{K}}{0}$$

$$6)\quad \frac{d_zV}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \quad \frac{d_pV}{dp} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = \frac{\mathfrak{K}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_zV}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \quad \frac{d_pV}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = 0$$

$$8)\quad \frac{d_zV}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \quad \frac{d_pV}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = \frac{\mathfrak{K}}{0}$$

stattfindet. Alle diese Gleichungen müssen bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y gelten, sind also identische Gleichungen, und sie können rückwärts noch eben dazu benützt werden, zu bestimmen, was $z = \varphi(x, y)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Wie aber eine Function von zwei willkürlichen Veränderlichen aufgefunden wird, welche dreien Gleichungen, die auch noch Partialdifferentialgleichungen sein können, zugleich genügt, ist aus den Aufgaben 133—153 hinlänglich zu ersehen.

Weil aber die gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ aus einem der acht Systeme (1—8) entnommen wird, so erkennt man gradezu, dass die Gränzen a, b, α, β, welche sie auch immer sein mögen, auf die hier gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ durchaus keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Das Prüfungsmittel gewinnt man durch die schon oft erwähnte und angewendete Reihenentwickelung. Hat man aber namentlich die gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ aus dem ersten der obigen acht Systeme dreier Gleichungen, d. h. aus den drei gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\frac{d_zV}{dz} = 0, \quad \frac{d_pV}{dp} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_qV}{dq} = 0$$

entnommen; so sind, weil $\frac{d_pV}{dp} = 0$ und $\frac{d_qV}{dq} = 0$ identische Gleichungen sind, auch $\frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right) = 0$ und $\frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right) = 0$ identische Gleichungen; und es werden nicht nur zwischen den Gränzen $x = a$ und $y = b$ bis $x = \alpha$ und $y = \beta$, sondern auch zwischen allen andern beliebigen Gränzen die beiden (in II und VII stehenden) Formen des δU zu Null, und die beiden (in III und VIII aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z^2V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz.dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2 \cdot \frac{d_z d_q V}{dz.dq} \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \right.$$
$$\left. + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Digitized by Google

Man hat also noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Ausdruck beständig positiv oder negativ bleibt. Man bezeichne das, was aus $\frac{d_z^2V}{dz^2}$, $\frac{d_zd_pV}{dz.dp}$, $\frac{d_zd_qV}{dz.dq}$, $\frac{d_p^2V}{dp^2}$, $\frac{d_pd_qV}{dp.dq}$, $\frac{d_q^2V}{dq^2}$ hervorgeht, wenn man für z die gefundene Function setzt, bezüglich mit M, N, P, Q, R, S; und um soviel als möglich zu integriren, setze man für das unbestimmte bei $x = a$ und $y = b$ anfangende Integral folgende Gleichung

$$X)\ \int_a^x\int_b^y\Big[M\cdot\delta z^2 + 2\cdot N\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + 2\cdot P\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + Q\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2\cdot R\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + S\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\Big]\cdot dy\cdot dx$$

$$= \int_b^y[(\eta\cdot\delta z^2)_{x,y} - (\eta\cdot\delta z^2)_{a,y}]\cdot dy + \int_a^x[(\omega\cdot\delta z^2)_{x,y} - (\omega\cdot\delta z^2)_{x,b}]\cdot dx$$

$$+ \int_a^x\int_b^y\Big[F\cdot\delta z^2 + 2\cdot E\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + 2D\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + C\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2B\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + A\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\Big]\cdot dy\cdot dx$$

Nun differentiire man auf beiden Seiten nach x und nach y; so gibt sich

$$M\cdot\delta z^2 + 2\cdot N\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + 2\cdot P\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + Q\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2R\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + S\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 = \frac{d_x\eta}{dx}\cdot\delta z^2 + 2\cdot\eta\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ \frac{d_y\omega}{dy}\cdot\delta z^2 + 2\cdot\omega\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + F\cdot\delta z^2 + 2E\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ 2D\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + C\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2B\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + A\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2$$

und wenn man ordnet, so bekommt man

$$\left(M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - F\right)\cdot\delta z^2 + 2\cdot(N - \eta - E)\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$+ 2\cdot(P - \omega - D)\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + (Q - C)\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2$$

$$+ 2\cdot(R - B)\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + (S - A)\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 = 0$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Function δz von x und y; sie zerfällt also (nach §. 95) in folgende einzelne Gleichungen, die nach x und nach y identisch sind:

$$M - \frac{d_x\eta}{dx} - \frac{d_y\omega}{dy} - F = 0$$

$$N - \eta - E = 0$$

$$P - \omega - D = 0$$

$$Q - C = 0$$

$$R - B = 0$$

$$S - A = 0$$

und daraus folgt

$$A = S = \frac{d_q^2V}{dq^2}$$

$$B = R = \frac{d_pd_qV}{dp.dq}$$

Digitized by Google

$$C = Q = \frac{d_p^2 V}{dp^2}.$$

$$D = P - \omega = \frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega$$

$$E = N - \eta = \frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta$$

$$F = M - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy} = \frac{d_z^2 V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}$$

Man erkennt also, dass A, B, C vollkommen bestimmt sind; dagegen sind D, E, F erst dann bestimmt, wenn man einmal weiss, was η und ω für Functionen von x und y sind. Da aber durchaus keine Bedingung vorhanden ist, welcher die Functionen ω und η genügen müssen; so sind ω und η ganz willkürliche Functionen von x und y. Man kann daher ω und η so annehmen, dass der Ausdruck

$$\text{XI)} \quad F \cdot \delta z^2 + 2E \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2D \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + C \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2B \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

auf die Form

$$\text{XII)} \quad A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2$$

kommt. Diese Form entwickelt, gibt

$$\text{XIII)} \quad A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2A\mathfrak{A} \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2A\mathfrak{B} \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \delta z + (A \cdot \mathfrak{A}^2 + A_1) \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot (A\mathfrak{A}\mathfrak{B} + A_1 \cdot \mathfrak{C}) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \delta z + (A \cdot \mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2) \cdot \delta z^2$$

Vergleicht man jetzt XI mit XIII, so ergeben sich folgende einzelne Gleichungen

$$A = A, \quad \mathfrak{A} = \frac{B}{A}, \quad \mathfrak{B} = \frac{D}{A},$$

$$A_1 = \frac{A \cdot C - B^2}{A}, \quad \mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2}$$

und

$$F = A \cdot \mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2$$

welche letztere Gleichung aber kein Stück enthält, das nicht schon bestimmt wäre; und wenn man für $\mathfrak{B}$, A_1, $\mathfrak{C}$ die Ausdrücke einsetzt, so geht sie über in

$$\text{XIV)} \quad F \cdot (B^2 - AC) = 2 \cdot BDE - C \cdot D^2 - A \cdot E^2$$

welche Gleichung nothwendig existiren muss, wenn der Ausdruck XI auf die Form XII soll gebracht werden können. (Man sehe §. 12.) Gleichung XIV ist aber gleichbedeutend mit folgender:

$$\text{XV)} \quad \left(\frac{d_z^2 V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx} - \frac{d_y \omega}{dy}\right) \cdot \left[\left(\frac{d_p d_q V}{dp . dq}\right)^2 - \frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2}\right]$$
$$= 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp . dq} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega\right) \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right)$$
$$- \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega\right)^2 - \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right)^2$$

Dieses ist eine Partialdifferentialgleichung des ersten Grades der ersten Ordnung.

Man beachte sorgfältig, dass zwischen den beiden Functionen ω und η keine weitere Abhängigkeit stattfindet, als die, welche in letzterer Gleichung ausgesprochen ist; und grade dieser Umstand bietet die Mittel, welche später benützt werden müssen.

Digitized by Google

Die Gleichung X, welche, indem sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu jedem beliebigen Werthe des x und des y erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ und $y = b$ bis zu $x = \alpha$ und $y = \beta$ erstreckt wird. Der in IX für $\delta^2 U$ aufgestellte Ausdruck nimmt also jetzt folgende Form an:

$$\text{XVI)} \quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta [(\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha,y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a,y}] \cdot dy + \int_a^\alpha [(\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

wo, wie man bereits dargethan hat

$$\mathfrak{B} = \frac{D}{A} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega \right)$$

und

$$\mathfrak{C} = \frac{AE - BD}{AC - B^2} = \frac{1}{AC - B^2} \left[A \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta \right) - B \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega \right) \right]$$

ist. Vergleicht man aber die beiden in IX und XVI aufgestellten Formen des $\delta^2 U$, so erkennt man:

1) Die Veränderlichkeit des $\delta^2 U$ ist ganz unabhängig von den Functionen ω und η, sobald beide solche zusammengehörige sind, dass dabei der Gleichung XV genügt wird, d. h. man bekommt jedesmal den irgend einem δz entsprechenden wahren Werth des $\delta^2 U$, sobald die beiden Functionen ω und η solche zusammengehörige sind, dass dabei der Gleichung XV genügt wird. Da ferner unter δz nur eine reelle Function von x und y gedacht werden darf, so sind

2) die quadratischen Ausdrücke

$$\left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 \text{ und } \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2$$

positiv, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ reell sind. Also ist bei reellen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ das Aggregat

$$\text{XVII)} \quad A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right) + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2$$

jedenfalls positiv oder jedenfalls negativ, wenn A und A_1 gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind. A und A_1 sind aber gleichzeitig positiv, wenn A, C und $(AC - B^2)$, d. h. wenn die drei Ausdrücke

$$\frac{d_p^2 V}{dp^2}, \quad \frac{d_q^2 V}{dq^2} \text{ und } \left[\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp . dq} \right)^2 \right]$$

gleichzeitig positiv sind. Ebenso sind A und A_1 gleichzeitig negativ, wenn A und C negativ, dagegen $(AC - B^2)$ positiv. Wenn also $\alpha > a$ und $\beta > b$, so ist das bestimmte Integral

$$\text{XVIII)} \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

jedesmal positiv oder negativ, je nachdem das in XVII aufgestellte Aggregat selbst beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch zugleich dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δz entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, es mögen die Functionen ω und η sein, was sie wollen, wenn sie nur in solcher Beziehung zusammenstehen, dass Gleichung XV erfüllt wird; so kann man auf folgende Weise den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen: Man denke sich unter ω eine Function von nur x, und zwar eine solche, die bei jedem Werthe des x zu Null wird, also eine identische Function von x. Hierbei ist dann auch der Ausdruck

$$\text{XIX)} \quad (\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b} = 0$$

d. h. auch dieser Ausdruck ist identisch Null, es mag δz was immer für eine beliebige Function von x und y sein. Wenn aber ω kein y enthält, so ist auch $\frac{d_y \omega}{dy} = 0$, und Gleichung XV reducirt sich auf

$$\text{XX)} \quad \left(\frac{d_z^2 V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) \cdot \left(\left(\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\right)^2 - \frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d_z d_q V}{dz.dq} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz.dp} - \eta\right) - \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz.dq}\right)^2 - \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz.dp} - \eta\right)^2$$

Diese Gleichung, aus welcher ω ganz weggefallen ist, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, $\pi(y)$ gebildeten Ausdruck, wo $\pi(y)$ eine durchaus willkürliche Function von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Function $\pi(y)$ kann man nach der bald so bald so beliebig genommenen Function δz von x und y auch jedesmal bald so bald so einrichten, dass die identische Gleichung

$$\text{XXI)} \quad (\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha, y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a, y} = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung XVI auf

$$\text{XXII)} \quad \delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left(A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

und man erkennt, dass jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von A und A_1 abhängig ist, d. h. wenn man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt, und dabei

1) jeder der Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ und $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ sowie auch der Ausdruck

$$\left(\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\right)^2\right)$$

beständig positiv bleiben, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; wenn aber dabei

2) jeder der Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ und $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ negativ, dagegen der Ausdruck

$$\left(\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\right)^2\right)$$

positiv bleibt, so ist $\delta^2 U$ negativ.

Hieraus ergibt sich die höchst beachtenswerthe Regel: „Der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv oder negativ, wenn folgender Ausdruck

$$\frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt.“ (Man vergleiche §. 11.)

Dabei beachte man noch: Wenn der Ausdruck $\left(\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\right)^2\right)$ bei einigen oder gar bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y zu Null wird, so behält vorstehende Regel immer noch ihre Giltigkeit; sie ver-

Digitized by Google

liert aber ihre Giltigkeit, sobald einer der Quotienten $\frac{d_z^2 V}{dz^2}$, $\frac{d_z d_p V}{dz.dp}$, $\frac{d_z d_q V}{dz.dq}$, $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$, $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$, $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ bei irgend einem Werthe des x und des y die im Calcul unzulässige Form $\frac{M}{0}$ annimmt. Wenn aber nicht bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y einer der Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ oder $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ oder der Ausdruck $\left[\frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} - \left(\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\right)^2\right]$ den obigen Bedingungen entspricht; so ist es (man sehe §. 10) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde, sondern dieses muss noch besonders nachgewiesen werden.

Wenn aber bei allen diesen Werthen des x und des y der Quotient $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ zu Null wird, so kann nur dann ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden, wenn bei allen diesen Werthen des x und des y auch noch die Quotienten $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$ und $\frac{d_z d_q V}{dz.dq}$ zu Null werden; und es hangt dann vom Zeichenstande des einzigen Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Wenn es dagegen der Fall ist, dass bei allen diesen Werthen des x und des y der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ zu Null wird, so kann nur dann ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden, wenn bei allen diesen Werthen des x und des y auch noch die Quotienten $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$ und $\frac{d_z d_p V}{dz.dp}$ zu Null werden; und es hangt dann vom Zeichenstande des einzigen Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Wenn aber bei jedem von a bis α und von b bis β liegendem Werthe des x und des y die drei Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$, $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$, $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ zu Null werden; so kann nur dann von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein, wenn gleichzeitig auch noch $\frac{d_z d_p V}{dz.dp}$ und $\frac{d_z d_q V}{dz.dq}$ zu Null werden; und dann hangt es von dem einzigen Quotienten $\frac{d_z^2 V}{dz^2}$ ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Da die Gränzen a, α, b, β durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande. Allein eben diese Function $z = \varphi(x, y)$ muss in der Regel drei Gleichungen identisch machen, eine Bedingung, die bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in VII aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function $z = \varphi(x, y)$ gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function $z = \varphi(x, y)$ gesucht wird, ist aber diejenige, welche am häufigsten vorkommt, und fast jedesmal möglich ist.

Digitized by Google

A) Man zerlege die Gleichung VII zunächst in folgende zwei:

$$\text{XXIII)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right) = 0$$

und

$$\text{XXIV)}\quad \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y}\cdot \delta z_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y}\cdot \delta z_{a,y}\right]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta}\cdot \delta z_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b}\cdot \delta z_{x,b}\right]\cdot dx = 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung, und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung gilt bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y, und wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung sein. Ist sie aber wirklich von der zweiten Ordnung, so nimmt ihr allgemeines Integral zwei willkürliche Functionen in sich auf, während unter jenen singulären Integralen, die keine willkürliche Function enthalten, keines mit mehr als mit fünf neuen willkürlichen Constanten versehen sein kann, die nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren. Die Gränzengleichung hat schon die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden; auch wird sie sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der zweiten Ordnung ist. (Man sehe Aufgabe 259.)

Gleichung VIII reducirt sich nun jedenfalls auf

$$\delta^2 U = \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y}\cdot \delta^2 z_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y}\cdot \delta^2 z_{a,y}\right]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta}\cdot \delta^2 z_{x,\beta} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{x,b}\cdot \delta^2 z_{x,b}\right]\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta \left[\frac{d_z^2 V}{dz^2}\cdot \delta z^2 + 2\cdot\frac{d_z d_p V}{dz.dp}\cdot \delta z\cdot\frac{d_x \delta z}{dx} + 2\cdot\frac{d_z d_q V}{dz.dq}\cdot\delta z\cdot\frac{d_y \delta z}{dy}\right.$$

$$\left. + \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_p d_q V}{dp.dq}\cdot\frac{d_x \delta z}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq^2}\cdot\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Schaut man aber (auf Gleichung XVI) zurück, so erkennt man, dass man letzterem Ausdrucke auch folgende Form geben kann:

$$\text{XXV)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 z + \eta\cdot\delta z^2\right)_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 z + \eta\cdot\delta z^2\right)_{a,y}\right]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\cdot\delta^2 z + \omega\cdot\delta z^2\right)_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq}\cdot\delta^2 z + \omega\cdot\delta z^2\right)_{x,b}\right]\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta \left[A\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{A}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{B}\cdot\delta z\right)^2 + A_1\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{C}\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Auch hier ist der Werth des $\delta^2 U$ ganz unabhängig von den beiden Functionen ω und η, sobald diese solche zusammengehörige sind, dass dabei der Gleichung XV genügt wird.

Nun mögen einige specielle Fälle betrachtet werden.

Erster Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass folgende nach x identische Gleichungen $\delta z_{x,b} = 0$, $\delta z_{x,\beta} = 0$, $\delta^2 z_{x,b} = 0$, $\delta^2 z_{x,\beta} = 0$, etc., und dass zugleich auch folgende nach y identische Gleichungen $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, etc. stattfinden; so fällt die Gränzengleichung XXIV von selbst hinweg, und Gleichung XXV reducirt sich gradezu auf

Digitized by Google

$$\text{XXVI)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left[A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

Zweiter Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass von den Ausdrücken $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{a,y}$, $\delta z_{x,\beta}$, $\delta z_{x,b}$, $\delta^2 z_{\alpha,y}$, $\delta^2 z_{a,y}$, $\delta^2 z_{x,\beta}$, $\delta^2 z_{x,b}$, etc. kein einziger zu Null wird; so wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn die vier Gleichungen

$$\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y} = 0, \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} = 0, \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta} = 0, \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b} = 0,$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XXV auf

$$\text{XXVII)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta [(\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha,y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a,y}] \cdot dy + \int_a^\alpha [(\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

und man hat jetzt wieder das nemliche Verfahren vorzunehmen, wie schon bei Gleichung XVI geschehen ist.

Dritter Fall. Wenn zwischen $\delta z_{\alpha,y}$ und $\delta z_{a,y}$, wenn ebenso zwischen $\delta z_{x,\beta}$ und $\delta z_{x,b}$ eine Abhängigkeit stattfindet; so findet auch zwischen $\delta^2 z_{\alpha,y}$ und $\delta^2 z_{a,y}$, und auch zwischen $\delta^2 z_{x,\beta}$ und $\delta^2 z_{x,b}$ eine Abhängigkeit statt. Man eliminire $\delta z_{a,y}$, $\delta^2 z_{a,y}$, $\delta z_{x,b}$ und $\delta^2 z_{x,b}$, so werden dabei die zu $\delta^2 z_{\alpha,y}$ und zu $\delta^2 z_{x,\beta}$ gehörigen Coefficienten zu Null; und Gleichung XXV geht über in folgende Form:

$$\text{XXVIII)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta (F + G \cdot (\eta)_{a,y} + (\eta)_{\alpha,y}) \cdot \delta z^2_{\alpha,y} \cdot dy + \int_a^\alpha (H + K \cdot (\omega)_{x,b} + (\omega)_{x,\beta}) \cdot \delta z^2_{x,\beta} \cdot dx$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left(A \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{B} \cdot \delta z \right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \delta z \right)^2 \right) \cdot dy \cdot dx$$

Man denke sich unter ω eine solche Function des einzigen Veränderlichen x, dass die identische Gleichung

$$\text{XXIX)}\quad H + K \cdot \omega_x + \omega_x = 0$$

stattfindet. Wenn aber in ω kein y enthalten ist, so ist $\frac{d_y \omega}{dy} = 0$; und Gleichung XV reducirt sich auf

$$\text{XXX)}\quad \left(\frac{d_z^2 V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) \cdot \left(\left(\frac{d_p d_q V}{dp . dq}\right)^2 - \frac{d_p^2 V}{dp^2} \times \frac{d_q^2 V}{dq^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp . dq} \cdot \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega\right) \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right) - \frac{d_p^2 V}{dp^2} \left(\frac{d_z d_q V}{dz . dq} - \omega\right)^2 - \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right)^2$$

Diese Gleichung, in welche die für ω genommene Function als bereits eingeführt gedacht wird, enthält nur den einzigen partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x \eta}{dx}$; man bekommt also, wenn man integrirt, für η einen aus x, y, $\pi(y)$ gebildeten Ausdruck, wo $\pi(y)$ eine durchaus willkürliche Function von y ist. Aber eben diese in η enthaltene willkürliche Function $\pi(y)$ kann man noch so benützen, dass die identische Gleichung

$$\text{XXXI)}\quad F + G \cdot (\eta)_{a,y} + (\eta)_{\alpha,y} = 0$$

stattfindet. Wegen Gleichung XXIX und XXXI reducirt sich XXVIII auf die Form XXII. etc. Die Kennzeichen, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, oder weder als positiv

Digitized by Google

noch negativ gelten kann, sind also genau dieselben, welche schon zu Gleichung XXII aufgestellt worden sind.

Um sich in diese Specialitäten näher einzufinden, vergleiche man die hieher bezüglichen Aufgaben, welche später folgen werden.

B) Hat man nun diese mit der zweiten Form des δU unternommene Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung VII zurück, ob man nicht dem zu δz gehörigen Factor

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{G}}{0}$ beilegen kann, etc. etc. (Dergleichen Fälle mögen dann nach Analogie der Aufgaben 163, 164, 165 behandelt werden.)

Schlussbemerkung. Poisson hat, wie schon einmal gesagt, eine Abhandlung über Variationscalcul geschrieben, welche sich in dem (im Jahre 1833 gedruckten) XII^{ten} Bande der Pariser Mémoiren befindet, und eigentlich den Zweck hat, die Untersuchungen, wo Doppelintegrale mutirt werden, zu vervollständigen.

Ueber diese Abhandlung ist zu bemerken:

1) Poisson befasst sich nur mit allgemeiner Theorie, und vervollkommnet sie, insofern sie sich auf die Gränzengleichungen bezieht. Dagegen führt er

2) keine einzige specielle Aufgabe durch, womit er seine ohnehin so schwierige Untersuchung in ihren Einzelheiten hätte beleuchten können. Er hat zwar versprochen, specielle Aufgaben in einem späteren Mémoir nachzuliefern; allein dieses ist nicht erschienen. Auch hat er

3) es nicht unternommen, den bei Doppelintegralen sich für $\delta^2 U$ ergebenden Ausdruck zu untersuchen, d. h. die Merkmale festzustellen, an denen man erkennt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von beiden stattfindet; und so kann man sagen, dass Poisson in seiner Abhandlung eigentlich nur die Hälfte dessen geleistet habe, was man erwarten konnte.

Ich habe diese Untersuchung ausgeführt, und auch hiermit eine der Lücken ausgefüllt, welche mir meine Vorgänger überlassen haben. (Man vergleiche die letzten Zeilen von §. 242.)

Als Fortsetzung lese man noch die Schlussb. zu Aufgabe 265.

Aufgabe 252.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht z als solche Function der beiden nichtmutablen und untereinander unabhängigen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Inwieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) auseinandergesetzt. Uebrigens ist diese Aufgabe ein specieller Fall der vorigen, und kann desshalb kurz durchgeführt werden. Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und mutire; so bekommt man vorerst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz}\cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d_x \delta z}{dx}\right)\cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z V}{dz}\cdot \delta^2 z + \frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_z^2 V}{dz^2}\cdot \delta z^2 \right.$$
$$\left. + 2\cdot\frac{d_z d_p V}{dz . dp}\cdot \delta z\cdot\frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dy \cdot dx$$

Man berücksichtige, dass der durch $\frac{d_p V}{\delta p}$ repräsentirte Ausdruck das x und y sowohl

Digitized by Google

unmittelbar als auch mittelbar in z und $\frac{d_x z}{dx}$ enthält; und man beachte, dass die durch δz, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\delta^2 z$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx}$, etc. vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x und y zu behandeln sind. Formt man nun (nach dem Vorgange der vorigen Aufgabe) um; so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right] \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta^2 z\right.$$

$$\left. + \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz \cdot dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Man hat jetzt dafür zu sorgen, dass die für ΔU herzustellende Reihe kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält. Man ist aber, eben weil man dem δU zwei verschiedene Formen geben kann, gezwungen, auch beide Formen besonders zu untersuchen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für ΔU herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wenn eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$1)\quad \frac{d_z V}{dz} = 0, \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_z V}{dz} = 0, \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_z V}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_z V}{dz} = \frac{\mathfrak{G}}{0}, \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{H}}{0}$$

stattfindet. Alle diese Gleichungen müssen bei jedem Werthe des x und des y gelten, sind also identische Gleichungen; und sie können rückwärts noch eben dazu benützt werden, zu bestimmen, was $z = \varphi(x, y)$ für eine Function ist, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Wie aber eine Function zweier willkürlicher Veränderlicher aufgefunden wird, welche zweien Gleichungen, die auch noch Partialdifferentialgleichungen sein können, zugleich genügt, ist aus den Aufgaben 133—153 hinlänglich zu ersehen.

Weil aber die gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ aus einem der vier Systeme (1—4) entnommen wird, so erkennt man gradezu, dass die Gränzen a, α, b, β, welche sie auch immer sein mögen, auf die hier gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ durchaus keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Das Prüfungsmittel gewinnt man durch die schon oft erwähnte und angewandte Reihenentwicklung; und hat man namentlich die gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$ aus dem ersten der obigen vier Systeme

$$\frac{d_z V}{dz} = 0, \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

Digitized by Google

entnommen; so ist, weil $\frac{d_p V}{dp} = 0$ eine identische Gleichung ist, auch $\frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$ eine identische Gleichung; und es werden nicht nur zwischen den Gränzen $x = a$ und $y = b$ bis $x = \alpha$ und $y = \beta$, sondern auch zwischen allen andern beliebigen Gränzen die beiden (in II und IV aufgestellten) Formen des δU zu Null; und die beiden (in III und V stehenden) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{VI)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz . dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

Und diesem Ausdrucke kann man (nach dem Vorgange der vorigen Aufgabe) folgende Form geben:

$$\text{VII)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left((\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha, y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a, y}\right) \cdot dy + \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

wo $\mathfrak{A} = \frac{1}{\frac{d_p^2 V}{dp^2}} \cdot \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right)$ ist, und die Function η durch folgende Partialdifferentialgleichung des ersten Grades der ersten Ordnung

$$\text{VIII)} \quad \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_z^2 V}{dz^2} - \frac{d_x \eta}{dx}\right) = \left(\frac{d_z d_p V}{dz . dp} - \eta\right)^2$$

bestimmt wird. Sie gibt, da sie nur $\frac{d_x \eta}{dx}$ und nicht auch $\frac{d_y \eta}{dy}$ enthält, für η einen aus x, y, $\pi(y)$ gebildeten Ausdruck, wo $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist.

Vergleicht man VI und VII, so erkennt man:

1) dass die Veränderlichkeit des $\delta^2 U$ ganz unabhängig ist von der Veränderlichkeit der in η enthaltenen willkürlichen Function $\pi(y)$, d. h. man bekommt jedesmal den irgend einem δz entsprechenden wahren Werth des $\delta^2 U$, es mag $\pi(y)$ was immer für eine Function von y sein. Da ferner unter δz nur eine reelle Function von x und y gedacht werden darf, so ist

2) der quadratische Ausdruck $\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2$ positiv, wenn $\mathfrak{A}$ reell ist. Also ist bei reellem $\mathfrak{A}$ das Product

$$\text{IX)} \quad \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2$$

jedenfalls positiv oder jedenfalls negativ, wenn $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ positiv oder negativ. Wenn also $\alpha > a$, und $\beta > b$ ist; so ist das bestimmte Integral

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

jedenfalls positiv oder negativ, wenn $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und dann bei jedem einzelnen Werthe des y auch noch dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δz entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, es mag die Function $\pi(y)$ sein, was sie will; so kann man auf folgende Weise den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen: Hat man sich einmal unter dem willkürlichen δz irgend eine Function von x und y gedacht, so kann man für $\pi(y)$ noch eine solche Function des einzigen y nehmen, dass die identische Gleichung

$$\text{X)} \quad (\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha, y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a, y} = 0$$

Digitized by Google

stattfindet. Dabei reducirt sich Gleichung VII auf

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

und man erkennt jetzt, dass der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ abhängig ist. Dabei beachte man, dass, wenn dieser Quotient bei einigen von a bis α liegenden Werthen des x und bei einigen von b bis β liegenden Werthen des y zu Null wird, die vorstehende Regel ihre Giltigkeit noch behält; wenn aber dieser Quotient nicht bei allen diesen Werthen des x und des y einerlei Zeichen behält, so ist dieses (man sehe §. 10) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde, sondern dieses müsste noch besonders nachgewiesen werden. Dagegen verliert vorstehende Regel ihre Giltigkeit, sobald einer der Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$, $\frac{d_z d_p V}{dz.dp}$, $\frac{d_z^2 V}{dz^2}$ bei irgend einem von a bis α liegenden Werthe des x und bei irgend einem von b bis β liegenden Werthe des y die Form $\frac{M}{0}$ annimmt. Ist aber bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x und bei jedem von b bis β möglichen Werthe des y sowohl $\frac{d_p^2 V}{dp^2} = 0$ als auch $\frac{d_z d_p V}{dz.dp} = 0$; dann ist $\delta^2 U$ positiv oder negativ, wenn der Quotient $\frac{d_z^2 V}{dz^2}$ bei allen besagten Werthen des x und des y positiv oder negativ bleibt. (Dieses erkennt man ohneweiters, wenn man auf Gleichung VI zurückschaut.)

Da die Gränzen a, α, b, β durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $z = \varphi(x, y)$; so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande. Allein eben diese Function muss in der Regel zwei Gleichungen zugleich identisch machen, eine Bedingung, welche bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in IV aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function $z = \varphi(x, y)$ gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function $z = \varphi(x, y)$ gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und fast jedesmal möglich ist.

A) Man zerlege nun Gleichung IV zunächst in folgende zwei:

$$\text{XII)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$$

und

$$\text{XIII)}\quad \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy = 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung, und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung gilt bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y, und wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung sein. Ist sie aber wirklich von der zweiten Ordnung, so enthält sie dennoch nur die beiden Partialdifferentialquotienten $\frac{d_x z}{dx}$ und $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$; und desshalb werden die in das allge-

Digitized by Google

meine Integral eingehenden zwei willkürliche Functionen auch nur y enthalten, und durchaus keine Functionen von x und y zugleich sein, während unter jenen singulären Integralen, die keine willkürliche Function von y enthalten, keines mit mehr als mit zwei neuen willkürlichen Constanten versehen sein kann, die nicht schon in der Hauptgleichung selbst enthalten waren. Die Gränzengleichung hat schon die Werthe a und α in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden, auch wird sie sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der zweiten Ordnung ist.

Berücksichtigt man die Hauptgleichung, und nimmt man die geeignete Umformung vor; so kann man Gleichung V auf folgende Gestalt bringen:

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 z + \eta\cdot\delta z^2\right)_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 z + \eta\cdot\delta z^2\right)_{a,y}\right]\cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A}\cdot\delta z\right)^2\cdot dy\cdot dx$$

wo $\mathfrak{A} = \frac{1}{\frac{d_p^2 V}{dp^2}}\cdot\left(\frac{d_z d_p V}{dz.dp} - \eta\right)$ ist, und die Function η durch Gleichung VIII bestimmt wird. Auch hier ist der Werth des $\delta^2 U$ ganz unabhängig von der Function η. Nun mögen einige specielle Fälle besonders betrachtet werden.

Erster Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass die nach y identischen Gleichungen $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, etc. stattfinden; so fällt die Gränzengleichung von selbst weg, und Gleichung XIV reducirt sich gradezu auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A}\cdot\delta z\right)^2\cdot dy\cdot dx$$

Zweiter Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass von den Ausdrücken $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{a,y}$, $\delta^2 z_{\alpha,y}$, $\delta^2 z_{a,y}$, etc. kein einziger zu Null wird; so wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn die zwei Gleichungen

$$\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y} = 0, \text{ und } \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XIV auf VII; und es gelten die schon dort gemachten Bemerkungen, um diese Gleichung auf die Form XI zu bringen.

Dritter Fall. Wenn zwischen $\delta z_{\alpha,y}$ und $\delta z_{a,y}$ eine Abhängigkeit stattfindet; so findet auch zwischen $\delta^2 z_{\alpha,y}$ und $\delta^2 z_{a,y}$ eine Abhängigkeit statt. Man eliminire $\delta z_{a,y}$ und $\delta^2 z_{a,y}$: so wird dann der zu $\delta^2 z_{\alpha,y}$ gehörige Coefficient zu Null; und man bekommt für $\delta^2 U$ folgende Form:

$$\delta^2 U = \int_b^\beta [\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\cdot(\eta)_{a,y} + (\eta)_{\alpha,y}]\cdot\delta z_{\alpha,y}^2\cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A}\cdot\delta z\right)^2\cdot dy\cdot dx$$

Nun weiss man, dass, wenn man Gleichung VIII integrirt, sich für η ein aus x, y, $\varkappa(y)$ zusammengesetzter Ausdruck ergibt. Die willkürliche Function $\varkappa(y)$ kann man dann so annehmen, dass die identische Gleichung

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\cdot(\eta)_{a,y} + (\eta)_{\alpha,y} = 0$$

stattfindet. Die Kennzeichen, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann, sind also genau dieselben, welche schon zu Gleichung XI aufgestellt worden sind.

Digitized by Google

Um sich in diese Specialitäten näher einzufinden, vergleiche man die Aufgaben, welche folgen werden.

B) Hat man nun diese mit der zweiten Form des δU hier unternommene Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung IV zurück, ob man nicht dem zu δz gehörigen Factor

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{G}}{0}$ beilegen kann, etc. etc. (Dergleichen Aufgaben mögen dann nach Analogie der Aufgaben 163, 164, 165 behandelt werden.)

Aufgabe 253.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(z + x \cdot \frac{d_x z}{dx} + y \cdot \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert. Man setze zur Abkürzung p anstatt $\frac{d_x z}{dx}$, und mutire; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\delta z + x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 2y \cdot p \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\delta^2 z + (x + 2y \cdot p) \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man führe die gehörige Umformung aus, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_b^\beta \left((x + 2y \cdot p)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - (x + 2y \cdot p)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right) \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(-2y \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(x + 2y \cdot p)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} - (x + 2y \cdot p)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(-2y \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right) \cdot \delta^2 z + 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Da der zu δz gehörige Factor $= 1$ ist, also nicht zu Null werden, und nicht die Form $\frac{\mathfrak{Q}}{0}$ annehmen kann; so erkennt man, dass die erste Form des δU nicht weiter beachtet zu werden braucht. Es gibt also keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden könnte.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

Digitized by Google

$$\text{V)} \quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)} \quad \int_b^\beta \left[(x + 2y \cdot p)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - (x + 2y \cdot p)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy = 0$$

Das allgemeine Integral zu Gleichung V ist

$$\text{VII)} \quad z = x \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

wo $\xi(y)$ und $\chi(y)$ zwei ganz willkürliche Functionen von y sind. Die Gränzengleichung VI geht also jetzt über in

$$\text{VIII)} \quad \int_b^\beta \left[(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta z_{\alpha, y} - (a + 2y \cdot \xi(y) \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy = 0$$

und die Gleichung IV reducirt sich auf

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} - (a + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta^2 z_{a, y}\right] \cdot dy + \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Um aber diesen Ausdruck nach dem Vorgange der 152sten Aufgabe umformen zu können, setze man

$$\text{X)} \quad \int_a^x \int_b^y 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx = \int_b^y \left((\eta \cdot \delta z^2)_{x, y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a, y}\right) \cdot dy + \int_a^x \int_b^y 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Man differentiire diese Gleichung nach x und nach y, und bringe alle Theilsätze auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\left(\frac{d_x \eta}{dx} + 2y \cdot \mathfrak{A}^2\right) \cdot \delta z^2 + 2 \cdot (\eta + 2y \cdot \mathfrak{A}) \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} = 0$$

Da nun diese Gleichung bei jeder beliebigen Function δz von x und y gelten soll, so zerfällt sie in folgende einzelne Gleichungen, die nach x und nach y identisch sind:

$$\eta + 2y \cdot \mathfrak{A} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_x \eta}{dx} + 2y \cdot \mathfrak{A}^2 = 0$$

Eliminirt man $\mathfrak{A}$ aus diesen beiden Gleichungen, so bekommt man

$$\frac{d_x \eta}{dx} + \frac{\eta^2}{2y} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$\text{XI)} \quad \eta = \frac{2y}{x - \pi(y)}$$

wo $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Zugleich ist jetzt $\mathfrak{A} = -\frac{\eta}{2y} = -\frac{1}{x - \pi(y)}$; und Gleichung IX geht über in

$$\text{XII)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} + \frac{2y}{\alpha - \pi(y)} \cdot \delta z^2_{\alpha, y} - (a + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta^2 z_{a, y} - \frac{2y}{a - \pi(y)} \cdot \delta z^2_{a, y}\right] \cdot dy + \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Digitized by Google

Man ist nunmehr auf dem Punkte, die Gränzgleichung zu erfüllen. Zu diesem Ende soll aber zuvor noch folgende Betrachtung gemacht werden. Die gesuchte Fläche ist dargestellt durch

$$z = x \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

Alle der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen sind dargestellt durch

$$\text{XIII)}\quad z + \Delta z = x \cdot \xi(y) + \chi(y) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo bekanntlich $\varkappa$ einen im Momente des Verschwindens befindlichen (positiven oder negativen) Werth hat, durch δz eine ganz beliebige Function von x und y, durch $\delta^2 z$ eine ebenfalls ganz beliebige Function von x und y, etc. etc. dargestellt ist. Wenn man nun in dem Endpunkte der Abscisse a eine auf die Axe X senkrechte also mit YZ parallele Ebene errichtet; so wird sie von der gesuchten Fläche nach einer ebenen Curve geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$\text{XIV)}\quad x = a$$

und

$$\text{XV)}\quad z_{a,y} = a \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

Dieselbe senkrechte Ebene wird aber von den der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach ebenen Curven geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$\text{XVI)}\quad x = a$$

und

$$\text{XVII)}\quad z_{a,y} + \Delta z_{a,y} = a \cdot \xi(y) + \chi(y) + \varkappa \cdot \delta z_{a,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z_{a,y} + \ldots\ldots\ldots$$

Wenn man ebenso im Endpunkte der Abscisse α eine auf die Axe X senkrechte also mit YZ parallele Ebene errichtet; so wird sie von der gesuchten Fläche nach einer ebenen Curve geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$\text{XVIII)}\quad x = \alpha$$

und

$$\text{XIX)}\quad z_{\alpha,y} = \alpha \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

Dieselbe Ebene wird aber von den der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach ebenen Curven geschnitten, derer beide Gleichungen folgende sind:

$$\text{XX)}\quad x = \alpha$$

und

$$\text{XXI)}\quad z_{\alpha,y} + \Delta z_{\alpha,y} = \alpha \cdot \xi(y) + \chi(y) + \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + \ldots\ldots\ldots$$

Erster Fall. Es sind in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechte Ebenen errichtet. In der ersten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$1)\quad x = a$$

und

$$2)\quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

In der zweiten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$3)\quad x = \alpha$$

und

$$4)\quad z = C + E \cdot y$$

Alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen sollen durch diese beiden Curven begränzt werden: und dieses ist nur der Fall, wenn bei jedem Werthe des y die durch XV und

Digitized by Google

die durch XVII dargestellten Curven nach ihrer ganzen Ausdehnung in einander hineinfallen, und wenn ebenso bei jedem Werthe des y die durch XIX und XXI dargestellten Curven nach ihrer ganzen Ausdehnung in einander fallen. Aus Gleichung XV und XVII ergibt sich also bei dieser Bedingung folgende neue Gleichung:

$$a \cdot \xi(y) + \chi(y) = a \cdot \xi(y) + \chi(y) + \varkappa \cdot \delta z_{a,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z_{a,y} + \ldots\ldots$$

und aus den Gleichungen XIX und XXI gibt sich folgende neue:

$$\alpha \cdot \xi(y) + \chi(y) = \alpha \cdot \xi(y) + \chi(y) + \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z_{\alpha,y} + \ldots\ldots$$

Da aber diese zwei Gleichungen bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten sollen; so sind sie nur möglich, wenn bei jedem Werthe des y die einzelnen Gleichungen $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, etc. stattfinden. Aber eben weil die Gleichungen $\delta z_{\alpha,y} = 0$ und $\delta z_{a,y} = 0$ identische Gleichungen sind, so fällt jetzt die Gränzengleichung VI oder VIII von selbst weg, und die willkürlichen Functionen $\xi(y)$ und $\chi(y)$ in VII bestimmen sich durch folgende zwei Gleichungen:

$$a \cdot \xi(y) + \chi(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$\alpha \cdot \xi(y) + \chi(y) = C + E \cdot y$$

Daraus folgt

$$\xi(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot (C + (E - A) \cdot y - B \cdot y^2)$$

und

$$\chi(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot (- a \cdot C + (\alpha A - aE) \cdot y + \alpha B \cdot y^2)$$

Man hat also jetzt folgende von den Gränzen a und α abhängige, dagegen von den Gränzen b und β unabhängige Fläche:

$$\text{XXII)} \quad z = \frac{1}{\alpha - a} \cdot \Big((C + Ey) \cdot (x - a) + (A + By) \cdot (\alpha - x) \cdot y\Big)$$

Weil aber auch die Gleichungen $\delta^2 z_{a,y} = 0$ und $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$ identische Gleichungen sind; so ziehen sich die Gleichungen IX und XII bezüglich auf

$$5) \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

und

$$6) \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

zurück. Dass aber dieser zweite für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck denselben Werth hat, wie der erste; davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen: Gleichung 6 geht gradezu über in

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 2y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z^2\right)\right) \cdot dy \cdot dx$$

Wendet man auf das angezeigte Differential eine Integration nach x an, so bekommt man

$$\delta^2 U = \int_b^\beta \left(\left(-\frac{2y}{\alpha - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{\alpha,y} - \left(-\frac{2y}{a - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{a,y}\right) \cdot dy + \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Digitized by Google

und wenn man beachtet, dass $\delta z_{a,y} = 0$ und $\delta z_{\alpha,y} = 0$ identische Gleichungen sind; so erkennt man an letzterem Ausdrucke, dass er sich gradezu auf Gleichung 5 zurück zieht. Es findet also, weil die Differenz $(\beta - b)$ positiv ist, ein Minimum-stand statt.

Zweiter Fall. Es ist in dem Endpunkte der Abscisse a eine senkrechte Ebene errichtet; und in dieser liegt eine ebene Curve mit den zwei Gleichungen

$$7)\quad x = a$$

und

$$8)\quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

Alle in Betracht zu ziehenden Flächen sollen von dieser Curve begränzt werden. Ausser dieser Bedingung gibt es keine Gränzbedingung mehr. Hier ist zwar wieder $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, etc.; dagegen $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta^2 z_{\alpha,y}$, etc. sind dem Werthe nach noch ganz willkürlich. Weil nun $\delta z_{a,y} = 0$ eine identische Gleichung ist, so reducirt sich die Gränzengleichung VIII auf

$$9)\quad \int_b^\beta (\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy = 0$$

und damit auch diese Gleichung erfüllt werden kann, muss folgende identische Gleichung

$$10)\quad \alpha + 2y \cdot \xi(y) = 0$$

stattfinden. Zur Bestimmung der beiden Functionen $\xi(y)$ und $\chi(y)$ hat man also die zwei Gleichungen

$$a \cdot \xi(y) + \chi(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$\alpha + 2y \cdot \xi(y) = 0$$

Daraus folgt

$$\xi(y) = -\frac{\alpha}{2y}$$

und

$$\chi(y) = Ay + B \cdot y^2 + \frac{a \cdot \alpha}{2y}$$

Man hat jetzt abermals eine von den Gränzen a und α abhängige, dagegen von den Gränzen b und β unabhängige Fläche mit folgender Gleichung:

$$\text{XXIII)}\quad z = \frac{\alpha \cdot (x - a)}{2y} + A \cdot y + B \cdot y^2$$

Weil aber die Gleichung $\delta^2 z_{a,y} = 0$ eine identische ist, dagegen der Ausdruck $\delta^2 z_{\alpha,y}$ dem Werthe nach ganz willkürlich bleibt; und weil ferner auch $\alpha + 2y \cdot \xi(y) = 0$ eine identische Gleichung ist; so ziehen sich die Ausdrücke IX und XII bezüglich zurück auf

$$11)\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

und

$$12)\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta \left(\frac{2y}{\alpha - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{\alpha,y} \cdot dy + \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Nun hat man sich unter $\pi(y)$ eine solche Function von y zu denken, dass dabei der unter dem einfachen Integralzeichen stehende Theilsatz wegfällt. Dieses geschieht aber nur, wenn man sich unter $\pi(y)$ eine solche Function denkt, welche $= \frac{M}{0}$ wird bei jedem Werthe des y. Dabei geht die Gleichung 12 von selbst auf die Gleichung 11 zurück. Dass überhaupt bei jeder beliebigen Function $\pi(y)$ der in 12 für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck denselben Werth hat, wie der in 11 hergestellte; davon überzeugt man sich auf folgende Weise: Gleichung 12 kann umgeformt werden in:

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \int_b^\beta \left(\frac{2y}{\alpha - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{\alpha,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 2y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z^2\right)\right) \cdot dy \cdot dx$$

Wendet man nun auf das angezeigte Differential eine Integration nach x an, und beachtet man, dass $\delta z_{a,y} = 0$ eine identische Gleichung ist; so bekommt man aus letzterer Gleichung

$$\delta^2 U = \int_b^\beta \left(\left(\frac{2y}{\alpha - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{\alpha,y} + \left(-\frac{2y}{\alpha - \pi(y)}\right) \cdot \delta z^2_{\alpha,y}\right) \cdot dy.$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Da sich hier die unter dem einfachen Integralzeichen stehenden Theilsätze gegen einander aufheben; so erkennt man, dass der Ausdruck 12 und 11 ganz einerlei Werth haben bei jeder beliebigen Function $\pi(y)$.

Dritter Fall. Es seien keine Gränzbedingungen vorgeschrieben. Hier wird die Gränzengleichung VIII nur erfüllt, wenn folgende zwei identische Gleichungen

$$13)\quad \alpha + 2y \cdot \xi(y) = 0, \quad \text{und} \quad 14)\quad a + 2y \cdot \xi(y) = 0$$

zugleich stattfinden. Aus der einen dieser Gleichungen folgt $\xi(y) = -\frac{\alpha}{2y}$, und aus der andern folgt $\xi(y) = -\frac{a}{2y}$. Daran erkennt man, dass sich die Gleichungen 13 und 14 widersprechen; und somit kann dieser dritte Fall nicht weiter beachtet werden.

Vierter Fall. Es seien abermals in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechte Ebenen errichtet, deren jede sowohl von der gesuchten Fläche als auch von den ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach einer ebenen Curve geschnitten wird, so dass jede in Betracht zu ziehende Fläche zwei solcher Curven erzeugt. Es sollen jedesmal die zwei von einer solchen Fläche erzeugten Curven in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft haben, dass ihre zu einerlei Abscisse y gehörigen Ordinaten z ein constantes Product bilden, d. h. dass die Gleichung

$$15)\quad z_{a,y} \cdot z_{\alpha,y} = k^2$$

stattfindet. Daraus folgt $z_{\alpha,y} = \frac{k^2}{z_{a,y}}$; und somit bekommt man

$$16)\quad \delta z_{\alpha,y} = -\frac{k^2}{z^2_{a,y}} \cdot \delta z_{a,y}$$

und

$$17)\quad \delta^2 z_{\alpha,y} = -\frac{k^2}{z^2_{a,y}} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \frac{2 \cdot k^2}{z^3_{a,y}} \cdot \delta z^2_{a,y}$$

Eliminirt man nun $\delta z_{\alpha,y}$ aus der Gränzengleichung VIII, so bekommt man

$$18)\quad \int_b^\beta \left(-\frac{(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot k^2}{z^2_{a,y}} - (a + 2y \cdot \xi(y))\right) \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy = 0$$

und damit diese Gleichung unter allen Umständen wegfällt, muss die identische Gleichung

$$19)\quad \frac{(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot k^2}{z^2_{a,y}} + a + 2y \cdot \xi(y) = 0$$

stattfinden. Nun ist $z = x \cdot \xi(y) + \chi(y)$; also ist

$$z_{a,y} = a \cdot \xi(y) + \chi(y), \quad \text{und} \quad z_{\alpha,y} = \alpha \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

und die Gleichungen 15 und 19 gehen bezüglich über in

Digitized by Google

$$20)\quad (a \cdot \xi(y) + \chi(y)) \cdot (\alpha \cdot \xi(y) + \chi(y)) = k^2$$

$$21)\quad (\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot k^2 + (a + 2y \cdot \xi(y)) \cdot (a \cdot \xi(y) + \chi(y))^2 = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Functionen $\xi(y)$ und $\chi(y)$ bestimmen, und man bekommt eine von den Gränzen a und α abhängige, dagegen von den Gränzen b und β unabhängige Fläche. Eliminirt man nun $\delta z_{\alpha,y}$ und $\delta^2 z_{\alpha,y}$ aus Gleichung XII, und beachtet man Gleichung 19; so geht XII über in

$$22)\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta \left[\frac{2(\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot k^2}{z^3_{a,y}} + \frac{2y \cdot k^4}{(\alpha - \pi(y)) \cdot z^4_{a,y}} - \frac{2y}{a - \pi(y)}\right] \cdot \delta z^2_{a,y} \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \int_a^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Nun denke man sich unter $\pi(y)$ eine solche Function von y, dass die identische Gleichung

$$23)\quad \frac{2 \cdot (\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot k^2}{z^3_{a,y}} + \frac{2y \cdot k^4}{(\alpha - \pi(y)) \cdot z^4_{a,y}} - \frac{2y}{a - \pi(y)} = 0$$

stattfindet; so fällt der unter dem einfachen Integralzeichen stehende Theilsatz weg. Wenn man für $z_{a,y}$ seinen Ausdruck in Gleichung 23 einsetzt; so bekommt man

$$24)\quad 2(\alpha - \pi(y)) (a - \pi(y)) \cdot (\alpha + 2y \cdot \xi(y)) \cdot (a \cdot \xi(y) + \chi(y)) \cdot k^2$$
$$+ 2y \cdot (a - \pi(y)) \cdot k^4 - 2y \cdot (\alpha - \pi(y)) \cdot (a \cdot \xi(y) + \chi(y))^4 = 0$$

Hier hat man die aus 20 und 21 für $\xi(y)$ und $\chi(y)$ bestimmten Ausdrücke einzusetzen; dann bekommt man hinsichtlich $\pi(y)$ eine Gleichung des zweiten Grades, d. h. es ergeben sich für $\pi(y)$ zwei verschiedene Ausdrücke, und jeder derselben macht, dass sich Gleichung 22 auf

$$25)\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - \frac{1}{x - \pi(y)} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

zurückzieht, wo man aber bereits statt $\pi(y)$ einen der beiden aus 24 sich ergebenden Ausdrücke gesetzt sich denken muss. Da die Differenz $(\beta - b)$ positiv ist; so erkennt man an 25 gradezu, dass auch $\delta^2 U$ positiv ist. Es ist also auch der mit 25 ganz gleichbedeutende Ausdruck 22 positiv; und sonach findet ein Minimum-stand statt.

Dergleichen specielle Fälle lassen sich in beliebiger Menge bilden.

Aufgabe 254.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[y^2 \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2 - 2y \cdot z \cdot \frac{d_y z}{dy} - z^2 + (y^2 + x^2) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2yz\right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249[sten] Aufgabe) erläutert. Man setze zu Abkürzung q anstatt $\frac{d_y z}{dy}$, und mutire; so bekommt man

$$I)\quad \delta U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(2y^2 \cdot q - 2yz + y^2 + x^2) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + (-2yq - 2z + 2y) \cdot \delta z\right] \cdot dy \cdot dx$$

Wenn man die gehörige Umformung ausführt, so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U =$$

$$\int_a^\alpha \left[(2y^2 \cdot q - 2y \cdot z + y^2 + x^2)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (2y^2 \cdot q - 2y \cdot z + y^2 + x^2)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(-2 \cdot y^2 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2} - 4y \cdot \frac{d_y z}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hier kann nur dann δU zu Null werden, wenn folgende zwei identische Gleichungen

$$\text{III)}\quad 2y^2 \cdot q - 2yz + y^2 + x^2 = 0$$

$$\text{IV)}\quad -2y \cdot q - 2z + 2y = 0$$

zugleich stattfinden. Allein diese beiden Gleichungen widersprechen einander; und somit kann die erste Form des δU nicht weiter beachtet werden, d. h. es gibt keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function z von x und y, wobei der vorgelegte Ausdruck zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande werden könnte.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$\text{V)}\quad -2 \cdot y^2 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2} - 4y \cdot \frac{d_y z}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VI)}\quad \int_a^\alpha \left[2y^2 \cdot q - 2y \cdot z + y^2 + x^2)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (2y^2 \cdot q - 2yz + y^2 + x^2)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Um Gleichung V zu integriren, setze man $\frac{d_y z}{dy} = q$, und $\frac{d_y^2 z}{dy^2} = \frac{d_y q}{dy}$; so geht Gleichung V über in $y \cdot \frac{d_y q}{dy} + 2q = 0$. Daraus folgt $q = \frac{d_y z}{dy} = \frac{1}{y^2} \cdot \xi(x)$; und daraus folgt weiter

$$\text{VII)}\quad z = \chi(x) - \frac{1}{y} \cdot \xi(x)$$

wo $\xi(x)$ und $\chi(x)$ ganz willkürliche Functionen von x sind. Die Gränzengleichung VI geht jetzt über in

$$\text{VIII)}\quad \int_a^\alpha \left[(4 \cdot \xi(x) - 2\beta \cdot \chi(x) + \beta^2 + x^2) \cdot \delta z_{x,\beta} - (4 \cdot \xi(x) - 2b \cdot \chi(x) + b^2 + x^2) \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Specieller Fall. Wenn für die Gränzen keine weitere Vorschrift gemacht ist; so muss die Gränzengleichung VIII, um erfüllt zu werden, in folgende zwei identische zerfallen:

$$\text{IX)}\quad 4 \cdot \xi(x) - 2\beta \cdot \chi(x) + \beta^2 + x^2 = 0$$

$$\text{X)}\quad 4 \cdot \xi(x) - 2b \cdot \chi(x) + b^2 + x^2 = 0$$

Daraus folgt $\xi(x) = \frac{1}{4}(b \cdot \beta - x^2)$, und $\chi(x) = \frac{1}{2}(\beta + b)$, d. h. $\chi(x)$ ist constant; und Gleichung VII geht jetzt über in

$$\text{XI)}\quad z = \frac{1}{2} \cdot (\beta + b) - \frac{1}{4 \cdot y} \cdot (b \cdot \beta - x^2)$$

Daran erkennt man, dass die gesuchte Fläche von den Gränzen b und β abhängig, dagegen von den Gränzen a und α unabhängig ist.

Digitized by Google

Man mutire noch einmal, forme um, und berücksichtige die Gleichungen V, IX und X, so bekommt man zunächst

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 - 4y \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} - 2 \cdot \delta z^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

Nimmt man mit diesem Ausdrucke die gehörige Umformung vor, so ergibt sich

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left((\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}\right) \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{\omega + 2y}{2 \cdot y^2} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

während zur Bestimmung von ω noch folgende Partialdifferentialgleichung

$$\text{XIV)}\quad 2y^2 \cdot \frac{d_y \omega}{dy} + 4y^2 + (\omega + 2y)^2 = 0$$

stattfindet. Um diese Gleichung bequem integriren zu können, setze man $v = \omega + 2y$; so gibt sich $\frac{d_y v}{dy} = \frac{d_y \omega}{dy} + 2$. Also ist $\frac{d_y \omega}{dy} = \frac{d_y v}{dy} - 2$, und Gleichung XIV geht über in $2y^2 \cdot \frac{d_y v}{dy} + v^2 = 0$. Daraus folgt $v = \frac{2y}{-1 + y \cdot \pi(x)}$, und somit ist $\omega = v - 2y$, oder

$$\text{XV)}\quad \omega = \frac{2y \cdot (2 - y \cdot \pi(x))}{-1 + y \cdot \pi(x)}$$

Gleichung XIII geht also jetzt über in

$$\text{XVI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{2\beta \cdot (2 - \beta \cdot \pi(x))}{-1 + \beta \cdot \pi(x)} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - \frac{2b \cdot (2 - b \cdot \pi(x))}{-1 + b \cdot \pi(x)} \cdot \delta z^2_{x,b}\right) \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{1}{y \cdot (-1 + y \cdot \pi(x))} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Der unter dem einfachen Integralzeichen stehende Theilsatz fällt weg, wenn folgende identische Gleichung

$$\text{XVII)}\quad \frac{2\beta \cdot (2 - \beta \cdot \pi(x))}{-1 + \beta \cdot \pi(x)} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - \frac{2b \cdot (2 - b \cdot \pi(x))}{-1 + b \cdot \pi(x)} \cdot \delta z^2_{x,b} = 0$$

stattfindet. Diese Gleichung ist in Beziehung auf $\pi(x)$ vom zweiten Grade, liefert also für $\pi(x)$ zwei verschiedene aus x, $\delta z^2_{x,\beta}$, $\delta z^2_{x,b}$ zusammengesetzte Ausdrücke, welche durch

$$\text{XVIII)}\quad \pi(x) = f(x, \delta z^2_{x,\beta}, \delta z^2_{x,b})$$

und

$$\text{XIX)}\quad \pi(x) = F(x, \delta z^2_{x,\beta}, \delta z^2_{x,b})$$

ausgedrückt sein mögen. Wegen Gleichung XVII reducirt sich XVI auf

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2y^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{1}{y \cdot (-1 + y \cdot \pi(x))} \cdot \delta z\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

wo aber für $\pi(x)$ entweder der in XVIII oder der in XIX stehende Ausdruck als substituirt gedacht werden muss. An XX erkennt man also, dass $\delta^2 U$ unter allen Umständen positiv bleibt; es findet daher ein Minimum-stand statt.

Digitized by Google

Aufgabe 255.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(17 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 - 10 \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y z}{dy} + 34 \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert. Man setze zur Abkürzung p anstatt $\frac{d_x z}{dx}$ und q anstatt $\frac{d_y z}{dy}$, und mutire; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left((2p - 10q) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (-10p + 68q) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[(2p - 10q) \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + (-10p + 68q) \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}$$
$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 20 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 68 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\Big] \cdot dy \cdot dx$$

Man führe die gehörige Umformung aus, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_b^\beta \left[(2p - 10q)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - (2p - 10q)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[(-10p + 68q)_{x, \beta} \cdot \delta z_{x, \beta} - (-10p + 68q)_{x, b} \cdot \delta z_{x, b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(-2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} + 20 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} - 68 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(2p - 10q)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} - (2p - 10q)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[(-10p + 68q)_{x, \beta} \cdot \delta^2 z_{x, \beta} - (-10p + 68q)_{x, b} \cdot \delta^2 z_{x, b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\left(-2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} + 20 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} - 68 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right) \cdot \delta^2 z$$
$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 20 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 68 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\Big] \cdot dy \cdot dx$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn folgende zwei Partialdifferentialgleichungen

$$1) \quad 2p - 10q = 0, \quad \text{und} \quad 2) \quad -10p + 68q = 0$$

zugleich stattfinden. Diejenige Function z von x und y, wodurch diese beiden Gleichungen zugleich identisch werden, soll mittelst zweier Methoden gesucht werden. (Man vergleiche die Aufgaben 133—153, wo dergleichen Functionen gleichfalls mittelst verschiedener Methoden aufgesucht worden sind.)

Erste Methode. Man eliminire aus diesen beiden Gleichungen zuerst q und dann p; so bekommt man

$$3) \quad p = 0, \quad \text{und} \quad 4) \quad q = 0$$

Integrirt man Gleichung 3, so gibt sich $z = \varphi(y)$, wo $\varphi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Daraus folgt $q = \frac{d\varphi(y)}{dy}$; und somit geht Gleichung 4 über in

Digitized by Google

$\frac{d\varphi(y)}{dy} = 0$. Daraus folgt $\varphi(y) = A$, wo A ein willkürlicher Constanter ist. Es ist also

$$\text{V)} \quad z = A$$

durch welche Gleichung die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene dargestellt ist. Durch Gleichung V werden aber die Gleichungen 1 und 2 zugleich identisch.

Zweite Methode. Man nehme die Gleichung 1, und integrire sie; so gibt sich als allgemeines Integral

$$5) \quad z = \varphi(5x + y)$$

wo $\varphi(5x + y)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $(5x + y)$ ist. Man hat nun zu untersuchen, ob durch den Ausdruck $\varphi(5x + y)$ die Gleichungen 1 und 2 zugleich identisch werden. Setzt man zur Abkürzung w statt $(5x + y)$, so geht Gleichung 5 über in $z = \varphi(w)$; und daraus folgt $p = 5 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw}$ und $q = \frac{d\varphi(w)}{dw}$. Dabei geht Gleichung 1 über in

$$2 \cdot 5 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} - 10 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0$$

und diese Gleichung ist erfüllt bei jeder beliebigen Function $\varphi(5x + y)$. Führt man aber die so eben für p und q gefundenen Ausdrücke in Gleichung 2 ein; so bekommt man

$$-10 \cdot 5 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw} + 68 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw}$$

oder

$$18 \cdot \frac{d\varphi(w)}{dw}$$

und dieser Ausdruck wird nur zu Null, wenn $\frac{d\varphi(w)}{dw} = 0$ ist. Aus dieser Gleichung folgt $\varphi(w) = A$, oder $\varphi(5x + y) = A$; und Gleichung 5 geht über in

$$\text{VI)} \quad z = A$$

welches wiederum die Gleichung 5 ist. Die Gränzen a, α, b, β, welche sie auch immer sein mögen, haben auf die hier gesuchte Function durchaus keinen Einfluss.

Bei der hier für z gefundenen Function wird aber auch die zweite (in III aufgestellte) Form des δU zu Null; und die beiden (in II und IV aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{VII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 20 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 68 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Um aber diesen Ausdruck nach dem Vorgange der 251[sten] Aufgabe umformen zu können, setze man

$$\text{VIII)} \quad \int_a^x \int_b^y \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 20 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 68 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_b^y \left((\eta \cdot \delta z^2)_{x,y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a,y}\right) \cdot dy + \int_a^x \left((\omega \cdot \delta z^2)_{x,y} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}\right) \cdot dx$$

$$+ \int_a^x \int_b^y \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Man differentiire nun diese Gleichung nach x und nach y, und bringe alle Theilsätze auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\left(\frac{d_x \eta}{dx} + \frac{d_y \omega}{dy} + 2 \cdot \mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2\right) \cdot \delta z^2$$

$$+ (2\eta + 4\mathfrak{B}) \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (2\omega + 4\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + 2A_1 \cdot \mathfrak{C}) \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$+ (4\mathfrak{A} + 20) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + (A_1 + 2\mathfrak{A}^2 - 68) \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 = 0$$

Digitized by Google

Da nun diese Gleichung bei jeder beliebigen Function δz von x und y gelten soll, so zerfällt sie in folgende fünf einzelne Gleichungen, die nach x und nach y identisch sind:

$$6)\quad \frac{d_x\eta}{dx} + \frac{d_y\omega}{dy} + 2\cdot\mathfrak{B}^2 + A_1\cdot\mathfrak{C}^2 = 0$$

$$7)\quad 2\eta + 4\mathfrak{B} = 0$$

$$8)\quad 2\omega + 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2A_1\cdot\mathfrak{C} = 0$$

$$9)\quad 4\mathfrak{A} + 20 = 0$$

$$10)\quad A_1 + 2\cdot\mathfrak{A}^2 - 68 = 0$$

Aus den Gleichungen 7, 8, 9, 10 folgt $\mathfrak{A} = -5$, $\mathfrak{B} = -\frac{\eta}{2}$, $A_1 = 18$, $\mathfrak{C} = \frac{\omega - 5\eta}{18}$; und Gleichung 6 geht über in

$$11)\quad \frac{d_x\eta}{dx} + \frac{d_y\omega}{dy} + \frac{\omega^2 - 10\cdot\omega\cdot\eta + 34\cdot\eta^2}{18} = 0$$

Gleichung VII geht nun über in

$$\text{IX)}\quad \delta^2U =$$

$$\int_b^\beta\Big((\eta\cdot\delta z^2)_{\alpha,y} - (\eta\cdot\delta z^2)_{a,y}\Big)\cdot dy + \int_a^\alpha\Big((\omega\cdot\delta z^2)_{x,\beta} - (\omega\cdot\delta z^2)_{x,b}\Big)\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} - 5\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{\eta}{2}\cdot\delta z\right)^2 + 18\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \frac{\omega - 5\eta}{18}\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Zur Bestimmung der Functionen η und ω hat man nur die einzige Gleichung 11; man kann also eine dieser beiden Functionen nach Willkür annehmen. Man nehme für ω eine Function von nur x, und zwar eine solche, die bei jedem Werthe des x zu Null wird, also eine identische Function von x. Hierbei ist dann auch der Ausdruck

$$\text{X)}\quad (\omega\cdot\delta z^2)_{x,\beta} - (\omega\cdot\delta z^2)_{x,b} = 0$$

d. h. auch dieser Ausdruck ist identiseh Null, es mag δz was immer für eine beliebige Function von x und y sein. Wenn aber ω kein y enthält, so ist auch $\frac{d_y\omega}{dy} = 0$; und Gleichung XI reducirt sich auf

$$12)\quad \frac{d_x\eta}{dx} + \frac{34\eta^2}{18} = 0$$

Integrirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\eta = \frac{9}{17x + \pi(y)}$$

wo $\pi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Gleichung IX geht also über in

$$\text{XI)}\quad \delta^2U = \int_b^\beta\left(\frac{9}{17\alpha + \pi(y)}\cdot\delta z^2_{\alpha,y} - \frac{9}{17a + \pi(y)}\cdot\delta z^2_{a,y}\right)\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} - 5\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{9}{34x + 2\cdot\pi(y)}\cdot\delta z\right)^2\right.$$

$$\left.+\,18\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{5}{34x + 2\cdot\pi(y)}\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Damit nun der unter dem einfachen Integralzeichen noch rückständige Ausdruck zu Null werde; so nehme man, was man sich unter δz auch immer für eine Function von x und y denken mag, für $\pi(y)$ eine solche Function von y, dass die nach y identische Gleichung

$$13)\quad \frac{9}{17\alpha + \pi(y)}\cdot\delta z^2_{\alpha,y} - \frac{9}{17a + \pi(y)}\cdot\delta z^2_{a,y} = 0$$

stattfindet. Daraus folgt

Digitized by Google

$$14)\quad \pi(y) = \frac{17 \cdot \alpha \cdot \delta z^2_{a,y} - 17 \cdot a \cdot \delta z^2_{\alpha,y}}{\delta z^2_{\alpha,y} - \delta z^2_{a,y}}$$

Durch diese Gleichung ist aber ausgesprochen, was $\pi(y)$ jedesmal für eine Function von y wird, wenn man sich unter δz bald diese bald jene Function von x und y denkt. Den in Gleichung 14 für $\pi(y)$ hergestellten Ausdruck hat man in Gleichung XI überall zu substituiren, und dabei fällt dann der unter dem einfachen Integralzeichen stehende Ausdruck jedenfalls weg.

Da die Gränzen a, α, b, β durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $z = A$; so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral

$$\text{XII)}\quad U = 17 \cdot (\alpha - a) \cdot (\beta - b)$$

sondern auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte Integral U zu einem Minimum-stande.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$15)\quad -2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} + 20 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} - 68 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$16)\quad \int_b^\beta \left[(2p - 10q)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - (2p - 10q)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(-10p + 68q)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (-10p + 68q)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Um das allgemeine Integral der Gleichung 15 zu finden, bilde man sich (nach bekannter Methode) aus Gleichung 15 folgende neue

$$17)\quad -2 \cdot w^2 + 20 \cdot w - 68 = 0$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind $w' = 5 + 3 \cdot \sqrt{-1}$, und $w'' = 5 - 3 \cdot \sqrt{-1}$; und somit ist das gesuchte allgemeine Integral

$$\text{XIII)}\quad z = \xi\big(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\big) + \chi\big(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\big)$$

wo $\xi\big(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\big)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $\big(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\big)$, und $\chi\big(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\big)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $\big(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\big)$ bedeutet. Obgleich aber die in XIII für z hingestellte Function eine imaginäre Form hat, so kann sie doch in unendlichvielen Fällen reell werden, je nachdem man die willkürlichen Functionen specialisirt.

Erstes Beispiel. Setzt man

$$\xi\big(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\big) = y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})$$

und

$$\chi\big(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\big) = y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})$$

so bekommt man

$$18)\quad z = 2y + 10x$$

Zweites Beispiel. Setzt man

$$\xi\big(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\big) = \frac{(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1}))^2}{a}$$

und

$$\chi\big(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\big) = \frac{(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1}))^2}{a}$$

Digitized by Google

so bekommt man

$$19)\quad a \cdot z = 2 \cdot y^2 + 20xy + 32 \cdot x^2$$

Drittes Beispiel. Setzt man

$$\xi\left(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\right) = a \cdot \lg \text{nat}\left(\frac{y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})}{b}\right)$$

und

$$\chi\left(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\right) = a \cdot \lg \text{nat}\left(\frac{y + x \cdot (5 - 2 \cdot \sqrt{-1})}{c}\right)$$

so bekommt man

$$20)\quad z = a \cdot \lg \text{nat}\left(\frac{y^2 + 10yx + 34x^2}{bc}\right)$$

Und so fort. Nun hat man die zweite (in Gleichung IV aufgestellte) Form des $\delta^2 U$ umzuformen. Beachtet man die Hauptgleichung 15, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta \left[(2p - 10q)_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + (\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha,y} - (2p - 10q)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(-10p + 68q)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + (\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta}\right.$$

$$\left. - (-10p + 68q)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}\right] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - 5 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{\eta}{2} \cdot \delta z\right)^2 + 18 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{\omega - 5\eta}{18} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Zur Bestimmung der beiden Functionen η und ω hat man nur die einzige Gleichung 11; es ist also noch soviel Willkür vorhanden, dass man dieselben den Eigenthümlichkeiten des jedesmal vorliegenden speciellen Falles unterwerfen kann.

Erster Fall. Es sind in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechte Ebenen errichtet. In der ersten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$21)\quad x = a, \qquad \text{und} \qquad 22)\quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

In der zweiten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$23)\quad x = \alpha, \qquad \text{und} \qquad 24)\quad z = C + E \cdot y$$

In der dritten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$25)\quad y = b, \qquad \text{und} \qquad 26)\quad z = H \cdot x^2$$

In der vierten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$27)\quad y = \beta, \qquad \text{und} \qquad 28)\quad z = G + K \cdot x^2$$

Alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen sollen von diesen Curven begränzt werden. Desshalb muss (man sehe den ersten Fall der 253sten Aufgabe) bei jedem Werthe des y stattfinden $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, etc. Ganz auf die nemliche Weise wird dargethan, dass auch bei jedem Werthe des x gelten muss $\delta z_{x,b} = 0$, $\delta z_{x,\beta} = 0$, $\delta^2 z_{x,b} = 0$, $\delta^2 z_{x,\beta} = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg, und bei Bestimmung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen $\xi\left(y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})\right)$ und $\chi\left(y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})\right)$ müssen noch die folgenden vier Gleichungen

$$29)\quad \xi[y + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] + \chi[y + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A \cdot y + B \cdot y^2$$

$$30)\quad \xi[y + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] + \chi[y + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = C + E \cdot y$$

$$31)\quad \xi[b + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] + \chi[b + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = H \cdot x^2$$

$$32)\quad \xi[\beta + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] + \chi[\beta + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = G + K \cdot x^2$$

mit benützt werden. (Man erinnere sich, dass zur Bestimmung einer einzigen Function, welche zwei Veränderliche enthält, zwei Gleichungen nöthig sind.)

Digitized by Google

Setzt man b statt y in 29 und 30 ein, so bekommt man bezüglich

33) $\xi[b + a\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[b + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = A\cdot b + B\cdot b^2$

und

34) $\xi[b + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[b + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = C + E\cdot b$

Setzt man β statt y in 29 und 30 ein, so bekommt man bezüglich

35) $\xi[\beta + a\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[\beta + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = A\cdot\beta + B\cdot\beta^2$

und

36) $\xi[\beta + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[\beta + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = C + E\cdot\beta$

Setzt man a statt x in 31 und 32 ein, so bekommt man bezüglich

37) $\xi[b + a\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[b + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = H\cdot a^2$

und

38) $\xi[\beta + a\cdot(5 + 4\cdot\sqrt{-1})] + \chi[\beta + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = G + K\cdot a^2$

Setzt man α statt x in 31 und 32 ein, so bekommt man bezüglich

39) $\xi[b + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[b + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = H\cdot\alpha^2$

und

40) $\xi[\beta + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi[\beta + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = G + K\cdot\alpha^2$

Vergleicht man die acht letzten Gleichungen (nemlich Nr. 33—40), so erkennt man, dass sie nur bestehen können, wenn

$$41)\quad A\cdot b + B\cdot b^2 = H\cdot a^2$$

wie aus 33 und 37 folgt; und wenn

$$42)\quad C + E\cdot b = H\cdot\alpha^2$$

wie aus 34 und 39 folgt; und wenn

$$43)\quad A\cdot\beta + B\cdot\beta^2 = G + K\cdot a^2$$

wie aus 35 und 38 folgt; und wenn

$$44)\quad C + E\cdot\beta = G + K\cdot\alpha^2$$

wie aus 36 und 40 folgt. Sollten daher namentlich die Coefficienten A, B, C, E, G, H, K noch willkürlich sein; so ist es jederzeit möglich, sie in solche Abhängigkeit unter einander zu bringen, dass die vier letztern Gleichungen (nemlich 41 bis 44) erfüllt werden.

Dass aber diese vier Gleichungen erfüllt werden, ist ein Ergebniss, welches ganz der Natur des hier vorgelegten besonderen Falles entspricht; denn die vier in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechten Ebenen schneiden sich in vier graden Linien, und in jeder dieser vier Graden liegt ein Punkt, welcher zweien der vorgeschriebenen Gränzcurven gemeinschaftlich sein muss, weil man sonst durch sie keine Fläche begränzen könnte. Man hat also hier abermals ein Beispiel, wie die Erscheinungen des Calculs jedesmal mit den Eigenthümlichkeiten des ihm unterworfenen Gegenstandes übereinstimmen. (Man vergleiche den ersten Fall in Aufgabe 267.)

Gleichung XIV reducirt sich jetzt gradezu auf

$$\delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \left[2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} - 5\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{\eta}{2}\cdot\delta z\right)^2 + 18\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{\omega - 5\eta}{18}\cdot\delta z\right)^2\cdot dy\cdot dx\right.$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv, und somit findet ein Minimumstand statt. Was die Functionen ω und η betrifft, so kann man für ω jede beliebige Function von x und y annehmen, welche in Gleichung 11 eingeführt werden muss, wonach sich dann durch Integration ergibt, was η für eine Function von x und y ist. Nimmt man z. B. für ω eine identische Function von x, so geht Gleichung 11 in Gleichung 12 über, so dass sich für η abermals $\eta = \frac{9}{17x + \pi(y)}$ ergibt, wo $\pi(y)$ eine

Digitized by Google

ganz willkürliche Function von y vorstellt, die durchaus nicht näher bestimmt werden kann, aber auch nicht bestimmt zu werden braucht. Dass aber die willkürliche Function $\varkappa(y)$ nicht bestimmt zu werden braucht, d. h. dass der Werth des $\delta^2 U$ ganz unabhängig ist von $\varkappa(y)$; davon kann man sich auf dieselbe Weise überzeugen, wie schon im ersten Falle der 253sten Aufgabe geschehen ist.

Zweiter Fall. Es seien keine Gränzbedingungen vorgeschrieben. Hier wird die Gränzengleichung 16 nur erfüllt, wenn folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$44)\quad (2p - 10q)_{\alpha, y} = 0$$

und

$$45)\quad (2p - 10q)_{a,y} = 0$$

und wenn folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$46)\quad (-10p + 68q)_{x, \beta} = 0$$

und

$$47)\quad (-10p + 68q)_{x,b} = 0$$

stattfinden. Man bezeichne durch $\xi'[y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})]$ das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $\xi[y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})]$ nach dem ganzen Ausdrucke $[y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})]$ differentiirt; und man bezeichne ebenso durch $\chi'[y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]$ das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $\chi[y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]$ nach dem ganzen Ausdrucke $[y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]$ differentiirt. Man bekommt dabei

$$48)\quad p = (5 + 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\xi'[y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + (5 - 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\chi'[y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]$$

und

$$49)\quad q = \xi'[y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] + \chi'[y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]$$

Gleichung 44 geht nun über in

$$(6\cdot\sqrt{-1})\left[\xi'(y + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})) - \chi'(y + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1}))\right] = 0$$

und daraus folgt

$$50)\quad \xi'[y + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] - \chi'[y + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = 0$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit

$$\frac{d\xi[y + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})]}{dy} - \frac{d\chi[y + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})]}{dy} = 0$$

woraus durch Integration

$$51)\quad \xi[y + \alpha\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] - \chi[y + \alpha\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = A$$

folgt, wo A ein willkürlicher Constanter ist. Auf die nemliche Weise wird aus Gleichung 45 sich ergeben

$$52)\quad \xi'[y + a\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] - \chi'[y + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$53)\quad \xi[y + a\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] - \chi[y + a\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = B$$

wo B ein willkürlicher Constanter ist. Gleichung 46 geht aber über in

$$(-6\cdot\sqrt{-1})\cdot\left[(5 + 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\xi'(\beta + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})) - (5 - 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\chi'(\beta + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1}))\right] = 0$$

Daraus folgt

$$54)\quad (5 + 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\xi'[\beta + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})] - (5 - 3\cdot\sqrt{-1})\cdot\chi'[\beta + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})] = 0$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit

Digitized by Google

$$\frac{d\xi[\beta + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})]}{dx} - \frac{d\chi[\beta + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})]}{dx} = 0$$

woraus durch Integration

$$55) \quad \xi[\beta + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = C$$

folgt, wo C ein willkürlicher Constanter ist. Auf die nemliche Weise wird aus Gleichung 47 sich ergeben

$$56) \quad (5 + 3 \cdot \sqrt{-1}) \cdot \xi'[b + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})]$$
$$- (5 - 3 \cdot \sqrt{-1}) \cdot \chi'[b + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = 0$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit

$$\frac{d\xi[b + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})]}{dx} - \frac{d\chi[b + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})]}{dx} = 0$$

und daraus folgt durch Integration

$$57) \quad \xi[b + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = E$$

Setzt man b statt y in 51 und 53 ein, so bekommt man bezüglich

$$58) \quad \xi[b + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$

und

$$59) \quad \xi[b + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = B$$

Setzt man β statt y in 51 und 53 ein, so bekommt man bezüglich

$$60) \quad \xi[\beta + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$

und

$$61) \quad \xi[\beta + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = B$$

Setzt man a statt x in 55 und 57 ein, so bekommt man bezüglich

$$62) \quad \xi[\beta + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = C$$

und

$$63) \quad \xi[b + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = E$$

Setzt man α statt x in 55 und 57 ein, so bekommt man bezüglich

$$64) \quad \xi[\beta + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = C$$

und

$$65) \quad \xi[b + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = E$$

Vergleicht man nun die acht letzteren Gleichungen, so erkennt man Folgendes:

Aus 58 und 65 folgt $A = E$
Aus 59 und 63 folgt $B = E$
Aus 60 und 64 folgt $A = C$
Aus 61 und 62 folgt $B = C$

Diese vier Gleichungen gehen in folgende einzige über:

$$A = B = C = E$$

und somit gehen die vier Gleichungen 51, 53, 55, 57 in folgende vier über

$$66) \quad \xi[y + \alpha \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[y + \alpha \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$
$$67) \quad \xi[y + a \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[y + a \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$
$$68) \quad \xi[\beta + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[\beta + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$
$$69) \quad \xi[b + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})] - \chi[b + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})] = A$$

wo A ein noch willkürlicher Constanter ist. Diese vier Gleichungen müssen bei Bestimmung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen $\xi[y + x \cdot (5 + 3 \cdot \sqrt{-1})]$ und $\chi[y + x \cdot (5 - 3 \cdot \sqrt{-1})]$ noch mitbenützt werden. Der in XIV für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck reducirt sich jetzt auf

Digitized by Google

$$\delta^2 U = \int_b^\beta \left[(\eta \cdot \delta z^2)_{\alpha,y} - (\eta \cdot \delta z^2)_{a,y}\right] \cdot dy + \int_a^\alpha \left[(\omega \cdot \delta z^2)_{x,\beta} - (\omega \cdot \delta z^2)_{x,b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - 5 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{\eta}{2} \cdot \delta z\right)^2 + 17 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} - \frac{\omega - 5\eta}{18} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Dieses ist aber wiederum die Gleichung IX, und muss ebenso behandelt werden, wie schon dort auseinandergesetzt ist.

Dritter Fall. Es seien abermals in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechte Ebenen errichtet, deren jede sowohl von der gesuchten Fläche als auch von den ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach einer ebenen Curve geschnitten wird, so dass jede in Betracht zu ziehende Fläche vier solcher Curven erzeugt, von denen je zwei einander gegenüber liegen. Es soll jedesmal das eine Paar dieser einander gegenüber liegenden Curven in der ganzen Ausdehnung die Eigenschaft haben, dass ihre zu einerlei Abscisse y gehörigen Ordinaten in der durch folgende Gleichung

$$70)\quad z_{\alpha,y} = \frac{1}{2m} \cdot z_{a,y}^2 + h$$

ausgesprochenen Beziehung zusammen stehen; und dabei soll dann jedesmal das andere Paar dieser einander gegenüber liegenden Curven in der ganzen Ausdehnung die Eigenschaft haben, dass ihre zu einerlei Abscisse x gehörigen Ordinaten die durch folgende Gleichung

$$71)\quad z_{x,\beta} = \frac{1}{2n} \cdot z_{x,b}^2 + k$$

ausgesprochenen Beziehung zusammen stehen. Aus 70 folgt nun

$$72)\quad \delta z_{\alpha,y} = \frac{1}{m} \cdot z_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}$$

und

$$73)\quad \delta^2 z_{\alpha,y} = \frac{1}{m} \cdot z_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} + \frac{1}{m} \cdot \delta z_{a,y}^2$$

Aus 71 aber folgt

$$74)\quad \delta z_{x,\beta} = \frac{1}{n} \cdot z_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}$$

und

$$75)\quad \delta^2 z_{x,\beta} = \frac{1}{n} \cdot z_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} + \frac{1}{n} \cdot \delta z_{x,b}^2$$

Die Gränzengleichung 16 geht also jetzt über in

$$76)\quad \int_b^\beta \left[\frac{1}{m} \cdot (2p - 10q)_{\alpha,y} \cdot z_{a,y} - (2p - 10q)_{a,y}\right] \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{1}{n} \cdot (-10p + 68q)_{x,\beta} \cdot z_{x,b} - (-10p + 68q)_{x,b}\right] \cdot \delta z_{x,b} \cdot dx = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich nun ohneweiters in folgende zwei

$$77)\quad \frac{1}{m} \cdot (2p - 10q)_{\alpha,y} \cdot z_{a,y} - (2p - 10q)_{a,y} = 0$$

und

$$\frac{1}{n} \cdot (-10p + 68q)_{x,\beta} \cdot z_{x,b} - (-10p + 68q)_{x,b} = 0$$

Die erste dieser Gleichungen ist nach y, und die zweite ist nach x identisch. Sie lassen sich bequemer auf folgende Weise schreiben

$$79)\quad \frac{1}{m} \cdot (2p - 10q)_{\alpha,y} - \left(\frac{2p - 10q}{z}\right)_{a,y} = 0$$

und

$$80)\quad \frac{1}{n} \cdot (-10p + 68q)_{x,\beta} - \left(\frac{-10p + 68q}{z}\right)_{x,b} = 0$$

Digitized by Google

Führt man nun für z, p, q die entsprechenden Ausdrücke in letztere zwei Gleichungen ein, so gehen sie bezüglich über in

$$81)\quad \frac{1}{m}\cdot\left[\frac{d\xi[y+\alpha\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]}{dy}-\frac{d\chi[y+\alpha\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}{dy}\right] - \frac{\frac{d\xi[y+a\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]}{dy}-\frac{d\chi[y+a\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}{dy}}{\xi[y+a\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]+\chi[y+a\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}=0$$

und

$$82)\quad \frac{1}{n}\cdot\left[\frac{d\xi[\beta+x\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]}{dx}-\frac{d\chi[\beta+x\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}{dx}\right] - \frac{\frac{d\xi[b+x\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]}{dx}-\frac{d\chi[b+x\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}{dx}}{\xi[b+x\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]+\chi[b+x\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]}=0$$

Diese zwei Gleichungen integrire man jetzt, und es ergeben sich zwei neue Gleichungen, welche bei Bestimmung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen $\xi[y+x\cdot(5+3\cdot\sqrt{-1})]$ und $\chi[y+x\cdot(5-3\cdot\sqrt{-1})]$ mit benützt werden müssen. Ausserdem müssen bei Bestimmung dieser zwei willkürlichen Functionen auch noch die Gleichungen 70 und 71 benützt werden. (Man erinnere sich, dass zur Bestimmung einer einzigen Function, welche zwei unabhängige Veränderliche enthält, jedesmal zwei Gleichungen nöthig sind.)

Die Gleichung XIV geht nun über in

$$\text{XV)}\quad \delta^2U=\int_b^\beta\left[\frac{1}{m}\cdot(2p-10q)_{\alpha,y}+\frac{1}{m^2}\,\eta_{\alpha,y}\cdot z^2_{a,y}-\eta_{a,y}\right]\cdot\delta z^2_{a,y}\cdot dy$$
$$+\int_a^\alpha\left[\frac{1}{n}\cdot(-10p+68q)_{x,\beta}+\frac{1}{n^2}\cdot\omega_{x,\beta}\cdot z^2_{x,b}-\omega_{x,b}\right]\cdot\delta z^2_{x,b}\cdot dx$$
$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}-5\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}-\frac{\eta}{2}\cdot\delta z\right)^2+18\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}-\frac{\omega-5\eta}{18}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

Man denke sich nun unter ω eine solche Function des einzigen Veränderlichen x, dass folgende identische Gleichung stattfindet:

$$83)\quad \frac{1}{n}\cdot(-10p+68q)_{x,\beta}+\frac{1}{n^2}\cdot\omega_x\cdot z^2_{x,b}-\omega_x=0$$

Weil man für ω eine Function angenommen hat, die nur x und kein y enthält; so ist $\frac{d_y\omega}{dy}=0$, und Gleichung 11 reducirt sich auf

$$84)\quad \frac{d_x\eta}{dx}+\frac{\omega^2-10\cdot\omega\cdot\eta+34\cdot\eta^2}{18}=0$$

Man hat nemlich in Gleichung 83 für z, p und q diejenigen Ausdrücke einzusetzen, welche sich ergeben, wenn man das z nach dem hiesigen dritten Falle bereits specialisirt hat; sodann ergibt sich durch blosse Auflösung der Gleichung 83, was ω für eine Function von x ist. Diese für ω gefundene Function führe man in Gleichung 84 ein, so gibt sich η als Function von x und $\varkappa(y)$, wo $\varkappa(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist. Diese willkürliche Function $\varkappa(y)$ kann man dann dazu benützen, dass noch folgende nach y identische Gleichung

$$85)\quad \frac{1}{m}\cdot(2p-10q)_{\alpha,y}+\frac{1}{m^2}\cdot\eta_{\alpha,y}\cdot z^2_{a,y}-\eta_{a,y}=0$$

stattfindet. Hierdurch sind nun alle unter den einfachen Integralzeichen stehenden Theilsätze weggefallen; und an dem unter dem doppelten Integralzeichen stehenden Theilsatze erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Andere specielle Fälle kann man sich nach Belieben bilden.

Digitized by Google

Aufgabe 256.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[8 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 - 12 \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y z}{dy} + 36 \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert. Man setze zur Abkürzung p anstatt $\frac{d_x z}{dx}$ und q anstatt $\frac{d_y z}{dy}$, und mutire; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(2p - 12q) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (-12p + 72q) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right] \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(2p - 12q) \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + (-12p + 72q) \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right.$$
$$\left. + 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 24 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 72 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Führt man die gehörige Umformung aus, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_b^\beta \left[(2p - 12q)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - (2p - 12q)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[(-12p + 72q)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (-12p + 72q)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} - 24 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + 72 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = \int_b^\beta \left[(2p - 12q)_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} - (2p - 12q)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[(-12p + 72q)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} - (12p + 72q)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} - 24 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + 72 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right) \cdot \delta^2 z\right.$$
$$\left. + 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 24 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 72 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn folgende zwei Partialdifferentialgleichungen

$$1) \quad 2p - 12q = 0, \qquad \text{und} \qquad 2) \quad -12p + 72q = 0$$

zugleich stattfinden. Integrirt man die erste dieser Gleichungen, so bekommt man als allgemeines Integral

$$3) \quad z = \varphi(y + 6x)$$

wo $\varphi(y + 6x)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $(y + 6x)$ ist. Durch diese Function wird aber auch die Gleichung 2 erfüllt. Die Gränzen a, α, b, β, welche sie auch immer sein mögen, haben also auf die hier gesuchte Function durchaus keinen Einfluss. (Wie man die willkürliche Function $\varphi(y + 6x)$ bestimmen kann, dafür sind in der Aufgabe 135 zwei besondere Fälle mitgetheilt worden.)

Bei der hier für z gefundenen Function wird aber auch die zweite (in III aufge-

Digitized by Google

stellte) Form des δU zu Null; und die beiden (in II und IV aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 24 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 72 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

welcher Ausdruck gradezu übergeht in

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = 2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x \delta z}{dx} - 6 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

und hieran erkennt man, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$4)\quad 2 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} - 24 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + 72 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$5)\quad \int_b^\beta \left[(2p - 12q)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - (2p - 12q)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(-12p + 72q)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (-12p + 72q)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Um das allgemeine Integral der Gleichung 4 herzustellen, bilde man sich (nach bekannter Methode) aus Gleichung 4 folgende neue:

$$6)\quad 2 \cdot w^2 - 24 \cdot w + 72 = 0$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind einander gleich, d. h. es ist $w' = w'' = 6$ und somit ist das allgemeine Integral der Gleichung 4 jetzt

$$\text{VII)}\quad z = \xi(y + 6x) + x \cdot \chi(y + 6x)$$

Nun aber muss man, um das Kennzeichen für das Vorhandensein eines Minimumstandes herstellen zu können, die gehörige Umformung wirklich ausführen. Man setze also

$$\text{VIII)}\quad \int_a^x \int_b^y \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 24 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 72 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_b^y \left(\eta_{x,y} \cdot \delta z_{x,y}^2 - \eta_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}^2\right) \cdot dy + \int_a^x \left(\omega_{x,y} \cdot \delta z_{x,y}^2 - \omega_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}^2\right) \cdot dx$$

$$+ \int_a^x \int_b^y \left[2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Man differentiire nun diese Gleichung nach x und nach y, und bringe alle Theilsätze auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\left(\frac{d_x \eta}{dx} + \frac{d_y \omega}{dy} + 2 \cdot \mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2\right) \cdot \delta z^2 + (2\eta + 4\mathfrak{B}) \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

$$+ (2\omega + 4\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} + 2 \cdot A_1 \cdot \mathfrak{C}) \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + (24 + 4\mathfrak{A}) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$+ (-72 + 2 \cdot \mathfrak{A}^2 + A_1) \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 = 0$$

Da nun diese Gleichung bei jeder beliebigen Function δz von x und y gelten soll, so zerfällt sie in folgende einzelne Gleichungen, die nach x und nach y identisch sind:

$$7)\quad \frac{d_x \eta}{dx} + \frac{d_y \omega}{dy} + 2\mathfrak{B}^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2 = 0$$

Digitized by Google

$$8)\quad 2\eta + 4\mathfrak{B} = 0$$
$$9)\quad 2\omega + 4\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} + 2\cdot A_1\cdot\mathfrak{C} = 0$$
$$10)\quad 24 + 4\mathfrak{A} = 0$$
$$11)\quad -72 + 2\mathfrak{A}^2 + A_1 = 0$$

Aus Gleichung 8 folgt $\mathfrak{B} = -\frac{\eta}{2}$; aus Gleichung 10 folgt $\mathfrak{A} = -6$; aus Gleichung 11 folgt $A_1 = 0$; und dabei reducirt sich Gleichung 9 auf

$$12)\quad 2\omega + 4\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = 0$$

und wenn man für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ausdrücke einsetzt, so geht letztere Gleichung über in

$$13)\quad \omega + 6\eta = 0$$

Daraus folgt $\omega = -6\eta$, und $\frac{d_y\omega}{dy} = -6\cdot\frac{d_y\eta}{dy}$; und Gleichung 7 geht über in

$$14)\quad \frac{d_x\eta}{dx} - 6\cdot\frac{d_y\eta}{dy} + \frac{\eta^2}{2} = 0$$

Das allgemeine Integral hiervon ist

$$15)\quad \eta = \frac{2}{x + \pi(y + 6x)}$$

wo $\pi(y + 6x)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $(y + 6x)$ vorstellt. Weil $\omega = -6\eta$, so bekommt man

$$16)\quad \omega = \frac{-12}{x + \pi(y + 6x)}$$

Man hat also hier den Ausnahmsfall, wo es nicht nöthig ist, zuerst die Function ω nach irgend welchen Nebenrücksichten einzurichten, und dann erst η durch Integration herzustellen; sondern ω und η sind beide ausgemittelt. Dieser Ausnahmsfall hat aber seinen Grund darin, dass $A_1 = 0$ geworden ist. Gleichung IV geht nun über in

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \int_b^\beta \Big[(2p - 12q)_{\alpha,y}\cdot\delta^2 z_{\alpha,y} - (2p - 12q)_{a,y}\cdot\delta^2 z_{a,y}$$
$$+ \frac{2}{\alpha + \pi(y + 6\alpha)}\cdot\delta z^2_{\alpha,y} - \frac{2}{a + \pi(y + 6a)}\cdot\delta z^2_{a,y}\Big]\cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[(-12p + 72q)_{x,\beta}\cdot\delta^2 z_{x,\beta} - (-12p + 72q)_{x,b}\cdot\delta^2 z_{x,b}$$
$$+ \frac{-12}{x + \pi(\beta + 6x)}\cdot\delta z^2_{x,\beta} - \frac{-12}{x + \pi(b + 6x)}\cdot\delta z^2_{x,b}\Big]\cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha\int_b^\beta 2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} - 6\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{1}{x + \pi(y + 6x)}\cdot\delta z\right)^2\cdot dy\cdot dx$$

Man bezeichne mit $\pi'(y + 6x)$ das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $\pi(y + 6x)$ nach dem ganzen Ausdrucke $(y + 6x)$ differentiirt; und wenn man dann die identische Gleichung

$$\frac{12\cdot\pi'(y + 6x)}{(x + \pi(y + 6x))^2}\cdot\delta z^2 - \frac{12\cdot\pi'(y + 6x)}{(x + \pi(y + 6x))^2}\cdot\delta z^2$$

unter dem doppelten Integralzeichen addirt, so kann man dem Doppelintegral auch folgende Form geben:

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \Big\{2\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx} - 6\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{-2}{x + \pi(y + 6x)}\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + \frac{1 + 6\cdot\pi'(y + 6x)}{(x + \pi(y + 6x))^2}\cdot\delta z^2\right)$$
$$+ 12\cdot\left(\frac{2}{x + \pi(y + 6x)}\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy} - \frac{\pi'(y + 6x)}{(x + \pi(y + 6x))^2}\cdot\delta z^2\right)\Big\}\cdot dy\cdot dx$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber gradezu umformen in

Digitized by Google

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \Big\{2\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx} - 6\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\Big)^2 - 2\cdot\frac{1}{dx}\cdot d_x\Big(\frac{1}{x+\varkappa(y+6x)}\cdot\delta z^2\Big)$$
$$+ 12\cdot\frac{1}{dy}\cdot d_y\Big(\frac{1}{x+\varkappa(y+6x)}\cdot\delta z^2\Big)\Big\}\cdot dy\cdot dx$$

Hiermit ist aber rückwärts nachgewiesen, dass die beiden (in IV und in IX) befindlichen Ausdrücke des $\delta^2 U$ ganz gleichbedeutend sind.

Specielle Gränzfälle, dergleichen schon in voriger Aufgabe vorkommen, kann man sich nach Belieben bilden.

Aufgabe 257.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \big(A^2 + B^2\cdot(p^2 - 9\cdot pq + 14\cdot q^2) + xz\cdot p + yz\cdot q + z^2\big)\cdot dy\cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, d. h. grösser oder kleiner, als bei allen andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen der Fall sein kann, so lange die Elemente a, α, b, β selbst ihre Werthe nicht ändern.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert. Man mutire, so bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[(2B^2\cdot p - 9B^2\cdot q + xz)\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + (-9B^2\cdot p + 28B^2\cdot q + yz)\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$
$$+ (x\cdot p + y\cdot q + 2z)\cdot\delta z\Big]\cdot dy\cdot dx$$

oder, wenn man die gehörige Umformung ausführt

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_b^\beta \Big[(2B^2\cdot p - 9B^2\cdot q + xz)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}$$
$$- (2B^2\cdot p - 9B^2\cdot q + xz)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\Big]\cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[(-9B^2\cdot p + 28B^2\cdot q + yz)_{x,\beta}\cdot\delta z_{x,\beta}$$
$$- (-9B^2\cdot p + 28B^2\cdot q + yz)_{x,b}\cdot\delta z_{x,b}\Big]\cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta (-2B^2\cdot r + 18B^2\cdot s - 28B^2\cdot t)\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$

Erstens. Untersuchung der ersten Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn folgende drei Partialdifferentialgleichungen

$$1)\quad 2B^2\cdot p - 9B^2\cdot q + xz = 0$$
$$2)\quad -9B^2\cdot p + 28B^2\cdot q + yz = 0$$
$$3)\quad xp + yq + 2z = 0$$

zugleich stattfinden. Diese drei Gleichungen widersprechen aber einander; und somit gibt es keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function, wodurch δU zu Null wird; also gibt es auch keine von diesen Gränzen unabhängige Function, wodurch U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande wird.

Zweitens. Untersuchung der zweiten Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann. Man hat hier die Hauptgleichung

Digitized by Google

$$- 2B^2 \cdot r + 18B^2 \cdot s - 28B^2 \cdot t = 0$$

oder vielmehr

$$\text{III)} \quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} - 9 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + 14 \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IV)} \int_b^\beta \left[(2B^2 \cdot p - 9B^2 \cdot q + xz)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - (2B^2 \cdot p - 9B^2 \cdot q + xz)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(-9B^2 \cdot p + 28B^2 \cdot q + y \cdot z)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta}\right.$$

$$\left. - (-9B^2 \cdot p + 28B^2 \cdot q + y \cdot z)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx = 0$$

Um das allgemeine Integral der Gleichung III zu finden, bilde man sich (nach bekannter Methode) aus Gleichung III folgende neue

$$\text{V)} \quad w^2 - 9 \cdot w + 14 = 0$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind $w' = 7$ und $w'' = 2$; und somit ist das gesuchte allgemeine Integral

$$\text{VI)} \quad z = \xi(y + 7x) + \chi(y + 2x)$$

wo $\xi(y + 7x)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $(y + 7x)$, und $\chi(y + 2x)$ eine ganz willkürliche Function des Ausdruckes $(y + 2x)$ bedeutet.

Man mutire nochmals, forme um, und beachte die Hauptgleichung, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta \left[(2B^2 \cdot p - 9B^2 \cdot q + xz)_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} - (2B^2 \cdot p - 9B^2 \cdot q + xz)_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(-9B^2 \cdot p + 28B^2 \cdot q + yz)_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} - (-9B^2 \cdot p + 28B^2 \cdot q + yz)_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b}\right] \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2B^2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 - 2 \cdot 9B^2 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 28B^2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right.$$

$$\left. + 2x \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \delta z + 2y \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \delta z + 2 \cdot \delta z^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Specieller Gränzfall. Es seien keine Gränzbedingungen vorgeschrieben. Hier wird die Gränzengleichung IV nur erfüllt, wenn folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$1) \quad (2B^2 \cdot p - 9 \cdot B^2 \cdot q + x \cdot z)_{\alpha,y} = 0$$

und

$$2) \quad (2B^2 \cdot p - 9 \cdot B^2 \cdot q + x \cdot z)_{a,y} = 0$$

und wenn folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$3) \quad (-9 \cdot B^2 \cdot p + 28 \cdot B^2 \cdot q + y \cdot z)_{x,\beta} = 0$$

und)

$$4) \quad (-9B^2 \cdot p + 28 \cdot B^2 \cdot q + y \cdot z)_{x,b} = 0$$

stattfinden. Man bezeichne durch $\xi'(y + 7x)$ das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $\xi(y + 7x)$ nach dem ganzen Ausdrucke $(y + 7x)$ differentiirt; man bezeichne ebenso durch $\chi'(y + 2x)$ das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $\chi(y + 2x)$ nach dem ganzen Ausdrucke $(y + 2x)$ differentiirt. Man bekommt dabei

$$5) \quad p = 7 \cdot \xi'(y + 7x) + 2 \cdot \chi'(y + 2x)$$

und

$$6) \quad q = \xi'(y + 7x) + \chi'(y + 2x)$$

Gleichung 1 geht nun über in

$$7) \quad 5B^2 \cdot [\xi'(y + 7\alpha) - \chi'(y + 2\alpha)] + \alpha \cdot [\xi(y + 7\alpha) + \chi(y + 2\alpha)] = 0$$

Gleichung 2 geht über in

Digitized by Google

8) $5B^2 \cdot [\xi'(y + 7a) - \chi'(y + 2a)] + a \cdot [\xi(y + 7a) + \chi(y + 2a)] = 0$

Gleichung 3 geht über in

9) $5B^2 \cdot [-7 \cdot \xi'(\beta + 7x) + 2 \cdot \chi'(\beta + 2x)] + \beta \cdot [\xi(\beta + 7x) + \chi(\beta + 2x)] = 0$

Gleichung 4 geht über in

10) $5B^2 \cdot [-7 \cdot \xi'(b + 7x) + 2 \cdot \chi'(b + 2x)] + b \cdot [\xi(b + 7x) + \chi(b + 2x)] = 0$

Diese Gleichungen sind aber der Reihe nach gleichbedeutend mit folgenden:

11) $$5B^2 \cdot \left[\frac{d\xi(y + 7\alpha)}{dy} - \frac{d\chi(y + 2\alpha)}{dy}\right] + \alpha \cdot [\xi(y + 7\alpha) + \chi(y + 2\alpha)] = 0$$

12) $$5B^2 \cdot \left[\frac{d\xi(y + 7a)}{dy} - \frac{d\chi(y + 2a)}{dy}\right] + a \cdot [\xi(y + 7a) + \chi(y + 2a)] = 0$$

13) $$5 \cdot B^2 \cdot \left[-\frac{d\xi(\beta + 7x)}{dx} + \frac{d\chi(\beta + 2x)}{dx}\right] + \beta \cdot [\xi(\beta + 7x) + \chi(\beta + 2x)] = 0$$

14) $$5 \cdot B^2 \cdot \left[-\frac{d\xi(b + 7x)}{dx} + \frac{d\chi(b + 2x)}{dx}\right] + b \cdot [\xi(b + 7x) + \chi(b + 2x)] = 0$$

Diese vier totalen Differentialgleichungen integrire man nun, und es ergeben sich vier neue Gleichungen, welche bei Bestimmung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen $\xi(y + 7x)$ und $\chi(y + 2x)$ mitbenützt werden müssen. (Zur Bestimmung einer einzigen willkürlichen Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen braucht man bekanntlich jedesmal zwei Gleichungen.)

Der Ausdruck VII reducirt sich jetzt

VIII) $$\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2B^2 \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 - 18 \cdot B^2 \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} + 28 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + 2x \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} \cdot \delta z + 2y \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} \cdot \delta z + 2 \cdot \delta z^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Diesen Ausdruck kann man bekanntlich auf folgende Form bringen:

IX) $$\delta^2 U = \int_b^\beta \left[\eta_{\alpha,y} \cdot \delta z^2_{\alpha,y} - \eta_{a,y} \cdot \delta z^2_{a,y}\right] \cdot dy + \int_a^\alpha \left[\omega_{x,\beta} \cdot \delta z^2_{x,\beta} - \omega_{x,b} \cdot \delta z^2_{x,b}\right] \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{B} \cdot \delta z\right)^2 + A_1 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy} + \mathfrak{C} \cdot \delta z\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Damit aber diese beiden (in VIII und IX aufgestellten) Ausdrücke des $\delta^2 U$ unter allen Umständen einerlei Werth haben, müssen folgende (auf bekannte Weise herzustellende) fünf Gleichungen stattfinden, die nach x und nach y zugleich identisch sind:

15) $\frac{d_x\eta}{dx} + \frac{d_y\omega}{dy} + 2 \cdot \mathfrak{B}^2 \cdot B^2 + A_1 \cdot \mathfrak{C}^2 - 2 = 0$

16) $2\eta + 4\mathfrak{B} \cdot B^2 - 2x = 0$

17) $2\omega + 4\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot B^2 + 2 \cdot A_1 \cdot \mathfrak{C} - 2y = 0$

18) $4\mathfrak{A} \cdot B^2 + 18 \cdot B^2 = 0$

19) $2 \cdot \mathfrak{A}^2 \cdot B^2 + A_1 - 28 \cdot B^2 = 0$

Aus Gleichung 18 folgt

20) $$\mathfrak{A} = -\frac{9}{2}$$

Aus Gleichung 16 folgt

21) $$\mathfrak{B} = \frac{x - \eta}{2 \cdot B^2}$$

Aus Gleichung 19 folgt

22) $$A_1 = -\frac{25}{2} \cdot B^2$$

Aus Gleichung 17 folgt

Digitized by Google

$$23)\quad \mathfrak{C} = \frac{9 \cdot (\eta - x) + 2 \cdot (\omega - y)}{25 \cdot B^2}$$

Dabei geht Gleichung 15 über in

$$24)\quad 25 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{d_x\eta}{dx} + \frac{d_y\omega}{dy} - 2\right) - 28(\eta - x)^2$$
$$- 18 \cdot (\eta - x) \cdot (\omega - y) - 2 \cdot (\omega - y)^2 = 0$$

Schaut man aber wieder auf Gleichung 22 zurück, so erkennt man, dass A_1 negativ, während, wie man an Gleichung IX sieht, $2B^2$ positiv ist. Da nun $2 \cdot B^2$ und A_1 einerlei Zeichen haben müssten, d. h. da beim Vorhandensein des Maximum-standes sowohl A_1 als auch $2 \cdot B^2$ negativ, und da beim Vorhandensein des Minimum-standes sowohl A_1 als auch $2 \cdot B^2$ positiv sein müssten; so folgt, dass hier weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet. Sonach ist es unnöthig, die Gleichung 24 noch weiter zu behandeln. Diese Behandlung würde aber nach den Verumständungen des hiesigen speciellen Falles darin bestehen, dass man für ω eine identische Function von x annimmt, wobei sich Gleichung 24 auf folgende reducirt:

$$25 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{d_x\eta}{dx} - 2\right) - 28 \cdot (\eta - x)^2 + 18 \cdot (\eta - x) \cdot y - 2 \cdot y^2 = 0$$

Diese Gleichung hat man noch zu integriren, und dann weiter zu verfahren, wie bekannt.

Aufgabe 258.

Man sucht z als solche Function von x und y, dass das Product

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(x \cdot \frac{d_xz}{dx} + y \cdot \frac{d_yz}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung p statt $\frac{d_xz}{dx}$, und q statt $\frac{d_yz}{dy}$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta (xp + y \cdot q) \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(x \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} + y \cdot \frac{d_y\delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

oder

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta (xp + yq) \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \times \Big[\int_b^\beta (\alpha \cdot \delta z_{\alpha,y} - a \cdot \delta z_{a,y}) \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha (\beta \cdot \delta z_{x,\beta} - b \cdot \delta z_{x,b}) \cdot dx - 2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx\Big]$$

Ordnet man auf andere Weise, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U =$$
$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \times \Big[\int_a^\alpha \int_b^\beta (x \cdot p + y \cdot q) \cdot dy \cdot dx - 2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx\Big]$$
$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \times \Big[\int_b^\beta (\alpha \cdot \delta z_{\alpha,y} - a \cdot \delta z_{a,y}) \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha (\beta \cdot \delta z_{x,\beta} - b \cdot \delta z_{x,b}) \cdot dx\Big]$$

Digitized by Google

Aus dieser letztern Form bekommt man nun die Hauptgleichung

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta (xp+yq)\cdot dy\cdot dx - 2\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{V)}\quad \int_b^\beta (\alpha\cdot\delta z_{\alpha,y} - a\cdot\delta z_{a,y})\cdot dy + \int_a^\alpha (\beta\cdot\delta z_{x,\beta} - b\cdot\delta z_{x,b})\cdot dx = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen Factor $\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx$ weggelassen hat. Mutirt man die erste (in I aufgestellte) Form des δU noch einmal, und führt man hierauf die gewöhnliche Umformung aus; so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \delta^2 z\cdot dy\cdot dx \times \left[\int_a^\alpha\int_b^\beta (xp+yq)\cdot dy\cdot dx - 2\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx\right]$$

$$+\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx \times \left[\int_b^\beta (\alpha\cdot\delta^2 z_{\alpha,y} - a\cdot\delta^2 z_{a,y})\cdot dy\right.$$

$$\left. + \int_a^\alpha (\beta\cdot\delta^2 z_{x,\beta} - b\cdot\delta^2 z_{x,b})\cdot dx\right]$$

$$+ 2\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta \delta z\cdot dy\cdot dx \times \left[\int_b^\beta (\alpha\cdot\delta z_{\alpha,y} - a\cdot\delta z_{a,y})\cdot dy\right.$$

$$\left. + \int_a^\alpha (\beta\cdot\delta z_{x,\beta} - b\cdot\delta z_{x,b})\cdot dx\right] - 4\cdot\left(\int_a^\alpha\int_b^\beta \delta z\cdot dy\cdot dx\right)^2$$

In Folge der Gleichungen IV und V reducirt sich aber dieser Ausdruck gradezu auf

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx \times \left[\int_b^\beta (\alpha\cdot\delta^2 z_{\alpha,y} - a\cdot\delta^2 z_{a,y})\cdot dy\right.$$

$$\left. + \int_a^\alpha (\beta\cdot\delta^2 z_{x,\beta} - b\cdot\delta^2 z_{x,b})\cdot dx\right] - 4\cdot\left(\int_a^\alpha\int_b^\beta \delta z\cdot dy\cdot dx\right)^2$$

Da aber a, α, b, β feste Werthe sind, so wird hier die Hauptgleichung von allen jenen unendlichvielen Functionen erfüllt, in welchen entweder willkürliche Constanten oder gar willkürliche Functionen vorkommen, die sich noch so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$\text{VII)}\quad 2\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot dy\cdot dx = \int_a^\alpha\int_b^\beta (px+qy)\cdot dy\cdot dx$$

stattfindet.

Zugleich müssen die Gränzbedingungen jedesmal von der Art sein, dass auch die Gränzengleichung V erfüllt wird.

Erste Abtheilung.

Die Gleichung VII wird erfüllt, wenn man gradezu

$$\text{VIII)}\quad 2z = px + qy$$

setzt. Integrirt man letztere Gleichung, so gibt sich

$$\text{IX)}\quad z = x\cdot y\cdot\xi\left(\frac{y}{x}\right)$$

wo $\xi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine ganz willkürliche Function des Quotienten $\frac{y}{x}$ bedeutet.

Setzt man ω statt $\frac{y}{x}$, so geht IX über in

Digitized by Google

$$z = x \cdot y \cdot \xi(\omega)$$

und daraus folgt

$$p = y \cdot \xi(\omega) - \frac{y^2}{x} \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$$

$$q = x \cdot \xi(\omega) + y \cdot \frac{d\xi(\omega)}{d\omega}$$

Es ist also $px + qy = 2xy \cdot \xi(\omega) = 2z$, was mit Gleichung VIII übereinstimmt.

Erster Gränzfall. Soll bei $x = a$ das z die bestimmte Function $F'(y)$, und soll ebenso bei $x = \alpha$ das z die bestimmte Function $F''(y)$ sein; so müssen die nach y identischen Gleichungen

$$\delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden.

Soll ferner bei $y = b$ das z die bestimmte Function $F'''(x)$, und soll ebenso bei $x = \beta$ das z die bestimmte Function $F''''(x)$ sein; so müssen die nach x identischen Gleichungen

$$\delta z_{x,b} = 0, \quad \delta z_{x,\beta} = 0, \quad \delta^2 z_{x,b} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\beta} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden. (Man vergleiche den ersten Fall in der 255sten Aufg.)

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg, und man hat folgende vier Gleichungen:

$$1) \quad a \cdot y \cdot \xi\left(\frac{y}{a}\right) = F'(y), \qquad 2) \quad \alpha \cdot y \cdot \xi\left(\frac{y}{\alpha}\right) = F''(y)$$

$$3) \quad x \cdot b \cdot \xi\left(\frac{b}{x}\right) = F'''(x), \qquad 4) \quad x \cdot \beta \cdot \xi\left(\frac{\beta}{x}\right) = F''''(x)$$

d. h. man hat vier Gleichungen zur Bestimmung einer einzigen willkürlichen Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y. Zur Bestimmung einer solchen Function genügen aber zwei Gleichungen; und so wird dieser Fall in der Regel ein überbestimmter sein. (Dieses ist nach Analogie des ersten Beispiels im ersten Falle. Seite 526.)

Gleichung VI zieht sich jetzt zurück auf

$$\text{X)} \quad \delta^2 U = -4 \cdot \left(\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx\right)^2$$

so dass ein Maximum-stand stattfindet, so oft dieser erste Fall kein überbestimmter ist.

Zweiter Gränzfall. Wenn $a = 0$ und $b = 0$ ist, so reducirt sich die Gränzengleichung V auf

$$\text{XI)} \quad \int_0^\beta \alpha \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy + \int_0^\alpha \beta \cdot \delta z_{x,\beta} \cdot dx = 0$$

Soll nun bei $x = \alpha$ das z die bestimmte Function $f(y)$, und soll bei $y = \beta$ das z die bestimmte Function $F(x)$ sein; so ist jetzt $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta z_{x,\beta} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{x,\beta} = 0$, etc. Die Gränzengleichung XI fällt also diesmal von selbst weg, und man hat die beiden Gleichungen

$$5) \quad \alpha \cdot y \cdot \xi\left(\frac{y}{\alpha}\right) = f(y), \qquad \text{und} \qquad 6) \quad x \cdot \beta \cdot \xi\left(\frac{\beta}{x}\right) = F(x)$$

welche bei Bestimmung der willkürlichen Function $\xi\left(\frac{y}{x}\right)$ benützt werden müssen.

Auch jetzt zieht Gleichung VI sich auf X zurück, so dass abermals ein Maximum-stand stattfindet.

Dritter Gränzfall. Soll man die gesuchte Function z von x und y nur aus der Zahl derer herauswählen, bei welchen allen die zwei Gleichungen

$$7) \quad a \cdot z_{a,y} = \alpha \cdot z_{\alpha,y}, \qquad \text{und} \qquad 8) \quad b \cdot z_{x,b} = \beta \cdot z_{x,\beta}$$

erfüllt werden; so ist jetzt

Digitized by Google

$$9)\quad a \cdot \delta z_{a,y} = \alpha \cdot \delta z_{\alpha,y}, \qquad \text{und} \qquad 10)\quad b \cdot \delta z_{x,b} = \beta \cdot \delta z_{x,\beta}$$

$$11)\quad a \cdot \delta^2 z_{a,y} = \alpha \cdot \delta^2 z_{\alpha,y}, \qquad \text{und} \qquad 12)\quad b \cdot \delta^2 z_{x,b} = \beta \cdot \delta^2 z_{x,\beta}$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung fällt also von selbst hinweg, und die beiden Gleichungen 7 und 8 gehen über in

$$13)\quad a^2 \cdot y \cdot \xi\left(\frac{y}{a}\right) = \alpha^2 \cdot y \cdot \xi\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

und

$$14)\quad b^2 \cdot x \cdot \xi\left(\frac{b}{x}\right) = \beta^2 \cdot x \cdot \xi\left(\frac{\beta}{x}\right)$$

welche bei Bestimmung der willkürlichen Function $\xi\left(\frac{y}{x}\right)$ benützt werden müssen.

Auch jetzt zieht Gleichung VI sich auf X zurück, so dass abermals ein Maximumstand stattfindet.

Diese speciellen Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Zweite Abtheilung.

Setzt man gradezu $z = Ax + By + C$, wo A, B, C drei willkürliche Constanten sind; so bekommt man

$$2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \int_b^\beta (2Ax + 2By + 2C) \cdot dy \cdot dx$$
$$= (\alpha - a) \cdot (\beta - b) \cdot [A \cdot (\alpha + a) + B \cdot (\beta + b) + 2C]$$

und

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta (px + qy) \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \int_b^\beta (Ax + By) \cdot dy \cdot dx$$
$$= (\alpha - a) \cdot (\beta - b) \cdot \left[\frac{1}{2} A \cdot (\alpha + a) + \frac{1}{2} B \cdot (\beta + b)\right]$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so bekommt man

$$A \cdot (\alpha + a) + B \cdot (\beta + b) + 2C = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\alpha + a) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot (\beta + b)$$

Daraus folgt

$$C = -\frac{1}{4} A (\alpha + a) - \frac{1}{4} B \cdot (\beta + b)$$

und man hat jetzt

$$\text{XII)}\quad z = A \cdot \left(x - \frac{\alpha + a}{4}\right) + B \cdot \left(y - \frac{\beta + b}{4}\right)$$

wo A und B zwei noch willkürliche Constanten sind.

Erster Gränzfall. Soll bei $x = a$ das z die bestimmte Function $F'(y)$, und soll ebenso bei $x = \alpha$ das z die bestimmtn Function $F''(y)$ sein; so müssen die nach y identischen Gleichungen

$$\delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden.

Soll ferner bei $y = b$ das z die bestimmte Function $F'''(x)$, und soll ebenso bei $y = \beta$ das z die bestimmte Function $F''''(x)$ sein; so müssen folgende nach x identische Gleichungen

$$\delta z_{x,b} = 0, \quad \delta z_{x,\beta} = 0, \quad \delta^2 z_{x,b} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\beta} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden.

Die Gränzengleichung V fällt also jetzt von selbst weg, und man hat folgende vier Gleichungen:

$$15)\quad A \cdot \left(a - \frac{a + \alpha}{4}\right) + B \cdot \left(y - \frac{b + \beta}{4}\right) = F'(y)$$

$$16)\quad A \cdot \left(\alpha - \frac{a+\alpha}{4}\right) + B \cdot \left(y - \frac{b+\beta}{4}\right) = F''(y)$$

$$17)\quad A \cdot \left(a - \frac{a+\alpha}{4}\right) + B \cdot \left(b - \frac{b+\beta}{4}\right) = F'''(x)$$

$$18)\quad A \cdot \left(x - \frac{a+\alpha}{4}\right) + B \cdot \left(\beta - \frac{b+\beta}{4}\right) = F''''(x)$$

Diese vier Gleichungen können aber zu weiter nichts, als zur Bestimmung der beiden Constanten A und B benützt werden, so dass dieser Fall in der Regel ein überbestimmter sein wird.

Gleichung VI zieht sich jetzt auf X zurück, so dass ein Maximum-stand stattfindet, so oft dieser erste Fall kein überbestimmter ist.

Zweiter Gränzfall. Wenn $a = 0$ und $b = 0$ ist, so reducirt sich die Gränzengleichung V auf

$$\text{XIII)}\quad \int_0^\beta \alpha \cdot \delta z_{\alpha, y} \cdot dy + \int_0^\alpha \beta \cdot \delta z_{x,\beta} \cdot dx = 0$$

Soll nun bei $x = \alpha$ das z die bestimmte Function f(y), und soll bei $y = \beta$ das z die bestimmte Function F(x) sein; so ist jetzt $\delta z_{\alpha, y} = 0$, $\delta z_{x,\beta} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha, y} = 0$, $\delta^2 z_{x,\beta} = 0$, etc. Die Gränzengleichung XIII fällt also jetzt von selbst weg, und man hat, weil $a = 0$ und $b = 0$, die beiden Gleichungen

$$19)\quad A \cdot \frac{3\alpha}{4} + B \cdot \left(y - \frac{\beta}{4}\right) = f(y)$$

$$20)\quad A \cdot \left(x - \frac{\alpha}{4}\right) + B \cdot \frac{3\beta}{4} = F(x)$$

Diese beiden Gleichungen müssen dazu dienen, die beiden Constanten A und B zu bestimmen; widrigenfalls ist dieser zweite Fall unmöglich.

Dritter Gränzfall. Soll man die gesuchte Function z von x und y nur aus der Zahl derer herauswählen, bei welchen allen die zwei Gleichungen

$$21)\quad a \cdot z_{a,y} = \alpha \cdot z_{\alpha, y}, \qquad \text{und} \qquad 22)\quad b \cdot z_{x,b} = \beta \cdot z_{x,\beta}$$

erfüllt werden; so ist jetzt

$$23)\quad a \cdot \delta z_{a,y} = \alpha \cdot \delta z_{\alpha, y}, \qquad 24)\quad b \cdot \delta z_{x,b} = \beta \cdot \delta z_{x,\beta}$$

$$25)\quad a \cdot \delta^2 z_{a,y} = \alpha \cdot \delta^2 z_{\alpha, y}, \qquad 26)\quad b \cdot \delta^2 z_{x,b} = \beta \cdot \delta^2 z_{x,\beta}$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung V fällt also von selbst weg, und die beiden Gleichungen 21 und 22 gehen über in

$$27)\quad Aa \cdot \left(a - \frac{a+\alpha}{4}\right) + Ba \cdot \left(y - \frac{b+\beta}{4}\right) = A\alpha \cdot \left(\alpha - \frac{a+\alpha}{4}\right) + B\alpha \cdot \left(y - \frac{b+\beta}{4}\right)$$

$$28)\quad Ab \cdot \left(x - \frac{a+\alpha}{4}\right) + Bb \cdot \left(b - \frac{b+\beta}{4}\right) = A\beta \cdot \left(x - \frac{a+\alpha}{4}\right) + B\beta \cdot \left(\beta - \frac{b+\beta}{4}\right)$$

Gleichung 27 soll bei jedem Werthe des y gelten, ist also unmöglich, ausser wenn $A = 0$ und $B = 0$.

Ebenso soll auch Gleichung 28 bei jedem Werthe des x gelten, ist also gleichfalls unmöglich, äusser wenn $A = 0$ und $B = 0$.

Dieser dritte Fall kann sonach nicht weiter beachtet werden.

Weitere specielle Gränzfälle kann man sich nach Belieben aufstellen.

Dritte Abtheilung.

Man setze gradezu

$$z = A \cdot x^2 + B \cdot xy + C \cdot y^2 + E \cdot x + G \cdot y + H$$

wo A, B, C, E, G, H sechs willkürliche Constanten sind; und verfahre, wie in der zweiten Abtheilung.

Digitized by Google

Schluss.

Auf diese Weise kann man fortfahren, für z ganz beliebige Functionen anzunehmen, welche sich noch so einrichten lassen, dass sie der Gleichung VII genügen. Hierauf müssen jedesmal noch solche Gränzbedingungen gestellt werden, bei welchen auch noch die Gleichung V erfüllt wird.

Aufgabe 259.

Welche unter allen Flächen, die zwischen zwei Paar (zu $x = a$ und $x = \alpha$, und zu $y = b$ und $y = \beta$ gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen erstreckt sind, ist es, bei welcher der Schwerpunkt des von der gesuchten Fläche und jenen Gränzebenen eingeschlossenen Körpers am höchsten oder tiefsten liegt?

Man gebe der Coordinatenebene XY eine horizontale Lage, dann ist bekanntlich

$$U = \frac{\int_a^\alpha \int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dx}{2 \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx}$$

die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von der Coordinatenebene XY; und dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Mutirt man, und setzt dann zur Abkürzung im Nenner A statt $\int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx$; so bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \frac{1}{2A^2} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \right.$$
$$\left. - \int_a^\alpha \int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \right]$$

Man setze (nach Analogie des §. 225)

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx,$$

so geht Gleichung I über in.

$$\text{III)} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx - C \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \right]$$

oder

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta (2z - C) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{V)} \quad 2z - C = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht. Die gesuchte Fläche ist also eine Ebene, welche mit der Coordinatenebene XY parallel läuft. Um zu erkennen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, hat man in Gleichung I nur den Zähler zu mutiren; und man bekommt zunächst

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A^2} \cdot \left[2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \delta^2 z \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \right.$$
$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z^2 \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx -$$

Digitized by Google

$$- \int_a^\alpha \int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^2 z \cdot dy \cdot dx \Big]$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta [(2z - C) \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta z^2] \cdot dy \cdot dx$$

oder

$$\delta^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z^2 \cdot dy \cdot dx$$

Der noch zu integrirende Factor ist (nach §. 10) positiv, es mag δz was immer für eine reelle Function von x und y sein. Es kommt also auf A an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde. Bei Bestimmung des Constanten C muss noch Gleichung II mitbenützt werden; und da aus Gleichung V folgt $z = \frac{C}{2}$, so geht Gleichung II über in

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{C^2}{4} \cdot dy \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{C}{2} \cdot dy \cdot dx$$

oder in

$$\frac{C^2}{4} \cdot (\beta - b) \cdot (\alpha - a) = \frac{C^2}{2} \cdot (\beta - b) \cdot (\alpha - a)$$

oder in

$$\frac{C}{4} = \frac{C^2}{2}$$

Diese Gleichung enthält einen Widerspruch in sich selbst, ausgenommen den Fall, wo man $C = 0$ setzen würde. In diesem Falle hätte man aber die in die Coordinatenebene XY fallende Ebene, so dass kein Körper vorhanden wäre, also auch von dem Schwerpunkte eines Körpers keine Rede sein könnte. Man erkennt also, dass die Aufgabe, so wie sie hier gestellt ist, gar keine Aufgabe ist. Andere Schriftsteller haben die Nothwendigkeit der Untersuchung, ob ein Widerspruch stattfinde oder nicht, ganz übersehen, und desshalb Irrthümer begangen. (Man vergleiche Aufgabe 232.)

Aufgabe 260.

Man sucht unter allen Flächen, welche zwischen zwei Paar (zu $x = a$ und $x = \alpha$, und zu $y = b$ und $y = \beta$ gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen einerlei Körperinhalt einschliessen, diejenige, bei welcher der Schwerpunkt dieses Körperinhaltes am höchsten oder tiefsten (d. h. der horizontal genommenen Coordinatenebene XY so nahe oder ferne als möglich) liegt.

Die hiesige Aufgabe verlangt also: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \frac{\int_a^\alpha \int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dy}{2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für z gesuchte Function von x und y nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \delta y \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

Digitized by Google

Einleitung.

Dergleichen Aufgaben löse ich mittelst gemischter Mutationen, welche aber sehr verschiedenartig sind, und daher auch die Einführung verschiedener Bezeichnungen nöthig machen. In dieser Hinsicht muss, wie ich bereits (man sehe auf Seite 479 den Schluss der zur 214ten Aufgabe gehörigen Einleitung) versprochen habe, noch Einiges nachgeholt werden; und dazu ist hier die passendste Stelle.

I) Es sei $z = \varphi(x, y)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem x und dem y Werthänderungen beilegt; so geht z über in $z + {}_{(}\Delta_{)}z$, d. h. in

$$z_{(\varkappa)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 z + \dots\dots\dots$$

wo, wie man (aus §. 78) weiss,

$${}_{(}\delta_{)}z = \delta z + \frac{d_x z}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_y z}{dy} \cdot \vartheta y$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 z = \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \vartheta y + \frac{d_x z}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_y z}{dy} \cdot \vartheta^2 y$$
$$+ \frac{d_x^2 z}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta y + \frac{d_y^2 z}{dy^2} \cdot \vartheta y^2$$

etc. etc.

ist; und wenn man a und b bezüglich an die Stelle des x und des y setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{)}z_{a,b} = \delta z_{a,b} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,b} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,b} \cdot \vartheta b$$

etc. etc.

II) Es sei $z = \varphi(x, y, m)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y und des willkürlichen Constanten m, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem m Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt z übergeht, bezeichnet werden mit $z + {}_{(}\Delta_{1)}z$, oder vielmehr mit

$$z_{(\varkappa_1)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 z + \dots\dots\dots$$

wo aber diesmal

$${}_{(}\delta_{1)}z = \delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m$$

$${}_{(}\delta_{1)}^2 z = \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m$$

etc. etc.

ist. Weil m von x und y ganz unabhängig ist, und umgekehrt; so folgt aus letzteren Gleichungen gradezu

$$\frac{d_x {}_{(}\delta_{1)}z}{dx} = \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx.dm} \cdot \vartheta m$$

$$\frac{d_y {}_{(}\delta_{1)}z}{dy} = \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_y d_m z}{dy.dm} \cdot \vartheta m$$

$$\frac{d_x^2 {}_{(}\delta_{1)}z}{dx^2} = \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \frac{d_x^2 d_m z}{dx^2.dm} \cdot \vartheta m$$

$$\frac{d_x d_y {}_{(}\delta_{1)}z}{dx.dy} = \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + \frac{d_x d_y d_m z}{dx \cdot dy \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

Wenn man a und b bezüglich an die Stelle des x und des y setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{1)}z_{a,b} = \delta z_{a,b} + \left(\frac{d_m z}{dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d_x(\delta_1)z}{dx}\right)_{a,b} = \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,b} + \left(\frac{d_x d_m z}{dx\,.\,dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m$$

etc. etc.

III) Es sei $z = \varphi(x, y, m, n)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y und der beiden willkürlichen Constanten m und n, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man dem m und dem n Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt z übergeht, bezeichnet werden mit $z + {}_{(}\Delta_{2)}z$, oder vielmehr mit

$$z_{(\varkappa_2)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{2)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_2)^2 z + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_2)^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

wo aber jetzt

$${}_{(}\delta_{2)}z = \delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n z}{dn} \cdot \vartheta n$$

$${}_{(}\delta_2)^2 z = \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m + 2 \cdot \frac{d_n \delta z}{dn} \cdot \vartheta n + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_n z}{dn} \cdot \vartheta^2 n$$

$$+ \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + 2 \cdot \frac{d_m d_n z}{dm\,.dn} \cdot \vartheta m \cdot \vartheta n + \frac{d_n^2 z}{dn^2} \cdot \vartheta n^2$$

etc. etc.

ist. Weil m und n von x und y ganz unabhängig sind, und umgekehrt; so folgt aus letzteren Gleichungen gradezu

$$\frac{d_x(\delta_2)z}{dx} = \frac{d_x\delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx\,.\,dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_n z}{dx.dn} \cdot \vartheta n$$

$$\frac{d_y(\delta_2)z}{dy} = \frac{d_y\delta z}{dy} + \frac{d_y d_m z}{dy\,.\,dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_y d_n z}{dy.dn} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

Wenn man a und b bezüglich an die Stelle des x und des y setzt, so bekommt man

$${}_{(}\delta_{2)}z_{a,b} = \delta z_{a,b} + \left(\frac{d_x d_m z}{dx.dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_y d_n z}{dy\,.\,dn}\right)_{a,b} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

$$\left(\frac{d_x(\delta_2)z}{dx}\right)_{a,b} = \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,b} + \left(\frac{d_x d_m z}{dx\,.\,dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_x d_n z}{dx\,.\,dn}\right)_{a,b} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

IV) Es sei ganz allgemein $z = \varphi(x, y, m', m'', m''', \ldots\ldots)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y und der n willkürlichen Constanten $m', m'', m''', \ldots\ldots$, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man den n willkürlichen Constanten Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt z übergeht, bezeichnet werden mit $z + {}_{(}\Delta_{n)}z$, oder vielmehr mit

$$z_{(\varkappa_n)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{n)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_n)^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_n)^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

V) Es sei wieder $z = \varphi(x, y, m)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y und des willkürlichen Constanten m, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man sowohl dem x und dem y als auch dem m Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt z übergeht, bezeichnet werden mit $z + {}_{((}\Delta_{1))}z$, oder vielmehr mit

$$z_{((\varkappa_1))} = z + \varkappa \cdot {}_{((}\delta_{1))}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{((}\delta_{1))}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{((}\delta_{1))}^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

Hier ist

$${}_{((}\delta_{1))}z = {}_{(}\delta_{1)}z + \frac{d_x z}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_y z}{dy} \cdot \vartheta y = \delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x z}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_y z}{dy} \cdot \vartheta y$$

Digitized by Google

Die Bedeutung von $_{((}\delta_{1))}{}^2z$, $_{((}\delta_{1))}{}^3z$, etc. ist jetzt von selbst klar; und wenn man a und b bezüglich an die Stelle von x und y setzt, so bekommt man

$$_{((}\delta_{1))}z_{a,b} = {}_{(}\delta_{1)}z_{a,b} + \left(\frac{d_xz}{dx}\right)_{a,b} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{a,b} \cdot \vartheta b$$

$$= \delta z_{a,b} + \left(\frac{d_mz}{dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_xz}{dx}\right)_{a,b} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{a,b} \cdot \vartheta b$$

VI) Es sei $z = \varphi(x, y, m, n)$ eine Function der beiden absolut unabhängigen Veränderlichen x und y und der beiden willkürlichen Constanten m und n, und erleide dadurch eine unmittelbare gemischte Mutation, dass man sowohl dem x und dem y als auch dem m und dem n Werthänderungen beilegt; so soll der Ausdruck, in welchen jetzt z übergeht, bezeichnet werden mit $z + {}_{((}\Delta_{2))}z$, oder vielmehr mit

$$z_{((\varkappa 2))} = z + \varkappa \cdot {}_{((}\delta_{2))}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{((}\delta_{2))}{}^2z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{((}\delta_{2))}{}^3z + \ldots\ldots$$

Hier ist

$$_{((}\delta_{2))}z = {}_{(}\delta_{2)}z + \frac{d_xz}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_yz}{dy} \cdot \vartheta y$$

$$= \delta z + \frac{d_mz}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_nz}{dn} \cdot \vartheta n + \frac{d_xz}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_yz}{dy} \cdot \vartheta y$$

Die Bedeutung von $_{((}\delta_{2))}{}^2z$, $_{((}\delta_{2))}{}^3z$, etc. ist von selbst klar; und wenn man a und b bezüglich an die Stelle von x und y setzt, so bekommt man

$$_{((}\delta_{2))}z_{a,b} = {}_{(}\delta_{2)}z_{a,b} + \left(\frac{d_xz}{dx}\right)_{a,b} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{a,b} \cdot \vartheta b$$

$$= \delta z_{a,b} + \left(\frac{d_mz}{dm}\right)_{a,b} \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_nz}{dn}\right)_{a,b} \cdot \vartheta n + \left(\frac{d_xz}{dx}\right)_{a,b} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{a,b} \cdot \vartheta b$$

etc. etc.

Es ist überflüssig, diesen Gegenstand, insofern er sich auf Functionen mit nur zwei absolut unabhängigen Veränderlichen bezieht, noch weiter fortzusetzen.

Ebenso ist es überflüssig, diesen Gegenstand auf Functionen mit mehr als zwei absolut unabhängigen Veränderlichen auszudehnen.

Bei den mittelbaren gemischten Mutationen finden dieselben verschiedenen Arten, also auch dieselben verschiedenen Bezeichnungen statt.

Auflösung.

Man nehme an, $z = \varphi(x, y, m)$ sei die gesuchte Function, in welcher, wenn das bestimmte Integral II einen vorgeschriebenen Werth bekommen soll, der willkürliche Constante m noch so eingerichtet werden kann, dass dieses Integral eben den vorgeschriebenen Werth bekommt.

Man nehme noch irgend eine andere Function $F(x, y, m + Dm)$, wo der willkürliche Constante $(m + Dm)$ vorkommt, und wo die Differenz Dm so eingerichtet werden kann, dass durch $F(x, y, m + Dm)$ das Integral II denselben Werth bekommt, wie durch $\varphi(x, y, m)$.

Man verwandle $F(x, y, m + Dm)$ mit Hilfe des mutirenden Elementes $\varkappa$ zunächst in folgende Reihe

$$\text{III)}\quad F(x, y, m + Dm) = \varphi(x, y, m + Dm) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, y, m + Dm) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, y, m + Dm) + \ldots\ldots$$

und wenn man die Differenz Dm in die Reihe

$$\varkappa \cdot \vartheta m + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 m + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 m + \ldots\ldots$$

zerlegt, so geht die Reihe III über in

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad F(x, y, m + Dm) = \varphi(x, y, m) + \varkappa \cdot \left(\delta\varphi(x, y, m) + \frac{d_m\varphi(x, y, m)}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2\varphi(x,y,m) + 2\frac{d_m\delta\varphi(x, y, m)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m\varphi(x, y, m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2\varphi(x, y, m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe kann man auch auf folgende Weise schreiben:

$$\text{V)}\quad z + {}_{(}\Delta_{1)}z = z + \varkappa \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_m\delta z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder noch kürzer auf folgende Weise:

$$\text{VI)}\quad z_{(\varkappa_1)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

Da aber, eben weil bei Untersuchungen über das Grösste und Kleinste der Werth der Function $F(x, y, m + Dm)$ dem Werthe der gesuchten Function $\varphi(x, y, m)$ nächstanliegen muss; so muss $\varkappa$ entweder als positiv oder als negativ im Momente des Verschwindens befindlich sein.

Aus allen jenen unendlichvielen Functionen, welche durch die Reihe VI repräsentirt sind, und zugleich der gesuchten Function $\varphi(x, y, m)$ nächstanliegen, dürfen aber hier in dieser Aufgabe nur diejenigen beachtet werden, bei welchen das Integral II denselben Werth annimmt, wie bei der gesuchten Function. Desshalb findet folgende Gleichung

$$\text{VII)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha\int_b^\beta z_{(\varkappa_1)} \cdot dy \cdot dx$$

statt; und daraus folgt, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens sich befindet, successive

$$\text{VIII)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta {}_{(}\delta_{1)}z \cdot dy \cdot dx = 0$$

$$\text{IX)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta {}_{(}\delta_{1)}^2 z \cdot dy \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Wenn man für die Abkürzungszeichen ${}_{(}\delta_{1)}z$, ${}_{(}\delta_{1)}^2 z$, etc. die Ausdrücke setzt, so geben die zwei letzten Gleichungen bezüglich über in

$$\text{X)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

$$\text{XI)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta \left(\delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_m\delta z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

Man mutire ebenso Gleichung I, und setze dann zur Abkürzung im Nenner A anstatt $\int_a^\alpha\int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx$; so bekommt man

$$\text{XII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}U = \frac{1}{2 \cdot A^2} \cdot \left[\int_a^\alpha\int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx \times 2 \cdot \int_a^\alpha\int_b^\beta z \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx\right.$$

$$\left. - \int_a^\alpha\int_b^\beta z^2 \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha\int_b^\beta \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx\right]$$

Aber wegen Gleichung X reducirt sich dieser Ausdruck gradezu auf

Digitized by Google

$$\text{XIII)} \quad (\delta_1)U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx$$

Mutirt man jetzt noch einmal, so bekommt man

$$\text{XIV)} \quad (\delta_1)^2U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[z \cdot \left(\delta^2 z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m\right) + \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm aus XII zu eliminiren, multiplicire man Gleichung X mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x und nach y constanten Factor L; dann ist auch noch

$$L \cdot \int_a^\alpha \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

Dieses Product kann man zu Gleichung X addiren, ohne dass $(\delta_1)U$ sich ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XV)} \quad (\delta_1)U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(z + AL) \cdot \delta z + (z + AL) \cdot \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dy \cdot dx$$

Damit nun das abhängige ϑm unter dem Integralzeichen wegfalle, setze man

$$\text{XVI)} \quad z + AL = 0$$

Dabei verschwindet auch der zu δz gehörige Factor, und Gleichung XVI ist zugleich Hauptgleichung; aber eine Gränzengleichung gibt es nicht. Aus XVI folgt $z = -AL$; und wenn man m statt $-AL$ setzt, so bekommt man

$$\text{XVII)} \quad z = m$$

d. h. man hat die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene. Aus XVII folgt $\frac{d_m z}{dm} = 1$, und $\frac{d_m^2 z}{dm^2} = 0$; die Gleichungen XI und XIV gehen also jetzt über in

$$\text{XVIII)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\delta^2 z + \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

und

$$\text{XIX)} \quad (\delta_1)^2U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[m \cdot \left(\delta^2 z + \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m\right) + (\delta z + \vartheta m)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Multiplicirt man nun XVIII mit L, und addirt dieses Product zu XIX, so bekommt man

$$(\delta_1)^2U =$$

$$\frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(m + AL) \cdot \left(\delta^2 z + \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m\right) + (\delta z + \vartheta m)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Aber eben weil $AL = -m$, so bleibt nur

$$\text{XX)} \quad (\delta_1)^2U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta (\delta z + \vartheta m)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Man hätte nun noch ϑm zu eliminiren; allein man erkennt schon, dass in der That ein Minimum-stand stattfindet. Will man aber dennoch ϑm eliminiren, so beachte man, dass $\frac{d_m z}{dm} = 1$; und Gleichung X geht über in $(\beta - b)(\alpha - a) \cdot \vartheta m + \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx = 0$, woraus $\vartheta m = -\frac{1}{(\beta - b) \cdot (\alpha - a)} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx$ folgt, und XX geht über in

Digitized by Google

$$\text{XXI)}\quad (\delta_1)^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\delta z - \frac{1}{(\beta - b) \cdot (\alpha - a)} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen a bis α und b bis β alle in Betracht zu ziehenden Flächen einen gleichgrossen Körperinhalt einschliessen müssen; und wenn diesem Körperinhalte der bestimmte Werth g^3 zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XXII)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx = g^3$$

bei Bestimmung des Constanten m zu benützen. Es ist nemlich $\int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx =$ $m \cdot (\beta - b) \cdot (\alpha - a) = g^3$; und daraus folgt $m = \frac{g^3}{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}$. Die Gleichung der gesuchten Fläche ist also jetzt

$$\text{XXIII)}\quad z = \frac{g^3}{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)}$$

und Gleichung XXI geht über in

$$\text{XXIV)}\quad (\delta_1)^2 U = \frac{1}{g^3} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\delta z - \frac{1}{(\alpha - a) \cdot (\beta - b)} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta z \cdot dy \cdot dx \right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

Der Körperinhalt g^3 muss positiv sein, weil kein Grund vorhanden ist, warum man ihn als negativ nehmen sollte. Folglich ist auch der Ausdruck XXIV positiv. Es findet also ein Minimum-stand statt, d. h. unter allen auf vorgeschriebene Weise begränzten Körpern, welche denselben Inhalt einschliessen, hat derjenige, dessen obere Fläche eine mit der Grundfläche parallele Ebene ist, seinen Schwerpunkt am tiefsten. Dieses ist schon längst bekannt. Der hier in Rede stehende Körper ist ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein Rechteck.

Aufgabe 261.

Man sucht diejenige Fläche, welche zwischen zwei Paar (zu x = a und x = α, und zu y = b und y = β gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen die kleinste ist, d. h. kleiner als alle andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen.

Die hiesige Aufgabe verlangt, dass die Ausdehnung der gesuchten Fläche durch eine Function der Abscissen x und y ausgedrückt, und hierauf von x = a bis x = α und von y = b bis y = β erstreckt werde. Da nun die beiden Differenzen $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ positiv sind, so muss (wie aus der Theorie der Complanation bekannt) die Ableitung der Fläche bei jedem zwischen a und α liegenden Werthe des x und bei jedem zwischen b und β liegenden Werthe des y positiv sein. Man darf also für die Ableitung der Fläche nur den eindeutigen positiven Ausdruck $\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}$ und durchaus nicht den zweideutigen $\sqrt[\pm]{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}$ setzen. Die Aufgabe ist also: Man sucht z als solche Function von x und y, dass das von a bis α und von b bis β erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2} \right) \cdot dy \cdot dx$$

kleiner wird, als es von jeder andern der gesuchten Function bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y nächstanliegenden Nachbarfunction gemacht werden

Digitized by Google

kann. Man mutire und setze hierauf zur Abkürzung p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und q statt $\frac{d_y z}{dy}$; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man setze zur weiteren Abkürzung P statt $\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, und Q statt $\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Nun ist schon (in der 251sten Aufgabe) nachgewiesen, dass

$$\text{IV)}\quad P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} = \frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx} - \frac{d_x P}{dx} \cdot \delta z$$

und

$$\text{V)}\quad Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} = \frac{d_y(Q \cdot \delta z)}{dy} - \frac{d_y Q}{dy} \cdot \delta z$$

Führt man diese Ausdrücke in III ein, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx} + \frac{d_y(Q \cdot \delta z)}{dy} - \frac{d_x P}{dx} \cdot \delta z - \frac{d_y Q}{dy} \cdot \delta z\right) \cdot dy \cdot dx$$

Formt man diesen Ausdruck noch um, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U = -\int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta (P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}) \cdot dy + \int_a^\alpha (Q_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}) \cdot dx$$

Man hat nun zwei Formen für δU aufgestellt; und desshalb ist man auch gezwungen, beide zu untersuchen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des δU. Hier wird $\delta U = 0$, wenn die Gleichungen

$$\frac{d_x z}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d_y z}{dy} = 0$$

welche beide zugleich nach x und nach y identisch sind, stattfinden. Diese beiden Gleichungen werden (man sehe Seite 176) erfüllt, wenn

$$z = A$$

wo A einen willkürlichen Constanten bedeutet. Durch diese Gleichung ist aber die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene dargestellt, die Gränzen a, α, b, β, welche sie auch immer sein mögen, haben durchaus keinen Einfluss auf die hier gefundene Function $z = A$; und bei ihr wird nicht allein die erste sondern auch die zweite (in VII aufgestellte) Form des δU zu Null; und für $\delta^2 U$ bekommt man

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right) \cdot dy \cdot dx$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv, und es ist nicht nöthig, ihn noch umzuformen, ein Geschäft, welches in früheren Aufgaben gehörig ausgeführt worden ist. Da die Gränzen a, α, b, β durchaus keinen Einfluss auf die Function $z = A$ haben, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral, sondern auch das zwischen allen beliebigen Gränzen von a' bis α' und von b' bis β' erstreckte Integral U zu einem Minimum-stande, so lange die Differenzen $(\alpha' - a')$ und $(\beta' - b')$ positiv sind.

Digitized by Google

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in VII aufgestellten) Form des δU. Hier hat man die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{IX)}\quad \int_b^\beta (P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}) \cdot dy + \int_a^\alpha (Q_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}) \cdot dx = 0$$

Indem man die in VIII angedeuteten Differentiationen ausführt, ergibt sich

$$\text{X)}\quad \frac{d_x^2 z}{dx^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right) - 2 \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + \frac{d_y^2 z}{dy^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2\right) = 0$$

Man mutire Gleichung II noch einmal, forme um, und berücksichtige Gleichung VIII; so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_b^\beta (P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y}) \cdot dy + \int_a^\alpha (Q_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b}) \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} - p \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Das Radical ist nur nach seiner positiven Bedeutung vorausgesetzt, welche durch die ganze Aufgabe festgehalten werden muss; und somit ist der unter dem doppelten Integralzeichen stehende Theilsatz positiv bei jeder beliebigen reellen Function von x und y, die man für δz nehmen mag. Es findet also ein Minimum-stand statt, sobald z eine solche Function von x und y ist, dass dabei der Gleichung X genügt wird, während eben diese Function z noch solchen Gränzbedingungen unterworfen werden muss, dass auch Gleichung IX erfüllt wird.

Alle die unendlichvielen Flächen, welche der Gleichung X genügen, haben folgende Eigenschaft miteinander gemein:

„Die zu irgend einem Punkte gehörigen zwei Krümmungshalbmesser sind je-
„desmal einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet",

oder mit andern Worten:

„Wenn R' der eine und R'' der andere Krümmungshalbmesser irgend eines
„Punktes einer Fläche ist, so findet bei allen den unendlichvielen Flächen,
„welche der Gleichung X genügen, folgende Gleichung

$$\text{XII)}\quad R' + R'' = 0$$

„statt.

Dass aber, wenn Gleichung XII stattfindet, auch Gleichung X stattfinden muss, und umgekehrt; mag noch näher nachgewiesen werden. Man setze zur Abkürzung H statt $(r \cdot t - s^2)$, M statt $[(1 + p^2) \cdot t - 2pq \cdot s + (1 + q^2) \cdot r]$, und G statt $(1 + p^2 + q^2)$; so ist

$$R' = \frac{M + \sqrt{M^2 - 4H \cdot G}}{2H} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

und

$$R'' = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4H \cdot G}}{2H} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so bekommt man im Allgemeinen

$$R' + R'' = \frac{M}{H} \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Daraus erkennt man:

1) Wenn $R' + R'' = 0$ ist, so muss auch $M = 0$ sein, d. h. es muss auch Gleichung X stattfinden; oder

Digitized by Google

2) wenn $M = 0$ ist, d. h. wenn Gleichung X stattfindet, so muss auch $R' + R'' = 0$ sein.

Diejenige Gattung aller jener unendlichvielen Flächen, welche der Gleichung X genügen, wird sich sehr verschiedenartig specialisiren, je nachdem man verschiedene Gränzbedingungen aufstellt.

Erster Gränzfall. Die gesuchte Fläche soll von vier bestimmt vorgeschriebenen und in den Gränzebenen liegenden Curven begränzt werden.

Die erste Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse a senkrecht stehenden Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichung

$$\text{XIII)} \quad z_{a,y} = A \cdot y + B \cdot y^2$$

Die zweite Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse α senkrecht stehenden Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichung

$$\text{XIV)} \quad z_{\alpha,y} = C + E \cdot y$$

Die dritte Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse b senkrecht stehenden Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichung

$$\text{XV)} \quad z_{x,b} = H \cdot x^2$$

Die vierte Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse β senkrecht stehenden Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichung

$$\text{XVI)} \quad z_{x,\beta} = G + K \cdot x^2$$

Schaut man auf den ersten Gränzfall der 255sten Aufgabe zurück; so erkennt man dass auch jetzt sowohl die nach x identischen Gleichungen

$$\delta z_{x,b} = 0, \quad \delta z_{x,\beta} = 0, \quad \delta^2 z_{x,b} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\beta} = 0, \text{ etc.}$$

als auch die nach y identischen Gleichungen

$$\delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden müssen. Dabei fällt die Gränzengleichung IX von selbst hinweg; und die vier Gleichungen XIII—XVI dienen dazu, die zwei in z eingegangenen willkürlichen Functionen zu bestimmen. (Zur Bestimmung einer einzigen willkürlichen Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen braucht man bekanntlich jedesmal zwei Gleichungen.)

Zwischen den (in den Gleichungen XIII—XVI befindlichen) Constanten A, B, C, E, H, G, K muss eine gewisse Abhängigkeit stattfinden, wie bereits (im ersten Falle der 255sten Aufgabe) gezeigt ist. Findet diese Abhängigkeit nicht statt, so ist hiesiger Gränzfall unmöglich.

Zweiter Gränzfall. Es seien durchaus keine Gränzbedingungen vorgeschrieben, sondern man suche zwischen den gegebenen Gränzebenen die absolut kleinste Fläche. Hierbei kann die Gränzengleichung IX nur erfüllt werden, wenn folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{x,\beta} = 0, \quad \text{und} \quad \left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{x,b} = 0$$

und wenn folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad \text{und} \quad \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{a,y} = 0$$

stattfinden. Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich folgende vier einfachere

$$\text{XVII)} \quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta} = 0, \quad \text{XVIII)} \quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b} = 0$$

$$\text{XIX)} \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad \text{XX)} \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0$$

Man muss also eine solche Function z von x und y aufsuchen, welche den fünf Gleichungen X, XVII, XVIII, XIX, XX zugleich genügt. Diese Function ist aber

$$\text{XXI)} \quad z = A$$

Digitized by Google

wo A einen willkürlichen Constanten vorstellt, welcher von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig ist.

Man hat also dasselbe Resultat, welches sich schon aus der ersten Form des δU ergab, d. h. man hat wieder die in jeder beliebigen Entfernung mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene, wie zu erwarten war; denn deren zwischen den gegebenen Gränzebenen erstreckte Ausdehnung ist kleiner, als die jeder andern Fläche.

Gleichung XI reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\left(\frac{d_x \delta z}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)^2 \right) \cdot dy \cdot dx$$

woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Die Gränzfälle kann man, wie bekannt, nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Bevor Lagrange seinen Variationscalcul erfunden hatte, sind keine Aufgaben gestellt worden, wo eine Fläche gesucht wird, die einen Maximum-stand oder Minimum-stand liefert. In der zweiundzwanzigsten Vorlesung seines Werkes „Leçons sur le Calcul des fonctions" theilt er Beispiele mit; und in dem vierten derselben wird die kleinste Oberfläche gesucht.

Lagrange hat sich bei solchen Aufgaben, welche auf Doppelintegrale führen, ebenso wenig, als seine Nachfolger, mit der Untersuchung des für $\delta^2 U$ herzustellenden Ausdruckes beschäftigt; und dass ich auch in dieser Beziehung eine Lücke auszufüllen hatte, habe ich schon einmal (in der Schlussb. zur 251sten Aufg.) erwähnt.

Aufgabe 262.

Man sucht unter allen Flächen, welche zwischen zwei Paar (zu $x = a$ und $x = \alpha$, und zu $y = b$ und $y = \beta$ gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen einen gleichgrossen Flächeninhalt haben, diejenige, welche den grössten oder kleinsten Körperinhalt einschliesst.

Die hiesige Aufgabe verlangt also: Es soll

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot dy \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für z gesuchte Function von x und y nur aus der Zahl derer herausgesucht werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2} \right) \cdot dy \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

Man mutire den Ausdruck II (wie in der 260sten Aufgabe), so bekommt man

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d_x (\delta_1) z}{dx} + q \cdot \frac{d_y (\delta_1) z}{dy} \right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

wo p statt $\frac{d_x z}{dx}$, und q statt $\frac{d_y z}{dy}$ gesetzt ist. Setzt man zur ferneren Abkürzung P statt $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, und Q statt $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, und formt man Gleichung III um, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \int_b^\beta (P_{\alpha,y} \cdot (\delta_1) z_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot (\delta_1) z_{a,y}) \cdot dy + \int_a^\alpha (Q_{x,\beta} \cdot (\delta_1) z_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot (\delta_1) z_{x,b}) \cdot dx$$
$$- \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy} \right) \cdot (\delta_1) z \cdot dy \cdot dx = 0$$

Mutirt man auch Gleichung I, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad {}_{(\delta_1)}U = \int_a^\alpha \int_b^\beta {}_{(\delta_1)}z \cdot dy \cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm aus V zu eliminiren, multiplicire man Gleichung IV mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x und nach y constanten Factor L, addire dieses Product zu V, und führe statt des Abkürzungszeichens ${}_{(\delta_1)}z$ wieder seinen Ausdruck zurück; so bekommt man

$$\text{VI)}\quad {}_{(\delta_1)}U = L \cdot \int_b^\beta \left(P_{\alpha,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{a,y} \right) \cdot dy$$

$$+ L \cdot \int_a^\alpha \left(Q_{x,\beta} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,b} \right) \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(1 - L\frac{d_x P}{dx} - L\frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z + \left(1 - L\frac{d_x P}{dx} - L\frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m \right] \cdot dy \cdot dx$$

Man hat also die Hauptgleichung

$$\text{VII)}\quad 1 - L \cdot \frac{d_x P}{dx} - L \cdot \frac{d_y Q}{dy} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{VIII)}\quad \int_b^\beta \left(P_{\alpha,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{a,y} \right) \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left(Q_{x,\beta} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,b} \right) \cdot dx = 0$$

wo man den gemeinschaftlichen constanten Factor L weggelassen hat.

Wenn man die in VII angedeuteten Differentiationen ausführt, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \frac{1}{L} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{d_x^2 z}{dx^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right) - 2 \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + \frac{d_y^2 z}{dy^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2\right)$$

Mutirt man Gleichung V noch einmal, so bekommt man

$$\text{X)}\quad {}_{(\delta_1)^2}U = \int_a^\alpha \int_b^\beta {}_{(\delta_1)^2}z \cdot dy \cdot dx$$

Man mutire auch Gleichung III noch einmal, multiplicire dann die sich ergebende Mutationsgleichung mit dem bereits angewendeten Factor L, addire dieses Product zu X, forme um, und beachte Gleichung VII; so bekommt man

$$\text{XI)}\quad {}_{(\delta_1)^2}U =$$

$$L \cdot \int_b^\beta (P_{\alpha,y} \cdot {}_{(\delta_1)^2}z_{\alpha,y} - P_{a,y} \cdot {}_{(\delta_1)^2}z_{a,y})\, dy + L \cdot \int_a^\alpha (Q_{x,\beta} \cdot {}_{(\delta_1)^2}z_{x,\beta} - Q_{x,b} \cdot {}_{(\delta_1)^2}z_{x,b}) \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{L}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q \cdot \frac{d_x {}_{(\delta_1)}z}{dx} - p\,\frac{d_y {}_{(\delta_1)}z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x {}_{(\delta_1)}z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y {}_{(\delta_1)}z}{dy}\right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

Es hangt also von L ab, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, d. h. wenn die gesuchte Fläche ihre concave Seite gegen die Coordinatenebene XY wendet, so ist der eingeschlossene Körperinhalt ein Maximum-stand; wenn aber die Fläche ihre convexe Seite gegen die Coordinatenebene XY wendet, so ist der eingeschlossene Körperinhalt ein Minimum-stand.

Dieses ist aber ganz nach Analogie jener (der 217ten) Aufgabe, wo man unter allen Curven von gleicher Länge diejenige sucht, welche den kleinsten oder grössten Flächeninhalt einschliesst.

Digitized by Google

Unter den verschiedenen besonderen Integralen, welche der Partialdifferentialgleichung IX genügen, befindet sich auch folgende Urgleichung

$$\text{XII)}\quad (x-c)^2+(y-e)^2+(z-f)^2=4\cdot L^2$$

welche der Kugel angehört. Es muss jedoch das allgemeine Integral mit den beiden eingehenden willkürlichen Functionen an die Stelle dieses besonderen Integrals XII noch aufgesucht werden. Ohne aber dieses allgemeine Integral herzustellen, kann man schon aus Gleichung IX Eigenschaften ableiten, die allen den der Gleichung IX entsprechenden unendlichvielen Flächen gemeinschaftlich sind. Man gebrauche die Abkürzungszeichen der vorigen Aufgabe, so geht Gleichung IX über in

$$\frac{1}{L}\cdot G^{\frac{3}{2}}=M$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{L}=\frac{M}{G\cdot\sqrt{G}}$$

oder

$$\frac{1}{L}=\frac{4H\cdot M}{4\cdot H\cdot G\cdot\sqrt{G}}$$

oder

$$\frac{1}{L}=\frac{4H\cdot M}{M^2\cdot\sqrt{G}-(M^2-4G\cdot H)\cdot\sqrt{G}}$$

oder

$$\frac{1}{L}=\frac{2H\cdot\left[\left(M+\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)+\left(M-\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)\right]}{\left(M+\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)\cdot\left(M-\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)\cdot\sqrt{G}}$$

oder

$$\frac{1}{L}=\frac{2H}{\left(M+\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)\cdot\sqrt{G}}+\frac{2H}{\left(M-\sqrt{M^2-4G\cdot H}\right)\cdot\sqrt{G}}$$

Wenn nun R' und R'' zwei zusammengehörige Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes der gesuchten Fläche bedeuten; so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XIII)}\quad \frac{1}{L}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit folgender

$$\text{XIV)}\quad R'\cdot R''=L\cdot(R'+R'')$$

Durch diese letzte Gleichung ist aber ausgesprochen: „alle jene unendlichvielen Flächen, welche der Gleichung IX genügen, haben in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft gemeinschaftlich, dass jedesmal das Product der beiden Krümmungshalbmesser zu ihrer Summe in einem constanten Verhältnisse steht."

Wählt man unter allen hier zulässigen Flächen die Kugelfläche heraus, so ist jetzt $R'=R''$; und wenn man auf Gleichung XII zurückschaut, so erkennt man, dass $2L$ der Halbmesser der Kugelfläche, d. h. dass $R'=R''=2L$ ist; und Gleichung XIV geht jetzt über in

$$2L\cdot 2L=L\cdot(2L+2L)$$

wie sein muss.

Diejenige Gattung aller jener unendlichvielen Flächen, welche der Gleichung IX genügen, wird sich sehr verschiedenartig specialisiren, je nachdem man verschiedene Gränzbedingungen aufstellt. Hat man aber die Gränzengleichung so, wie die Gränzbedingungen vorschreiben, erfüllt; dann wird immer noch wenigstens ein willkürlicher Constanter zurückbleiben, und man kann diesen oder, wenn es vortheilhafter ist, einen aus diesem gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen. (In hiesiger Aufgabe wird es in der Regel genügen, m statt L zu setzen. (Alles nach Analogie der 217[ten] Aufg.)

S p e c i e l l e r G r ä n z f a l l. Die gesuchte Fläche soll von vier bestimmt vorgeschriebenen und in den Gränzebenen liegenden Curven begränzt werden, wie im ersten Gränzfalle der vorigen Aufgabe.

Schaut man auf den ersten Gränzfall der 255[sten] (oder auch der 214[ten]) Aufgabe

zurück; so erkennt man, dass folgende Gleichungen, welche theils nach x theils nach y identisch sind,

$$(\delta_1)z_{x,b} = 0,\quad (\delta_1)z_{x,\beta} = 0,\quad (\delta_1)z_{a,y} = 0,\quad (\delta_1)z_{\alpha,y} = 0$$

$$(\delta_1)^2 z_{x,b} = 0,\quad (\delta_1)^2 z_{x,\beta} = 0,\quad (\delta_1)^2 z_{a,y} = 0,\quad (\delta_1)^2 z_{\alpha,y} = 0$$

etc. etc.

stattfinden müssen. Diese Gleichungen sind aber gleichbedeutend mit folgenden

$$\delta z_{x,b} + \left(\frac{d_m z}{dm}\right)_{x,b} \cdot \vartheta m = 0,\qquad \delta z_{x,\beta} + \left(\frac{d_m z}{dm}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta m = 0$$

$$\delta z_{a,y} + \left(\frac{d_m z}{dm}\right)_{a,y} \cdot \vartheta m = 0,\qquad \delta z_{\alpha,y} + \left(\frac{d_m z}{dm}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta m = 0$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und folgende vier Gleichungen

$$\text{XV)}\quad z_{a,y} = A \cdot y + B \cdot y^2,\qquad \text{XVI)}\quad z_{\alpha,y} = C + E \cdot y$$

$$\text{XVII)}\quad z_{x,b} = H \cdot x^2,\qquad \text{XVIII)}\quad z_{x,\beta} = G + K \cdot x^2$$

müssen bei Bestimmung der in z eingegangenen zwei willkürlichen Functionen mitbenützt werden. (Zur Bestimmung einer einzigen willkürlichen Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen braucht man bekanntlich jedesmal zwei Gleichungen.)

Zwischen den (in den Gleichungen XV—XVIII befindlichen) Constanten A, B, C, E, H, G, K muss eine gewisse Abhängigkeit stattfinden, wie bereits (im ersten Falle der 255sten Aufg.) gezeigt ist. Findet diese Abhängigkeit nicht statt, so ist hiesiger Gränzfall unmöglich.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β alle in Betracht zu ziehenden Flächen einen gleichgrossen Flächeninhalt haben müssen; und wenn diesem Flächeninhalte die bestimmte Grösse g^2 zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XIX)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx = g^2$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die gesuchte Fläche noch einer andern Bedingung unterworfen werden. (Man vergleiche den ersten Gränzfall der 217ten Aufg.)

Die Gränzfälle kann man nach Belieben vermehren.

Schlussbemerkung. Die hiesige Aufgabe ist die erste unter denen, wo eine Fläche gesucht wird, die einen Maximum-stand oder Minimum-stand liefert. Sie stammt von Lagrange her. Als er nemlich seine neue Methode zum ersten Male unter dem Titel: „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies" öffentlich bekannt machte, hat er diese Aufgabe als Beispiel hinzugefügt, um zu zeigen, dass sich seine neue Methode eben so gut auf doppelte wie auf einfache Integrale anwenden lasse. Man sehe Miscellanea Taurinensia. Tomus alter, pro annis 1760 et 1761. pag. 188 etc. (Dieser zweite Band besteht aus drei Abtheilungen, deren jede mit Seite 1 beginnt. Lagrange's Abhandlung befindet sich in der zweiten Abtheilung.)

Aufgabe 263.

Welche unter allen zwischen zwei Paar (zu $x = a$ und $x = \alpha$, und zu $y = b$ und $y = \beta$ gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen erstreckten Flächen ist es, bei welcher der Schwerpunkt der Fläche selbst am höchsten oder tiefsten liegt?

Man gebe der Coordinatenebene XY eine horizontale Lage, so ist bekanntlich

Digitized by Google

$$U = \frac{\int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx}{\int_a^\alpha \int_b^\beta \sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx}$$

die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von der Coordinatenebene XY; und dieser Ausdruck soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden. Hier ist, wie gewöhnlich, $p = \frac{d_x z}{dx}$, und $q = \frac{d_y z}{dy}$. Man mutire, und setze dann zur Abkürzung im Nenner A statt $\int_a^\alpha \int_b^\beta \sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx$, sowie auch P statt $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, und Q statt $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$; so bekommt man zunächst

$$\text{I)} \quad \delta U = \frac{1}{A^2} \cdot \Big[\int_a^\alpha \int_b^\beta \Big((\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot \delta z + P \cdot z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$
$$+ Q \cdot z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\Big) \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx$$
$$- \int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot (\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx \times \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big(P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\Big) \cdot dy \cdot dx\Big]$$

Man setze

$$\text{II)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta z \,.(\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta (\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx$$

so geht Gleichung I über in

$$\text{III)} \quad \delta U =$$
$$\frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[(\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot \delta z + (z - C) \cdot \Big(P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\Big)\Big] \cdot dy \quad dx$$

Nun ist

$$(z - C) \cdot P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d_x[(z - C) \cdot P \cdot \delta z] - \frac{d_x[(z - C) \cdot P]}{dx} \cdot \delta z$$

und

$$(z - C) \cdot Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} = \frac{1}{dy} \cdot d_y[(z - C) \cdot Q \cdot \delta z] - \frac{d_y[z - C) \cdot Q]}{dy} \cdot \delta z$$

Gleichung III formt sich also um in

$$\text{IV)} \quad \delta U =$$
$$\frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\sqrt{1 + p^2 + q^2} - \frac{d_x[(z - C) \cdot P]}{dx} - \frac{d_y[(z - C) \cdot Q]}{dy}\Big] \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_b^\beta \Big[((z - C) \cdot P)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - ((z - C) \cdot P)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\Big] \cdot dy$$
$$+ \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \Big[((z - C) \cdot Q)_{x, \beta} \cdot \delta z_{x, \beta} - ((z - C) \cdot Q)_{x, b} \cdot \delta z_{x, b}\Big] \cdot dx$$

Damit $\delta U = 0$ werden kann, muss sein

$$\text{V)} \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} - \frac{d_x[(z - C) \cdot P]}{dx} - \frac{d_y[(z - C) \cdot Q]}{dy} = 0$$

als Hauptgleichung; und wenn man die angedeuteten Differentiationen ausführt, so geht V über in

Digitized by Google

$$\text{VI)}\quad 1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right) + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2$$

$$= (z - C) \cdot \left[\left(1 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2\right) \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} - 2 \cdot \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + \left(1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2\right) \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right]$$

Als Gränzengleichung hat man

$$\text{VII)}\quad \int_b^\beta \left[((z - C) \cdot P)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - ((z - C) \cdot P)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha ((z - C) \cdot Q)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - ((z - C) \cdot Q)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\big] \cdot dx = 0$$

Man hat nun Gleichung VI zu integriren, und das sich ergebende Integral nach den jedesmaligen Gränzbedingungen so einzurichten, dass Gleichung VII auch noch erfüllt wird. Hiermit ist aber noch nicht genug gethan; man muss jetzt das nach den Gränzbedingungen specialisirte Integral auch noch in Gleichung II substituiren, und sorgfältig untersuchen, ob diese Gleichung nicht einen Widerspruch in sich selbst enthalte. Die analoge (d. h. in der 236sten Aufgabe befindliche) Untersuchung hat auf einen Widerspruch mit sich selbst geführt; und ein gleiches Ergebniss steht auch hier zu erwarten. Desshalb soll mit dieser Aufgabe nichts weiter mehr vorgenommen werden; denn die Aufgabe in der Weise, wie sie hier gestellt ist, ist keine Aufgabe.

Die nächstfolgende Aufgabe wird noch eine Nebenbedingung stellen, und dadurch zu einem Resultate führen.

Aufgabe 264.

Welche unter allen zwischen zwei Paar (zu $x = a$ und $x = \alpha$, und zu $y = b$ und $y = \beta$ gehörigen) parallelen und bezüglich auf den Axen X und Y senkrechten Ebenen erstreckten Flächen von gleichgrosser Oberfläche ist es, bei welcher der Schwerpunkt der Fläche selbst am höchsten oder tiefsten liegt?

Man gebe wieder, wie in voriger Aufgabe, der Coordinatenebene XY eine horizontale Lage; so hat man wieder für des Schwerpunktes Entfernung von der horizotal liegenden Coordinatenebene folgenden Ausdruck:

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha \int_b^\beta z \cdot (\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx}{\int_a^\alpha \int_b^\beta \sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx}$$

und dieser soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die für z gesuchte Function von x und y nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei denen allen der Ausdruck

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta (\sqrt{1 + p^2 + q^2}) \cdot dy \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Man mutire den Ausdruck II nach dem Vorgange der 260sten Aufgabe, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + p \cdot \frac{d_x d_m z}{dx.dm} \cdot \vartheta m \right.$$

$$\left. + q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + q \cdot \frac{d_y d_m z}{dy.dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dy \cdot dx = 0$$

Man forme um, und setze P statt $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, und Q statt $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$; so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{IV)}\int_b^\beta (P_{\alpha,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{\alpha,y}-P_{a,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{a,y})\cdot dy+\int_a^\alpha (Q_{x,\beta}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,\beta}-Q_{x,b}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,b})\cdot dx$$
$$-\int_a^\alpha\int_b^\beta\left(\frac{d_xP}{dx}+\frac{d_yQ}{dy}\right)\cdot{}_{(\delta_1)}z_{,}\cdot dy\cdot dx=0$$

Die Bedeutung des Abkürzungszeichens ${}_{(\delta_1)}z$ ist (aus Aufg. 260) bekannt.

Man mutire ebenso Gleichung I, und gebrauche die nemlichen Abkürzungen, wie in voriger Aufgabe; so bekommt man

$$\text{V)}\quad {}_{(\delta_1)}U=\frac{1}{A^2}\cdot\Bigg[\int_a^\alpha\int_b^\beta\left((\sqrt{1+p^2+q^2})\cdot{}_{(\delta_1)}z+P\cdot z\cdot\frac{d_x({}_{\delta_1})z}{dx}\right.$$
$$\left.+Q\cdot z\cdot\frac{d_y({}_{\delta_1})z}{dy}\right)\cdot dy\cdot dx\times\int_a^\alpha\int_b^\beta(\sqrt{1+p^2+q^2})\cdot dy\cdot dx$$
$$-\int_a^\alpha\int_b^\beta z\cdot(\sqrt{1+p^2+q^2})\cdot dy\cdot dx\times\int_a^\alpha\int_b^\beta\left(P\cdot\frac{d_x({}_{\delta_1})z}{dx}+Q\cdot\frac{d_y({}_{\delta_1})z}{dy}\right)\cdot dy\cdot dx\Bigg]$$

Wegen Gleichung III reducirt sich aber dieser Ausdruck auf

$$\text{VI)}\quad {}_{(\delta_1)}U=\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta\left((\sqrt{1+p^2+q^2})\cdot{}_{(\delta_1)}z+Pz\cdot\frac{d_x({}_{\delta_1})z}{dx}+Qz\cdot\frac{d_y({}_{\delta_1})z}{dy}\right)\cdot dy\cdot dx$$

Man forme um, so gibt sich für die zweite Form des ${}_{(\delta_1)}U$ folgender Ausdruck

$$\text{VII)}\quad {}_{(\delta_1)}U=\frac{1}{A}\cdot\int_b^\beta\left((P\cdot z)_{\alpha,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{\alpha,y}-(Pz)_{a,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{a,y}\right)\cdot dy$$
$$+\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left((Q\cdot z)_{x,\beta}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,\beta}-(Qz)_{x,b}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,b}\right)\cdot dx$$
$$+\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta\left(\sqrt{1+p^2+q^2}-\frac{d_x(Pz)}{dx}-\frac{d_y(Qz)}{dy}\right)\cdot{}_{(\delta_1)}z\cdot dy\cdot dx$$

Um nun das abhängige ϑm aus Gleichung VII zu eliminiren, multiplicire man Gleichung III oder vielmehr Gleichung IV mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x und nach y constanten Factor L, und addire dieses Product zu VII; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VIII)}\quad {}_{(\delta_1)}U=\frac{1}{A}\cdot\int_b^\beta\left[(P\cdot z+AL\cdot P)_{\alpha,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{\alpha,y}-(P\cdot z+AL\cdot P)_{a,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{a,y}\right]\cdot dy$$
$$+\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\left[(Q\cdot z+AL\cdot Q)_{x,\beta}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,\beta}-(Q\cdot z+AL\cdot Q)_{x,b}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,b}\right]\cdot dx$$
$$+\frac{1}{A}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta\left(\sqrt{1+p^2+q^2}-\frac{d_x(Pz+AL\cdot P)}{dx}-\frac{d_y(Q\cdot z+AL\cdot Q)}{dy}\right)\cdot{}_{(\delta_1)}z\cdot dy\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad \sqrt{1+p^2+q^2}-\frac{d_x(P\cdot z+AL\cdot P)}{dx}-\frac{d_y(Q\cdot z+AL\cdot Q)}{dy}=0$$

Wenn man die angezeigten Differentiationen ausführt, und dann noch K anstatt AL setzt; so bekommt man

$$\text{X)}\quad 1+p^2+q^2=(K+z)\cdot[(1+p^2)\cdot t-2pqs+(1+q^2)\cdot r]$$

Als Gränzengleichung aber bekommt man

$$\text{XI)}\quad \int_b^\beta\left[(P\cdot z+K\cdot P)_{\alpha,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{\alpha,y}-(P\cdot z+K\cdot P)_{a,y}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{a,y}\right]\cdot dy$$
$$+\int_a^\alpha\left[(Q\cdot z+K\cdot Q)_{x,\beta}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,\beta}-(Q\cdot z+K\cdot Q)_{x,b}\cdot{}_{(\delta_1)}z_{x,b}\right]\cdot dx=0$$

Digitized by Google

Verfährt man hier ebenso, wie in früheren Aufgaben; so kann man auch hier, ohne dass das Integral der Gleichung X hergestellt zu werden braucht, Eigenschaften aufsuchen, die allen den der Gleichung X entsprechenden unendlichvielen Flächen gemeinschaftlich sind. Gebraucht man nemlich wieder die Abkürzungen der 261sten Aufgabe, so gibt sich aus Gleichung X nach und nach

$$\frac{1}{K + z} = \frac{M}{G}$$

oder

$$\frac{1}{(K + z) \cdot \sqrt{G}} = \frac{M}{G \cdot \sqrt{G}}$$

oder

$$\frac{1}{(K + z) \cdot \sqrt{G}} = \frac{4H \cdot M}{4H \cdot G \cdot \sqrt{G}}$$

oder

$$\text{XII)} \quad \frac{1}{(K + z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}$$

oder

$$\text{XIII)} \quad (K + z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R' \cdot R''}{R' + R''}$$

oder

$$\text{XIV)} \quad R' \cdot R'' = (R' + R'') \cdot (K + z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ der Sinus des Winkels, welcher von der Normallinie und von der Coordinatenebene XY gebildet wird, also auch der Sinus aller der Winkel, welche von der Normallinie und jeder auf der Ordinatenaxe Z senkrechten Ebene gebildet werden. Daraus folgt:

1) Dass der Ausdruck $z \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Länge des vom Berührungspunkte bis zur Coordinatenebene XY erstreckten Stückes der Normallinie vorstellt. Wenn man ferner

2) unterscheidet, ob K mit z das nemliche oder das entgegengesetzte Vorzeichen hat, so wird man

a) in dem Falle, wo K und z entgegengesetzte Vorzeichen haben, eine auf die Ordinatenaxe Z senkrechte Ebene errichten, die um das Stück K beim Berührungspunkte näher liegt, als die Coordinatenebene XY. Dann stellt der Ausdruck $(K + z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Länge des vom Berührungspunkte bis zu jener senkrechten Ebene erstreckten Stückes der Normallinie vor. Dagegen

b) in dem Falle, wo K und z einerlei Vorzeichen haben, wird man eine auf die Ordinatenaxe Z senkrechte Ebene errichten, die um das Stück K vom Berührungspunkte entfernter liegt, als die Coordinatenebene XY. Dann stellt wiederum der Ausdruck $(z + K) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ die Länge des vom Berührungspunkte bis zu jener senkrechten Ebene erstreckten Stückes der Normallinie vor.

Nachdem nun die Bedeutung des Ausdruckes $(K + z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ auseinandergesetzt ist, lässt sich aus Gleichung XIV gradezu erkennen, in welchem Verhältnisse das Product der beiden Krümmungshalbmesser zu ihrer Summe steht.

Aufgabe 265.

Es sei V ein reeller, mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht z als solche Function der beiden nichtmutablen und untereinander unabhängigen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

Digitized by Google

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufg.) erläutert. Man setze zur Abkürzung p, q, r, s, t bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$, und mutire; so bekommt man als erste Form des δU folgenden Ausdruck

$$\delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_r V}{dr} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \frac{d_s V}{ds} \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + \frac{d_t V}{dt} \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \right) \cdot dy \cdot dx$$

Wenn man nun diesen Ausdruck so, wie er hier ist, umformen wollte; so würde die neue Form ziemlich unbeholfen ausfallen. Man wähle also Abkürzungszeichen, und versehe sie mit Merkmalen, die es möglich machen, dass die Bedeutung und der Ursprung eines jeden dieser Abkürzungszeichen durch die ganze Untersuchung hindurch erkennbar bleibt. Dieser Zweck wird erreicht, wenn man die zu den beiden Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{d_x \delta z}{dx} \text{ und } \frac{d_y \delta z}{dy}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(Ix) \text{ und } (Iy)$$

und wenn man auf analoge Weise die zu den drei Differentialquotienten der zweiten Ordnung

$$\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2},\ \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy},\ \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(IIx^2),\ (IIxy),\ (IIy^2)$$

bezeichnet. Dadurch gestaltet sich die oben aufgestellte erste Form des δU auf folgende Weise:

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + (Ix) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (Iy) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + (IIx^2) \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + (IIxy) \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + (IIy^2) \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \right] \cdot dy \cdot dx \,,$$

Man berücksichtige, dass die durch (Ix), (Iy), (IIx^2), $(IIxy)$, (IIy^2) repräsentirten Ausdrücke das x und y nicht nur unmittelbar sondern auch mittelbar in z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ enthalten; und man beachte, dass die durch δz, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$, $\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}$, $\frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}$ vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x und y zu betrachten sind. Nach allem diesem ist also

$$\frac{d_x((Ix) \cdot \delta z)}{dx} = \frac{d_x(Ix)}{dx} \cdot \delta z + (Ix) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

und daraus folgt

$$\text{III)} \quad (Ix) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} = \frac{d_x((Ix) \cdot \delta z)}{dx} - \frac{d_x(Ix)}{dx} \cdot \delta z$$

Ebenso ist

$$\frac{d_y((Iy) \cdot \delta z)}{dy} = \frac{d_y(Iy)}{dy} \cdot \delta z + (Iy) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

Digitized by Google

und daraus folgt

$$\text{IV)}\quad (\mathrm{Iy})\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}=\frac{d_y((\mathrm{Iy})\cdot\delta z)}{dy}-\frac{d_y(\mathrm{Iy})}{dy}\cdot\delta z$$

Ferner ist

$$\frac{d_x\left((\mathrm{IIx^2})\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\right)}{dx}=(\mathrm{IIx^2})\cdot\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}+\frac{d_x(\mathrm{IIx^2})}{dx}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$=(\mathrm{IIx^2})\cdot\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}+\frac{d_x\left(\frac{d_x(\mathrm{IIx^2})}{dx}\cdot\delta z\right)}{dx}-\frac{d_x^2(\mathrm{IIx^2})}{dx^2}\cdot\delta z$$

und daraus folgt

$$\text{V)}\quad (\mathrm{IIx^2})\cdot\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}=\frac{d_x\left((\mathrm{IIx^2})\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}\right)}{dx}-\frac{d_x\left(\frac{d_x(\mathrm{IIx^2})}{dx}\cdot\delta z\right)}{dx}+\frac{d_x^2(\mathrm{IIx^2})}{dx^2}\cdot\delta z$$

Ferner ist

$$\text{VI)}\quad \frac{d_xd_y((\mathrm{IIxy})\cdot\delta z)}{dx\cdot dy}=\frac{d_xd_y(\mathrm{IIxy})}{dx\cdot dy}\cdot\delta z+\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}+\frac{d_x(\mathrm{IIxy})}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$
$$+(\mathrm{IIxy})\cdot\frac{d_xd_y\delta z}{dx\cdot dy}$$

Auf dieselbe Weise, wie man die Gleichungen III und IV hergestellt hat, kann man sich bilden

$$\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}=\frac{d_x\left(\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\cdot\delta z\right)}{dx}-\frac{d_xd_y(\mathrm{IIxy})}{dx\cdot dy}\cdot\delta z$$

und

$$\frac{d_x(\mathrm{IIxy})}{dx}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}=\frac{d_y\left(\frac{d_x(\mathrm{IIxy})}{dx}\cdot\delta z\right)}{dy}-\frac{d_xd_y(\mathrm{IIxy})}{dx\cdot dy}\cdot\delta z$$

Führt man diese Ausdrücke in VI ein, so gibt sich alsdann

$$\text{VII)}\quad (\mathrm{IIxy})\cdot\frac{d_xd_y\delta z}{dx\cdot dy}=\frac{d_xd_y((\mathrm{IIxy})\cdot\delta z)}{dx\cdot dy}-\frac{d_x\left(\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\cdot\delta z\right)}{dx}$$
$$-\frac{d_y\left(\frac{d_x(\mathrm{IIxy})}{dx}\cdot\delta z\right)}{dy}+\frac{d_xd_y(\mathrm{IIxy})}{dx\cdot dy}\cdot\delta z$$

Auf dieselbe Weise, wie man Gleichung V gebildet hat, kann man auch bekommen

$$\text{VIII)}\quad (\mathrm{IIy^2})\cdot\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}=\frac{d_y\left((\mathrm{IIy^2})\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}\right)}{dy}-\frac{d_y\left(\frac{d_y(\mathrm{IIy^2})}{dy}\cdot\delta z\right)}{dy}+\frac{d_y^2(\mathrm{IIy^2})}{dy^2}\cdot\delta z$$

Man führe diese in III, IV, V, VII, VIII gefundenen Ausdrücke in Gleichung II ein und integrire soviel als möglich; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \delta U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\left[\frac{d_zV}{dz}-\frac{d_x(\mathrm{Ix})}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{Iy})}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{d_x^2(\mathrm{IIx^2})}{dx^2}+\frac{d_xd_y(\mathrm{IIxy})}{dx\cdot dy}+\frac{d_y^2(\mathrm{IIy^2})}{dy^2}\right]\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$
$$+\int_b^\beta\left[\left((\mathrm{Ix})-\frac{d_x(\mathrm{IIx^2})}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}+(\mathrm{IIx^2})_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}\right.$$
$$\left.-\left((\mathrm{Ix})-\frac{d_x(\mathrm{IIx^2})}{dx}-\frac{d_y(\mathrm{IIxy})}{dy}\right)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}-(\mathrm{IIx^2})_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}\right]\cdot dy+$$

Digitized by Google

$$+\int_a^\alpha \Big[\Big((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\Big)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + (IIy^2)_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy}\Big)_{x,\beta}$$

$$- \Big((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\Big)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - (IIy^2)_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy}\Big)_{x,b}\Big] \cdot dx$$

$$+ (IIxy)_{\alpha,\beta} \cdot \delta z_{\alpha,\beta} - (IIxy)_{\alpha,b} \cdot \delta z_{\alpha,b} - (IIxy)_{a,\beta} \cdot \delta z_{a,\beta} + (IIxy)_{a,b} \cdot \delta z_{a,b}$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch zugleich noch integrirt werden soll. Es lässt sich also keine fernere Transformation mehr anbringen.

Ueberschaut man letzteren Ausdruck noch einmal, so wird man erkennen, dass die von mir gewählten Abkürzungszeichen in der That zweckmässig sind. Diese lassen auch ohneweiters eine analoge Ausdehnung zu, und zwar nicht nur auf solche Aufgaben mit Doppelintegralen, wo noch höhere Differentialquotienten vorkommen, sondern auch auf Aufgaben mit dreifachen, vierfachen, etc. Integralen. (Man vergleiche z. B. Aufg. 271.)

Erstens. Man nehme zuerst die erste (in Gleichung II aufgestellte) Form des δU vor. Hier bekommt man im Allgemeinen Systeme von je sechs Gleichungen, d. h. eine und dieselbe für z gesuchte Function muss sechs Gleichungen zugleich genügen; und desshalb wird die Aufgabe in der Regel eine überbestimmte sein. Uebrigens ist, wenn sich für z wirklich eine entsprechende Function finden lässt, diese von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig. (Wie man aber Functionen findet, welche mehreren Partialdifferentialgleichungen zugleich genügen, darüber mögen die Aufgaben 133 bis 153 verglichen werden.)

Zweitens. Schaut man aber auf die zweite (in Gleichung IX aufgestellte) Form des δU, so erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function z gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und fast immer möglich ist.

A) Man zerlege Gleichung IX zunächst in folgende zwei:

$$\text{X)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2} = 0$$

und

$$\text{XI)}\quad \int_b^\beta \Big[\Big((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy}\Big)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + (IIx^2)_{\alpha,y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx}\Big)_{\alpha,y}$$

$$- \Big((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy}\Big)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - (IIx^2)_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x \delta z}{dx}\Big)_{a,y}\Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[\Big((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\Big)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + (IIy^2)_{x,\beta} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy}\Big)_{x,\beta}$$

$$- \Big((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\Big)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - (IIy^2)_{x,b} \cdot \Big(\frac{d_y \delta z}{dy}\Big)_{x,b}\Big] \cdot dx$$

$$+ (IIxy)_{\alpha,\beta} \cdot \delta z_{\alpha,\beta} - (IIxy)_{\alpha,b} \cdot \delta z_{\alpha,b} - (IIxy)_{a,\beta} \cdot \delta z_{a,\beta} + (IIxy)_{a,b} \cdot \delta z_{a,b}$$

$$= 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung, und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung gilt bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y, und wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der vierten Ordnung sein. Ist sie aber wirklich von der vierten Ordnung, so nimmt ihr allgemeines Integral vier willkürliche Functionen in sich auf, während unter jenen singulären Integralen, welche

Digitized by Google

keine willkürliche Function enthalten, keines mit mehr als mit vierzehn willkürlichen Constanten versehen sein kann, welche nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren.

Die Gränzengleichung hat schon die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden; auch wird sie sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der vierten Ordnung ist.

Um das Prüfungsmittel, ob nemlich ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, herzustellen, muss man mit dem für δ^2U sich ergebenden Ausdrucke noch die gehörige Umformung vornehmen. Einen speciellen Fall einer solchen Umformung liefert die nächstfolgende (die 266ste) Aufgabe. Im Allgemeinen sei aber folgendes bemerkt:

Wenn der Gang des in der 251sten und den folgenden Aufgaben angewendeten Verfahrens gehörig aufgefasst ist; so kann es gradezu auch auf zusammengesetztere Fälle ausgedehnt werden, und man wird dabei zu dem Ergebnisse gelangen, dass δ^2U negativ oder positiv bleibt, wenn der Ausdruck

$$\text{XII)}\quad \frac{d_r^2V}{dr^2}\cdot\left(\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}\right)^2+2\cdot\frac{d_rd_sV}{dr.ds}\cdot\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}\cdot\frac{d_xd_y\delta z}{dx.dy}+2\cdot\frac{d_rd_tV}{dr.dt}\cdot\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}\cdot\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}$$
$$+\frac{d_s^2V}{ds^2}\cdot\left(\frac{d_xd_y\delta z}{dx.dy}\right)^2+2\cdot\frac{d_sd_tV}{ds.dt}\cdot\frac{d_xd_y\delta z}{dx.dy}\cdot\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}+\frac{d_t^2V}{dt^2}\cdot\left(\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}\right)^2$$

beständig negativ oder positiv bleibt, während man dem y alle stetig neben einander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt. Die Bedingungen, unter welchen dieser Ausdruck beständig einerlei Zeichen behält, lassen sich aber nach §. 12 jedesmal leicht aufsuchen. Obige Regel verliert ihre Giltigkeit, sobald einer der Quotienten

$$\frac{d_z^2V}{dz^2},\ \frac{d_zd_pV}{dz.dp},\ \frac{d_zd_qV}{dz.dq},\ \frac{d_zd_rV}{dz.dr},\ \frac{d_zd_sV}{dz.ds},\ \frac{d_zd_tV}{dz.dt}$$
$$\frac{d_p^2V}{dp^2},\ \frac{d_pd_qV}{dp.dq},\ \frac{d_pd_rV}{dp.dr},\ \frac{d_pd_sV}{dp.ds},\ \frac{d_pd_tV}{dp.dt},\ \frac{d_q^2V}{dq^2}$$
$$\frac{d_qd_rV}{dq.dr},\ \frac{d_qd_sV}{dq.ds},\ \frac{d_qd_tV}{dq.dt},\ \frac{d_r^2V}{dr^2},\ \frac{d_rd_sV}{dr.ds},\ \frac{d_rd_tV}{dr.dt},\ \frac{d_s^2V}{ds^2},\ \frac{d_sd_tV}{ds.dt},\ \frac{d_t^2V}{dt^2}$$

bei irgend einem Werthe des x und des y die im Calcul unzulässige Form $\frac{N}{0}$ annimmt. Wenn aber der Ausdruck XII nicht bei allen von a bis α und von b bis β liegenden Werthen des x und des y beständig negativ oder beständig positiv bleibt; so ist dieses (man sehe §. 10, und namentlich die entsprechende Untersuchung in der 251sten Aufgabe) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde, sondern dieses müsste noch besonders nachgewiesen werden.

Alles Weitere nach Analogie der 251sten Aufgabe.

Nun ist man auf dem Punkte, die Gränzengleichung zu erfüllen.

Erster Fall. Die Specialitäten seien von der Art, dass folgende nach x identische Gleichungen

$$\text{XIII)}\quad \delta z_{x,b}=0,\quad \delta z_{x,\beta}=0,\quad \delta^2 z_{x,b}=0,\quad \delta^2 z_{x,\beta}=0,\ \text{etc.}$$

$$\text{XIV)}\quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b}=0,\quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta}=0,\quad \left(\frac{d_y\delta^2 z}{dy}\right)_{x,b}=0,\quad \left(\frac{d_y\delta^2 z}{dy}\right)_{x,\beta}=0,\ \text{etc.}$$

und dass folgende nach y identische Gleichungen

$$\text{XV)}\quad \delta z_{a,y}=0,\quad \delta z_{\alpha,y}=0,\quad \delta^2 z_{a,y}=0,\quad \delta^2 z_{\alpha,y}=0,\ \text{etc.}$$

$$\text{XVI)}\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}=0,\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}=0,\quad \left(\frac{d_x\delta^2 z}{dx}\right)_{a,y}=0,\quad \left(\frac{d_x\delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha,y}=0,\ \text{etc.}$$

stattfinden.

Digitized by Google

Weil die Gleichungen XIII bei jedem Werthe des x gelten, so gelten sie auch bei den speciellen Werthen $x = a$ und $x = \alpha$, d. h. es ist auch

$$\odot \left\{ \begin{array}{l} \delta z_{a,b} = 0, \quad \delta z_{\alpha,b} = 0, \quad \delta z_{a,\beta} = 0, \quad \delta z_{\alpha,\beta} = 0 \\ \delta^2 z_{a,b} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,b} = 0, \quad \delta^2 z_{a,\beta} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,\beta} = 0 \\ \text{etc. etc.} \end{array} \right.$$

Weil ferner die Gleichungen XV bei jedem Werthe des y gelten, so gelten sie auch bei $y = b$ und $y = \beta$; und somit bekommt man abermals das System der Gleichungen $\odot$.

Die ganze Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg.

Zweiter Fall. Sind die Specialitäten von der Art, dass von den zwölf Ausdrücken

$$\delta z_{x,b}, \quad \delta z_{x,\beta}, \quad \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,b}, \quad \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\beta}$$

$$\delta z_{a,y}, \quad \delta z_{\alpha,y}, \quad \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y}, \quad \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}$$

$$\delta z_{a,b}, \quad \delta z_{a,\beta}, \quad \delta z_{\alpha,b}, \quad \delta z_{\alpha,\beta}$$

kein einziger zu Null wird; so wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn folgende zwölf Gleichungen stattfinden:

$$1) \quad \left((\mathrm{I}x) - \frac{d_x(\mathrm{II}x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy}\right)_{\alpha,y} = 0, \qquad 2) \quad (\mathrm{II}x^2)_{\alpha,y} = 0$$

$$3) \quad \left((\mathrm{I}x) - \frac{d_x(\mathrm{II}x^2)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}xy)}{dy}\right)_{a,y} = 0, \qquad 4) \quad (\mathrm{II}x^2)_{a,y} = 0$$

$$5) \quad \left((\mathrm{I}y) - \frac{d_x(\mathrm{II}xy)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}y^2)}{dy}\right)_{x,\beta} = 0, \qquad 6) \quad (\mathrm{II}y^2)_{x,\beta} = 0$$

$$7) \quad \left((\mathrm{I}y) - \frac{d_x(\mathrm{II}xy)}{dx} - \frac{d_y(\mathrm{II}y^2)}{dy}\right)_{x,b} = 0, \qquad 8) \quad (\mathrm{II}y^2)_{x,b} = 0$$

$$9) \quad (\mathrm{II}xy)_{\alpha,\beta} = 0, \quad 10) \quad (\mathrm{II}xy)_{\alpha,b} = 0, \quad 11) \quad (\mathrm{II}xy)_{a,\beta} = 0, \quad 12) \quad (\mathrm{II}xy)_{a,b} = 0$$

In den Gleichungen 1, 2, 3, 4 ist x constant; sie sind aber nach y identisch, und müssen, weil sie in der Regel Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach y behandelt werden.

In den Gleichungen 5, 6, 7, 8 ist y constant; sie sind aber nach x identisch, und müssen, weil sie in der Regel Differentialgleichungen sind, als totale Differentialgleichungen nach x behandelt werden.

Diese acht Gleichungen muss man vor Allem integriren; und dann erst kann man sie bei Bestimmung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen benützen.

Die Gleichungen 9, 10, 11, 12 sind weder nach x noch nach y identisch, sondern gelten nur bei den Werthen $x = a$, $y = b$, $x = \alpha$, $y = \beta$; und sie müssen bei Bestimmung der willkürlichen Constanten benützt werden, welche durch Integration der so eben betrachteten acht totalen Differentialgleichungen eingegangen sind. Diese willkürlichen Constanten stehen aber in einem gewissen Zusammenhange untereinander, welcher jedesmal genau ausgemittelt werden muss. [Man sehe in dieser Hinsicht den zweiten Fall der 255sten Aufg., wo sich ergeben hat, dass die daselbst eingegangenen Constanten A, B, C, E einander gleich sein müssen. Man sehe ebenso die zwanzig Gleichungen (nemlich 17—20 und 37—52) im zweiten Falle der 270sten Aufg.; denn in diesen Gleichungen ist ebenfalls der Zusammenhang ausgesprochen, in welchem die durch Integration der totalen Differentialgleichungen eingegangenen Constanten stehen.]

Dritter Fall. Die Specialitäten seien von der Art, dass nur bei den festen Werthen a, α, b, β die Gleichungen

Digitized by Google

$$\delta z_{a,b} = 0,\quad \delta z_{a,\beta} = 0,\quad \delta z_{\alpha,b} = 0,\quad \delta z_{\alpha,\beta} = 0$$
$$\delta^2 z_{a,b} = 0,\quad \delta^2 z_{a,\beta} = 0,\quad \delta^2 z_{\alpha,b} = 0,\quad \delta^2 z_{\alpha,\beta} = 0$$
etc. etc.

stattfinden; dagegen soll keiner der von z herrührenden Mutationscoefficienten und ihrer Differentialquotienten, welche noch mit einem unbestimmten x oder y versehen sind, zu Null werden. Hier wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn abermals die nach y identischen Gleichungen 1, 2, 3, 4, und die nach x identischen Gleichungen 5, 6, 7, 8 stattfinden. Diese acht Gleichungen müssen vor allem integrirt werden, und dann erst kann man sie bei Bestimmung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen benützen. Damit aber bei den festen Werthen a, α, b, β die Gleichungen

$$\delta z_{a,b} = 0,\quad \delta z_{a,\beta} = 0,\quad \delta z_{\alpha,b} = 0,\quad \delta z_{\alpha,\beta} = 0$$
etc. etc.

stattfinden können, müssen noch vier nichtidentische Gleichungen, in welchen die Elemente

$$z_{a,b},\quad z_{a,\beta},\quad z_{\alpha,b},\quad z_{\alpha,\beta}$$

vorkommen, gegeben sein, welche bei Bestimmung der durch Integration der acht Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eingegangenen Constanten noch mitbenützt werden. (Man sehe den vierten Fall der 267sten Aufg.)

Andere specielle Fälle hinsichtlich der Zerlegung der Gränzengleichung, besonders solche, bei welchen unter den Mutationscoefficienten Abhängigkeiten stattfinden, kann man sich nach Belieben bilden.

B) Hat man diese mit der zweiten Form des δU unternommene Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung IX zurück, ob man nicht dem zu δz gehörigen Factor

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2}$$

die Form $\frac{M}{0}$ beilegen kann, etc. etc. (Dergleichen Fälle mögen dann nach Analogie der Aufgaben 163, 164, 165 behandelt werden.)

Schlussbemerkung. Eine der vorzüglichsten Abhandlungen Euler's ist die, welche den Titel „Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi" führt, und sich in dem im Jahre 1772 erschienenen XVIten Bande der Nov. Comment. acad. Petrop. pag. 35 bis 70 befindet. Hier legt er sich (§. 17—31) das Problem, wo eine Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht wird, ganz allgemein vor, und versucht auch (in §. 30) die zweite Form des für δU sich ergebenden Ausdruckes darzustellen. Die zu diesem Ausdrucke gehörige Partie, welche unter dem doppelten Integralzeichen steht, ist richtig; allein bei der andern Partie fehlen sehr viele Glieder. Diese Mangelhaftigkeit rührt daher, dass damals für die bestimmten Integrale noch keine eigenthümliche Bezeichnung eingeführt war. Aber eben, weil in Euler's Formel soviele Glieder fehlen, desshalb konnte er auch die wahre Bedeutung der von ihm wirklich hergestellten Glieder nicht erkennen; und somit ist es erklärlich, wie es kommen konnte, dass er (in §. 31) sich auf folgende Weise ausgesprochen hat:

„Was aber diese einzelnen Glieder eigentlich bedeuten, und zu welchem Zwecke sie „benützt werden können, lässt sich durchaus nicht erkennen; und daher scheint dieser „Gegenstand, zu welchem kaum die ersten Grundzüge entworfen sind, die ganze Aufmerk-„samkeit der Mathematiker in Anspruch zu nehmen, und eine sehr genaue Untersuchung „zu erfordern. Allein an diese Arbeit darf man sich kaum früher wagen, als bis einige „specielle Fälle sorgfältig und gründlich untersucht sind."

Eine sorgfältige Untersuchung specieller Fälle wäre auch wirklich das Beste gewesen, was Euler's Nachfolger hätten thun können.

Lacroix hat in dem im Jahre 1814, also 42 Jahre nach der eben genannten Abhandlung, gedruckten zweiten Bande seines grösseren Werkes „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde édition" sich (in Nr. 862) dieses Problem in derselben Allgemeinheit, wie Euler vorgelegt, und (Seite 785) gleichfalls die zweite Form des für δU sich ergebenden Ausdruckes herzustellen gesucht. Allein auch hier findet sich für die bestimmten Integrale noch keine eigenthümliche Bezeichnung, und auch hier fehlen, wie bei Euler, sehr viele Glieder. Desshalb erkennt auch Lacroix nicht die wahre Bedeutung der drei verschiedenen Arten der Glieder seines Ausdruckes.

Digitized by Google

Es ist noch zu bemerken, dass Euler und Lacroix bei ihren Untersuchungen die Integrationsgränzen des Doppelintegrals als constant behandelt haben; und über den Fall, wo auch die Gränzelemente veränderlich sind, haben erst Poisson und Ostrogradsky ausführliche Abhandlungen geschrieben. Ueber beide kann später (in der Schlussb. zur letzten Aufg.) besser geurtheilt werden, als hier. In beiden fehlt bei den bestimmten Doppelintegralen die eigenthümliche Bezeichnung; und dieser Mangel ist natürlich von bedeutendem Nachtheile. Auch kommt in beiden kein einziges, wenn auch noch so einfaches, specielles Beispiel vor, das vollständig durchgeführt wäre.

Ich habe (in Gleichung IX) alle Glieder der zweiten Form des δU vollständig hergestellt; und dabei kann man ohneweiters die wahre Bedeutung der drei verschiedenen Arten von Gliedern erkennen.

Auch habe ich (im Ausdrucke XII) die Bedingungen mitgetheilt, unter denen das hiesige Doppelintegral zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande wird.

Dadurch, dass ich auch specielle Aufgaben, welche auf Doppelintegrale führen, aufgestellt, und vollständig durchgeführt habe, habe ich befolgt, was Euler in seiner (oben erwähnten) Abhandlung, also schon vor 76 Jahren, verlangt, und was bis jetzt keiner seiner Nachfolger zu thun unternommen hat.

Aufgabe 266.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2x \cdot z - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} + y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze dann zur Abkürzung r anstatt $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2x \cdot \delta z + \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot r\right) \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} \right] \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[2x \cdot \delta^2 z + \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot r\right) \cdot \frac{d_x^2 \delta^2 z}{dx^2} + 2 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

Man forme den in I aufgestellten Ausdruck um, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2 \cdot y^4 \cdot \frac{d_x^4 z}{dx^4} \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \left[\left(x^2 - 2 \cdot y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + \left(-\frac{x^3}{3} + 2y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha,y} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} \right.$$

$$\left. - \left(x^2 - 2y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - \left(-\frac{x^3}{3} + 2y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} \right] \cdot dy$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Da der zu δz gehörige Factor $= 2x$ ist, also nicht zu Null werden, und nicht die Form $\frac{M}{0}$ annehmen kann; so erkennt man, dass die erste Form des δU nicht beachtet zu werden braucht. Es gibt also keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden könnte.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$\text{IV)} \quad \frac{d_x^4 z}{dx^4} = 0$$

Digitized by Google

Integrirt man, so bekommt man

$$\text{V)}\quad z = x^3 \cdot \xi(y) + x^2 \cdot \chi(y) + x \cdot F(y) + f(y)$$

wo jeder der Ausdrücke $\xi(y)$, $\chi(y)$, $F(y)$ und $f(y)$ eine für sich beliebige Function von y vorstellt.

Formt man nun auch den (in Gleichung II) für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck um, und berücksichtigt man die Hauptgleichung; so bekommt man zunächst

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Bigg[\left(x^2 - 2y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} + \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha, y}$$

$$- \left(x^2 - 2 \cdot y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y} - \left(-\frac{x^3}{3} + 2y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a, y}\Bigg] \cdot dy$$

Um aber diesen Ausdruck noch weiter umformen zu können, setze man

$$\text{VII)}\quad \int_a^x \int_b^y 2 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 \cdot dy \cdot dx =$$

$$\int_a^x \int_b^y 2y^4 \cdot \left(g \cdot \delta z + h \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^y \Bigg[\left(\eta \cdot \delta z^2 + 2\lambda \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right)_{x, y}$$

$$- \left(\eta \cdot \delta z^2 + 2\lambda \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right)_{a, y}\Bigg] \cdot dy$$

Man differentiire nun diese Gleichung nach x und nach y, und bringe alle Theilsätze auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so bekommt man

$$\left(2g^2 \cdot y^4 + \frac{d_x \eta}{dx}\right) \cdot \delta z^2 + \left(4gh \cdot y^4 + 2\eta + 2 \cdot \frac{d_x \lambda}{dx}\right) \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

$$+ (4g \cdot y^4 + 2\lambda) \cdot \delta z \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + \left(2h^2 \cdot y^4 + 2\lambda + \frac{d_x \mu}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2$$

$$+ (4h \cdot y^4 + 2\mu) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} = 0$$

Da nun diese Gleichung bei jeder beliebigen Function δz von x und y gelten soll, so zerfällt sie in folgende einzelne Gleichungen, die sowohl nach x als auch nach y identisch sind:

$$\text{VIII)}\quad 2g^2 \cdot y^4 + \frac{d_x \eta}{dx} = 0$$

$$\text{IX)}\quad 4g \cdot h \cdot y^4 + 2\eta + 2 \cdot \frac{d_x \lambda}{dx} = 0$$

$$\text{X)}\quad 4g \cdot y^4 + 2\lambda = 0$$

$$\text{XI)}\quad 2h^2 \cdot y^4 + 2\lambda + \frac{d_x \mu}{dx} = 0$$

$$\text{XII)}\quad 4h \cdot y^4 + 2\mu = 0$$

Aus diesen fünf Gleichungen eliminire man g und h, so bekommt man drei neue Gleichungen zwischen η, λ, μ, $\frac{d_x \eta}{dx}$, $\frac{d_x \mu}{dx}$, $\frac{d_x \lambda}{dx}$, durch deren Integration noch drei willkürliche Functionen $\pi'(y)$, $\pi''(y)$, $\pi'''(y)$ eingehen. Die (in Gleichung VI) aufgestellte Form des $\delta^2 U$ geht nun über in

Digitized by Google

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2 \cdot y^4 \cdot \left(g \cdot \delta z + h \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Bigg[\left(x^2 - 2y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta^2 z_{\alpha, y} + \left(- \frac{x^3}{3} + 2y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha, y}$$

$$+ \left(\eta \cdot \delta z^2 + 2\lambda \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right)_{\alpha, y}$$

$$- \left(x^2 - 2 \cdot y^4 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{a, y} \cdot \delta^2 z_{a, y} - \left(- \frac{x^3}{3} + 2y^4 \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a, y}$$

$$- \left(\eta \cdot \delta z^2 + 2\lambda \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2\right)_{a, y} \Bigg] \cdot dy$$

Man ist nunmehr auf dem Punkte, die Gränzengleichung zu erfüllen. Zu diesem Ende soll aber zuvor noch folgende Betrachtung gemacht werden.

Die gesuchte Fläche ist dargestellt durch

$$z = x^3 \cdot \xi(y) + x^2 \cdot \chi(y) + x \cdot F(y) + f(y)$$

und daraus folgt

$$\text{XIV)}\quad \frac{d_x z}{dx} = 3x^2 \cdot \xi(y) + 2x \cdot \chi(y) + F(y)$$

Durch diesen partiellen Differentialquotienten der ersten Ordnung ist aber die goniometrische Tangente des Winkels dargestellt, welcher gebildet ist von der Abscissenaxe X und von der in der Coordinatenebene XZ liegenden Spur der zu irgend einem Punkte der gesuchten Fläche gehörigen Berührungsebene.

Zu allen der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen gehören Berührungsebenen, deren in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Abscissenaxe X solche Winkel bilden, dass die, zu diesen Winkeln gehörige, goniometrische Tangente dargestellt wird durch

$$\text{XV)}\quad \frac{d_x z}{dx} + \frac{d_x \Delta z}{dx} = 3x^2 \cdot \xi(y) + 2x \cdot \chi(y) + F(y)$$

$$+ \varkappa \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1 . 2} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx^2} + \cdots\cdots\cdots$$

Aus allem diesem folgt:

A) Wenn man in dem Endpunkte der Abscisse a eine auf die Axe X senkrechte, also mit YZ parallele Ebene errichtet; so wird sie von der gesuchten Fläche in einer ebenen Curve geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$x = a$$

und

$$z_{a, y} = a^3 \cdot \xi(y) + a^2 \cdot \chi(y) + a \cdot F(y) + f(y)$$

Alle in dieser Curve gelegenen Punkte der gesuchten Fläche haben Berührungsebenen, deren in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X solche Winkel bilden, dass die, zu diesen Winkeln gehörige, goniometrische Tangente dargestellt wird durch

$$\text{XVI)}\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a, y} = 3a^2 \cdot \xi(y) + 2a \cdot \chi(y) + F(y)$$

Die im Endpunkte der Abscisse a senkrecht stehende Ebene wird aber von den der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach ebenen Curven geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$x = a$$

und

$$z_{a, y} + \Delta z_{a, y} = a^3 \cdot \xi(y) + a^2 \cdot \chi(y) + a \cdot F(y) + f(y)$$

$$+ \varkappa \cdot \delta z_{a, y} + \frac{\varkappa^2}{1 . 2} \cdot \delta^2 z_{a, y} + \cdots\cdots\cdots$$

Digitized by Google

Alle in diesen Curven gelegenen Punkte der (der gesuchten Fläche überall nächstanliegenden) Nachbarflächen haben Berührungsebenen, deren in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X solche Winkel bilden, dass die, zu diesen Winkeln gehörige, goniometrische Tangente dargestellt wird durch

$$\text{XVII)}\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} + \left(\frac{d_x \Delta z}{dx}\right)_{a,y} = 3a^2 \cdot \xi(y) + 2a \cdot \chi(y) + F(y)$$
$$+ \varkappa \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a,y} + \cdots\cdots\cdots$$

B) Wenn man ebenso im Endpunkte der Abscisse α eine auf die Axe X senkrechte also mit YZ parallele Ebene errichtet; so wird sie von der gesuchten Fläche in einer ebenen Curve geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$x = \alpha$$

und

$$z_{\alpha,y} = \alpha^3 \cdot \xi(y) + \alpha^2 \cdot \chi(y) + \alpha \cdot F(y) + f(y)$$

Alle in dieser Curve gelegenen Punkte der gesuchten Fläche haben Berührungsebenen, deren in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X solche Winkel bilden, dass die, zu diesen Winkeln gehörige, goniometrische Tangente dargestellt wird durch

$$\text{XVIII)}\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 3\alpha^2 \cdot \xi(y) + 2\alpha \cdot \chi(y) + F(y)$$

Die im Endpunkte der Abscisse α senkrecht stehende Ebene wird aber von den der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen nach ebenen Curven geschnitten, deren beide Gleichungen folgende sind:

$$x = \alpha$$

und

$$z_{\alpha,y} + \Delta z_{\alpha,y} = \alpha^3 \cdot \xi(y) + \alpha^2 \cdot \chi(y) + \alpha \cdot F(y) + F(y)$$
$$+ \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + \cdots\cdots\cdots$$

Alle in diesen Curven gelegenen Punkte der (der gesuchten Fläche überall nächstanliegenden) Nachbarflächen haben Berührungsebenen, deren in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X solche Winkel bilden, dass die, zu diesen Winkeln gehörige, goniometrische Tangente dargestellt wird durch

$$\text{XIX)}\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} + \left(\frac{d_x \Delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 3\alpha^2 \cdot \xi(y) + 2 \cdot \alpha \cdot \chi(y) + F(y)$$
$$+ \varkappa \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha,y} + \cdots\cdots\cdots$$

Erster Fall. Es ist in dem Endpunkte der Abscisse a eine auf die Axe X senkrechte Ebene errichtet; und von dieser Ebene sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen in einer und derselben Curve geschnitten werden. Desshalb müssen (man sehe Aufg. 258, erster Fall) bei jedem Werthe des y die Gleichungen $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, etc. stattfinden. Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse a und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise in einander hineinfallen. Bei dieser Bedingung fallen also die beiden Gleichungen XVI und XVII in folgende einzige zusammen:

$$3a^2 \cdot \xi(y) + 2a \cdot \chi(y) + F(y) = 3a^2 \cdot \xi(y) + 2a \cdot \chi(y) + F(y) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y}$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a,y} + \cdots\cdots\cdots$$

Digitized by Google

Da aber diese Gleichung bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten soll; so ist sie nur möglich, wenn bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen $\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} = 0$, $\left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{a,y} = 0$, etc. stattfinden.

Es sei auch in dem Endpunkte der Abscisse α eine auf die Axe X senkrechte Ebene errichtet; und von dieser Ebene sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen in einer und derselben Curve geschnitten werden. Desshalb müssen (man sehe wieder Aufgabe 253, erster Fall) bei jedem Werthe des y die Gleichungen $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, etc. stattfinden. Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse α und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise ineinander hineinfallen. Bei dieser Bedingung fallen also die beiden Gleichungen XVIII und XIX in folgende einzige zusammen:

$$3\alpha^2 \cdot \xi(y) + 2\alpha \cdot \chi(y) + F(y) = 3\alpha^2 \cdot \xi(y) + 2\alpha \cdot \chi(y) + F(y) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha,y} + \ldots\ldots$$

Da aber diese Gleichung bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten soll; so ist sie nur möglich, wenn bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen $\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0$, $\left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0$, etc. stattfinden.

Bei den hier gestellten Bedingungen fällt also die Gränzengleichung von selbst hinweg.

Die bis jetzt etwas allgemein gehaltene Untersuchung soll nun specialisirt werden.

In der im Endpunkte der Abscisse a senkrecht errichteten Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$1)\quad x = a, \quad \text{und} \quad 2)\quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

In der im Endpunkte der Abscisse α senkrecht errichteten Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$3)\quad x = \alpha, \quad \text{und} \quad 4)\quad z = C + E \cdot y$$

Durch diese beiden Curven sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen begränzt werden; man hat also folgende Gleichungen:

$$5)\quad a^3 \cdot \xi(y) + a^2 \cdot \chi(y) + a \cdot F(y) + f(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$6)\quad \alpha^3 \cdot \xi(y) + \alpha^2 \cdot \chi(y) + \alpha \cdot F(y) + f(y) = C + E \cdot y$$

Bei allen hier in Betracht zu ziehenden Flächen sollen die zur festen Abscisse a und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= \frac{y}{m}$. Man hat also die weitere Gleichung

$$7)\quad 3a^2 \cdot \xi(y) + 2a \cdot \chi(y) + F(y) = \frac{y}{m}$$

Ferner sollen auch noch bei allen hier in Betracht zu ziehenden Flächen die zur festen Abscisse α und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren mit der Axe X einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= \frac{y^2}{m^2}$.

Man hat daher noch folgende Gleichung

Digitized by Google

$$8) \quad 3\alpha^2 \cdot \xi(y) + 2\alpha \cdot \chi(y) + F(y) = \frac{y^2}{m^2}$$

Aus den vier Gleichungen 5, 6, 7, 8 lassen sich nun die vier willkürlichen Functionen $\xi(y)$, $\chi(y)$, $F(y)$, $f(y)$ bestimmen.

Zweiter Fall. Es seien durchaus keine Gränzbedingungen vorgeschrieben, sondern man soll die gesuchte Fläche aus allen möglichen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herauswählen. Hierbei zerfällt die Gränzengleichung in folgende vier

$$\alpha^2 - 2y^4 \cdot \left(\frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{\alpha, y} = 0, \quad -\frac{\alpha^3}{3} + 2y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha, y} = 0$$

$$a^2 - 2y^4 \cdot \left(\frac{d_x^3 z}{dx^3}\right)_{a, y} = 0, \quad -\frac{a^3}{3} + 2y^4 \cdot \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a, y} = 0$$

welche vier Gleichungen aber, wenn man für $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$ und $\frac{d_x^3 z}{dx^3}$ die Ausdrücke einsetzt, in folgende übergehen:

$$9) \quad \alpha^2 - 12 \cdot y^4 \cdot \xi(y) = 0$$

$$10) \quad a^2 - 12 \cdot y^4 \cdot \xi(y) = 0$$

$$11) \quad -\frac{\alpha^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot (6\alpha \cdot \xi(y) + 2 \cdot \chi(y)) = 0$$

$$12) \quad -\frac{a^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot (6a \cdot \xi(y) + 2 \cdot \chi(y)) = 0$$

Von diesen Gleichungen widerspricht die 9te der 10ten, und die 11te der 12ten, also kann dieser zweite Fall nicht weiter berücksichtigt werden.

Dritter Fall. Es sei im Endpunkte der Abscisse a eine senkrechte Ebene errichtet, und in dieser Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$13) \quad x = a, \quad \text{und} \quad 14) \quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse α und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen, und dass die von diesen einander parallelen Spuren und von der Axe X gebildeten Winkel durch eine goniometrische Tangente $= \frac{y}{m}$ bestimmt sind. Es ist also jetzt $\delta z_{a, y} = 0$, $\delta^2 z_{a, y} = 0$, etc., und $\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha, y} = 0$, $\left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha, y} = 0$, etc.; und die Gränzengleichung reducirt sich auf

$$15) \int_b^\beta \left[(\alpha^2 - 12 \cdot y^4 \cdot \xi(y)) \cdot \delta z_{\alpha, y} - \left(-\frac{a^3}{3} + 2y^4.(6a.\xi(y) + 2.\chi(y))\right) \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a, y}\right] \cdot dy = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich gradezu in folgende zwei:

$$16) \quad \alpha^2 - 12 \cdot y^4 \cdot \xi(y) = 0$$

und

$$17) \quad -\frac{a^3}{3} + 2 \cdot y^4 \cdot (6a \cdot \xi(y) + 2 \cdot \chi(y)) = 0$$

Ausser diesen beiden Gleichungen hat man noch folgende zwei

$$18) \quad a^3 \cdot \xi(y) + a^2 \cdot \chi(y) + a \cdot F(y) + f(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$19) \quad 3 \cdot \alpha^2 \cdot \xi(y) + 2\alpha \cdot \chi(y) + F(y) = \frac{y}{m}$$

Aus den vier Gleichungen 16, 17, 18, 19 lassen sich aber die vier Functionen $\xi(y)$, $\chi(y)$, $F(y)$, $f(y)$ bestimmen.

Vierter Fall. Die gesuchte Fläche soll nur aus der Zahl derjenigen überall einander nächstanliegenden herausgewählt werden, bei welchen für jeden Werth des y und für $x = a$ folgende Gleichung

Digitized by Google

$$20)\quad z_{a,y} = \frac{y^2}{m}\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}$$

und bei welchen auch noch für jeden Werth des y und bei $x = \alpha$ folgende Gleichung

$$21)\quad z_{\alpha,y} = \frac{y^2}{m}\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}$$

stattfindet.

Mutirt man, so folgt aus diesen Gleichungen

$$22)\quad \delta z_{a,y} = \frac{y^2}{m}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y}$$

und

$$23)\quad \delta z_{\alpha,y} = \frac{y^2}{m}\cdot\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}$$

Wenn man nun $\delta z_{a,y}$ und $\delta z_{\alpha,y}$ als die dem Werthe nach abhängigen Elemente behandelt, und eliminirt; so geht die Gränzengleichung in folgende über

$$\int_b^\beta \frac{1}{m}\cdot\Bigg[\left(\frac{\alpha^2}{3}(3y^2-\alpha m)+12\cdot y^4\cdot(\alpha m-y^2)\cdot\xi(y)+4m\cdot y^4\cdot\chi(y)\right)\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}$$
$$-\left(\frac{a^2}{3}\cdot(3y^2-am)+12\cdot y^4\cdot(am-y^2)\cdot\xi(y)+4m\cdot y^4\cdot\chi(y)\right)\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}\Bigg]\cdot dy = 0$$

Da aber die beiden Ausdrücke $\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}$ und $\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}$ dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander sind; so zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$24)\quad \frac{\alpha^2}{3}\cdot(3y^2-\alpha m)+12\cdot y^4\cdot(\alpha m-y^2)\cdot\xi(y)+4m\cdot y^4\cdot\chi(y) = 0$$

und

$$25)\quad \frac{a^2}{3}\cdot(3y^2-am)+12\cdot y^4\cdot(am-y^2)\cdot\xi(y)+4m\cdot y^4\cdot\chi(y) = 0$$

Die Gleichungen 20 und 21 gehen nun, wenn man für $z_{a,y}$, $z_{\alpha,y}$, $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}$, $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}$ die Ausdrücke ersetzt, in folgende zwei über

$$26)\quad a^2\cdot(ma-3y^2)\cdot\xi(y)+a\cdot(ma-2y^2)\cdot\chi(y)$$
$$+(ma-y^2)\cdot F(y)+m\cdot f(y) = 0$$

und

$$27)\quad \alpha^2\cdot(m\alpha-3\cdot y^2)\cdot\xi(y)+\alpha\cdot(m\alpha-2y^2)\cdot\chi(y)$$
$$+(m\alpha-y^2)\cdot F(y)+m\cdot f(y) = 0$$

Aus den vier Gleichungen 24, 25, 26, 27 lassen sich aber die vier Functionen $\xi(y)$, $\chi(y)$, $F(y)$, $f(y)$ bestimmen.

Fünfter Fall. Die gesuchte Fläche soll nur aus der Zahl derjenigen überall einander nächstanliegenden herausgewählt werden, bei welchen noch die Gleichungen

$$28)\quad z_{a,y}\cdot z_{\alpha,y} = y^2\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}$$

$$29)\quad z_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = z_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}$$

stattfinden. Diese Gleichungen gelten wieder bei jedem Werthe des y, aber nicht bei jedem Werthe des x, sondern nur bei $x = a$ und bei $x = \alpha$. Der fünfte Fall soll aber nicht weiter durchgeführt werden.

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden.

Digitized by Google

Aufgabe 267.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze zur Abkürzung s anstatt $\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = -2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta s \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = -2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[s \cdot \frac{d_x d_y \delta^2 z}{dx \cdot dy} + \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Man forme den in I aufgestellten Ausdruck um, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = -2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 \cdot dy^2} \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ 2 \cdot \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_x d_y^2 z}{dx \cdot dy^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} - \left(\frac{d_x d_y^2 z}{dx \cdot dy^2}\right)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y}\right] \cdot dy$$

$$+ 2 \cdot \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 \cdot dy}\right)_{x, \beta} \cdot \delta z_{x, \beta} - \left(\frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 \cdot dy}\right)_{x, b} \cdot \delta z_{x, b}\right] \cdot dx$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}\right)_{\alpha, \beta} \cdot \delta z_{\alpha, \beta} + 2 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}\right)_{\alpha, b} \cdot \delta z_{\alpha, b} + 2 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}\right)_{a, \beta} \cdot \delta z_{a, \beta}$$

$$- \left(\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}\right)_{a, b} \cdot \delta z_{a, b}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hieran erkennt man; dass nur die einzige Gleichung

$$\text{IV)} \quad \frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy} = 0$$

stattfinden kann. Integrirt man, so bekommt man

$$\text{V)} \quad z = \xi(x) + \chi(y)$$

wo $\xi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x, und $\chi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y vorstellt. Die Gränzen a, α, b, β haben aber, welche sie auch immer sein mögen, auf die hier für z gefundene Function durchaus keinen Einfluss. Dabei reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{VI)} \quad \delta^2 U = -2 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2 \cdot dy \cdot dx$$

woran man erkennt, dass $\delta^2 U$ immer negativ bleibt, und

$$\text{VII)} \quad U = \frac{1}{m^2} \cdot (\alpha - a) \cdot (\beta - b)$$

ein Maximum-stand ist. Aber eben weil die gesuchte Function $z = \xi(x) + \chi(y)$ von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig ist, so liefert sie auch noch zwischen jeden andern beliebigen Gränzen, $x = a'$ und $y = b'$ bis $x = \alpha'$ und $y = \beta'$, wenn nur $\alpha' > a'$ und $\beta' > b'$ ist, einen Maximum-stand; denn auch dabei ist $\delta^2 U$ immer negativ.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis

β erstreckte Integral zu einem Maximum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 \cdot dy^2} = 0$$

Integrirt man sie, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad z = y \cdot \xi(x) + x \cdot \chi(y) + f(x) + F(y)$$

Hier stellt jeder der beiden Ausdrücke $\xi(x)$ und $f(x)$ eine für sich beliebige Function von x dar, und ebenso stellt jeder der beiden Ausdrücke $\chi(y)$ und $F(y)$ eine für sich beliebige Function von y dar. Als Gränzengleichung hat man jetzt

$$\text{X)}\quad 2 \cdot \int_b^\beta \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} \cdot (\delta z_{\alpha,y} - \delta z_{a,y}) \cdot dy + 2 \cdot \int_a^\alpha \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} \cdot (\delta z_{x,\beta} - \delta z_{x,b}) \cdot dx$$
$$- 2 \cdot \left(\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right) \cdot \delta z_{\alpha,\beta} + 2 \cdot \left(\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right) \cdot \delta z_{\alpha,b}$$
$$+ 2 \cdot \left(\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right) \cdot \delta z_{a,\beta} - 2 \cdot \left(\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right) \cdot \delta z_{a,b} = 0$$

Erster Fall. Es sind in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechte Ebenen errichtet. In der ersten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen:

$$1)\ x = a, \quad \text{und} \quad 2)\ z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

In der zweiten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$3)\ x = \alpha, \quad \text{und} \quad 4)\ z = C + E \cdot y$$

In der dritten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$5)\ y = b, \quad \text{und} \quad 6)\ z = H \cdot x^2$$

In der vierten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$7)\ y = \beta, \quad \text{und} \quad 8)\ z = G \cdot x$$

Alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen sollen durch diese Curven begränzt werden. Desshalb muss (man sehe den ersten Fall der 253sten Aufg.) bei jedem Werthe des y stattfinden

$$☉\quad \delta z_{a,y} = 0,\ \delta z_{\alpha,y} = 0,\ \delta^2 z_{a,y} = 0,\ \delta^2 z_{\alpha,y} = 0,\ \text{etc.}$$

Ganz auf die nemliche Weise wird dargethan, dass auch bei jedem Werthe des x gelten muss

$$☾\quad \delta z_{x,b} = 0,\ \delta z_{x,\beta} = 0,\ \delta^2 z_{x,b} = 0,\ \delta^2 z_{x,\beta} = 0,\ \text{etc.}$$

Weil die Gleichungen ☉ bei jedem beliebigen Werthe des y gelten, so gelten sie auch bei den speciellen Werthen $y = b$ und $y = \beta$, d. h. es ist auch

$$♀\ \begin{cases} \delta z_{a,b} = 0,\ \delta z_{\alpha,b} = 0,\ \delta z_{a,\beta} = 0,\ \delta z_{\alpha,\beta} = 0 \\ \delta^2 z_{a,b} = 0,\ \delta^2 z_{\alpha,b} = 0,\ \delta^2 z_{a,\beta} = 0,\ \delta^2 z_{\alpha,\beta} = 0 \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Weil ferner die Gleichungen ☾ bei jedem beliebigen Werthe des x gelten, so gelten sie auch bei den speciellen Werthen $x = a$ und $x = \alpha$; und somit bekommt man abermals das System der Gleichungen ♀.

Die ganze Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg, und die willkürlichen Functionen bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

$$9)\ y \cdot \xi(a) + a \cdot \chi(y) + f(a) + F(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$
$$10)\ y \cdot \xi(\alpha) + \alpha \cdot \chi(y) + f(\alpha) + F(y) = C + E \cdot y$$
$$11)\ b \cdot \xi(x) + x \cdot \chi(b) + f(x) + F(b) = H \cdot x^2$$
$$12)\ \beta \cdot \xi(x) + x \cdot \chi(\beta) + f(x) + F(\beta) = G \cdot x$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt

Digitized by Google

$$13)\quad \chi(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot [(C - f(\alpha) + f(a)) + (E - A - \xi(\alpha) + \xi(a)) \cdot y - B \cdot y^2]$$

$$14)\quad F(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot [(a \cdot f(\alpha) - \alpha \cdot f(a) - a \cdot C) + (A\alpha - E \cdot a. - \alpha \cdot \xi(a) + a \cdot \xi(\alpha)) \cdot y + B \cdot \alpha \cdot y^2]$$

$$15)\quad \xi(x) = \frac{1}{\beta - b} \cdot [(- F(\beta) + F(b)) + (G - \chi(\beta) + \chi(b)) \cdot x - H \cdot x^2]$$

$$16)\quad f(x) = \frac{1}{\beta - b} \cdot [(b \cdot F(\beta) - \beta \cdot F(b)) + (- Gb + b \cdot \chi(\beta) - \beta \cdot \chi(b)) \cdot x + H \cdot \beta \cdot x^2]$$

Setzt man b statt y in Gleichung 9 und 10 ein, so bekommt man bezüglich

$$17)\quad b \cdot \xi(a) + a \cdot \chi(b) + f(a) + F(b) = A \cdot b + B \cdot b^2$$

und

$$18)\quad b \cdot \xi(\alpha) + \alpha \cdot \chi(b) + f(\alpha) + F(b) = C + E \cdot b$$

Setzt man β statt y in Gleichung 9 und 10 ein, so bekommt man bezüglich

$$19)\quad \beta \cdot \xi(a) + a \cdot \chi(\beta) + f(a) + F(\beta) = A \cdot \beta + B \cdot \beta^2$$

und

$$20)\quad \beta \cdot \xi(\alpha) + \alpha \cdot \chi(\beta) + f(\alpha) + F(\beta) = C + E \cdot \beta$$

Setzt man a statt x in Gleichung 11 und 12 ein, so bekommt man bezüglich

$$21)\quad b \cdot \xi(a) + a \cdot \chi(b) + f(a) + F(b) = H \cdot a^2$$

und

$$22)\quad \beta \cdot \xi(a) + a \cdot \chi(\beta) + f(a) + F(\beta) = G \cdot a$$

Setzt man α statt x in Gleichung 11 und 12 ein, so bekommt man bezüglich

$$23)\quad b \cdot \xi(\alpha) + \alpha \cdot \chi(b) + f(\alpha) + F(b) = H \cdot \alpha^2$$

und

$$24)\quad \beta \cdot \xi(\alpha) + \alpha \cdot \chi(\beta) + f(\alpha) + F(\beta) = G \cdot \alpha$$

Die acht letzteren Gleichungen können aber nur dann bestehen, wenn

$$25)\quad A \cdot b + B \cdot b^2 = H \cdot a^2$$

wie aus 17 und 21 folgt; und wenn

$$26)\quad C + E \cdot b = H \cdot \alpha^2$$

wie aus 18 und 23 folgt; und wenn

$$27)\quad A \cdot \beta + B \cdot \beta^2 = G \cdot a$$

wie aus 19 und 22 folgt; und wenn

$$28)\quad C + E \cdot \beta = G \cdot \alpha$$

wie aus 20 und 24 folgt. Sollten daher namentlich die Coefficienten A, B, C, E, G, H noch willkürlich sein; so ist es jederzeit möglich, sie in solche Abhängigkeit untereinander zu bringen, dass die Gleichungen 25, 26, 27, 28 erfüllt werden.

Dass aber diese vier Gleichungen erfüllt werden, ist ein Ergebniss, welches ganz der Natur des hier vorgelegten besonderen Falles entspricht; denn die vier in den Endpunkten der Abscissen a, α, b, β senkrechten Ebenen schneiden sich in vier graden Linien, und in jeder dieser vier Graden liegt ein Punkt, welcher zweien der vorgeschriebenen Gränzcurven gemeinschaftlich sein muss, weil man sonst durch sie keine Fläche begränzen könnte. Man hat also hier abermals ein Beispiel, wie die Erscheinungen des Calculs jedesmal mit den Eigenthümlichkeiten des ihm unterworfenen Gegenstandes übereinstimmen. (Man vergleiche den ersten Fall in Aufg. 255.)

Die acht Gleichungen (17 bis 24) reduciren sich also auf vier, und können dazu benützt werden, um von den acht Stücken $\xi(a)$, $\xi(\alpha)$, $\chi(b)$, $\chi(\beta)$, $f(a)$, $f(\alpha)$, $F(b)$, $F(\beta)$ vier so zu bestimmen, dass sie zu Functionen der übrigen vier werden; und die vier noch nicht bestimmten Stücke machen es möglich, dass man die gesuchte Fläche noch vier weiteren (und zwar von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängigen) Bedingungen unterwerfen kann. Eine Zusammenstellung von vier derartigen Bedingungen ist z. B folgende:

Digitized by Google

Die gesuchte Fläche soll durch vier feste Punkte (n', m', k'), (n'', m'', k''), (n''', m''', k'''), (n'''', m'''', k'''') gehen.

Man erkennt aber gradezu, dass ein Maximum-stand stattfindet; und es ist nicht nöthig, den für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruck herzustellen.

Zweiter Fall. Soll die gesuchte Fläche aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden, d. h. sollen keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sein; so kann die Gränzengleichung nur erfüllt werden, wenn folgende zwei identische Gleichungen

$$29)\quad \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0, \quad \text{und} \quad 30)\quad \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0$$

und wenn ausserdem noch folgende vier nichtidentische Gleichungen

$$31)\quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$32)\quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

$$33)\quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$34)\quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

stattfinden. Wenn man Gleichung 29 integrirt, so bekommt man

$$35)\quad \xi(x) = \mathfrak{A} \cdot x + \mathfrak{B}$$

Wenn man Gleichung 30 integrirt, so bekommt man

$$36)\quad \chi(y) = \mathfrak{C} \cdot y + \mathfrak{G}$$

Die vier Gleichungen 31, 32, 33, 34 gehen also jetzt über in

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 0$$

woraus $\mathfrak{A} = -\mathfrak{C}$ folgt; und Gleichung IX geht über in

$$37)\quad z = y \cdot (-\mathfrak{C}x + \mathfrak{B}) + x \cdot (\mathfrak{C} \cdot y + \mathfrak{G}) + f(x) + F(y)$$

d. h. es ist

$$38)\quad z = \mathfrak{G} \cdot x + \mathfrak{B} \cdot y + f(x) + F(y)$$

Zur Bestimmung der willkürlichen Functionen $f(x)$ und $F(y)$ können also noch zwei (und zwar von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängige) Nebenbedingungen gemacht werden. Dasselbe gilt für die Bestimmung der beiden willkürlichen Constanten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$.

Dritter Fall. Es seien in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechte Ebenen errichtet. In der ersten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$39)\quad x = a, \quad \text{und} \quad 40)\quad z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

In der zweiten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$41)\quad x = \alpha, \quad \text{und} \quad 42)\quad z = C + Ey$$

Die gesuchte Fläche soll durch diese beiden Curven gelegt werden, und weiter soll es keine Gränzbedingung geben.

Hier ist

$$\delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0, \text{ etc.}$$

Weil aber diese Gleichungen bei jedem Werthe des y stattfinden, so müssen sie auch bei den zwei speciellen Werthen $y = b$ und $y = \beta$ gelten, d. h. es muss auch sein

$$\delta z_{a,b} = 0, \quad \delta z_{a,\beta} = 0, \quad \delta z_{\alpha,b} = 0, \quad \delta z_{\alpha,\beta} = 0$$

$$\delta^2 z_{a,b} = 0, \quad \delta^2 z_{a,\beta} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,b} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,\beta} = 0$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung X reducirt sich also auf

Digitized by Google

$$2 \cdot \int_a^\alpha \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} \cdot (\delta z_{x,\beta} - \delta z_{x,b}) \cdot dx = 0$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn identisch stattfindet

$$43) \quad \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0$$

Integrirt man, so gibt sich

$$44) \quad \xi(x) = \mathfrak{A} \cdot x + \mathfrak{B}$$

Gleichung IX geht also jetzt über in

$$45) \quad z = \mathfrak{A} \cdot x \cdot y + \mathfrak{B} \cdot y + x \cdot \chi(y) + f(x) + F(y)$$

Und weil die Fläche durch die beiden Gränzcurven gehen soll, so ist auch noch

$$46) \quad \mathfrak{A} \cdot a \cdot y + \mathfrak{B}y + a \cdot \chi(y) + f(a) + F(y) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$47) \quad \mathfrak{A} \cdot \alpha \cdot y + \mathfrak{B}y + \alpha \cdot \chi(y) + f(\alpha) + F(y) = C + E \cdot y$$

Daraus folgt

$$48) \quad \chi(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot [(C - f(\alpha) + f(a)) + (E - A - \mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{A}a) \cdot y - B \cdot y^2]$$

und

$$49) \quad F(y) = \frac{1}{\alpha - a} \cdot [(a \cdot f(\alpha) - \alpha \cdot f(a) - aC) + (A\alpha - E \cdot a - \alpha \cdot \mathfrak{B} + a \cdot \mathfrak{B}) \cdot y + B \cdot \alpha \cdot y^2]$$

Setzt man b statt y in 46 und 47 ein, so bekommt man bezüglich

$$50) \quad \mathfrak{A} \cdot ab + \mathfrak{B} \cdot b + a \cdot \chi(b) + f(a) + F(b) = A \cdot b + B \cdot b^2$$

und

$$51) \quad \mathfrak{A} \cdot \alpha b + \mathfrak{B} \cdot b + \alpha \cdot \chi(b) + f(\alpha) + F(b) = C + E \cdot b$$

Setzt man β statt y in 46 und 47 ein, so bekommt man

$$52) \quad \mathfrak{A}a\beta + \mathfrak{B} \cdot \beta + a \cdot \chi(\beta) + f(a) + F(\beta) = A \cdot \beta + B \cdot \beta^2$$

und

$$53) \quad \mathfrak{A}\alpha\beta + \mathfrak{B} \cdot \beta + \alpha \cdot \chi(\beta) + f(\alpha) + F(\beta) = C + E \cdot \beta$$

Die vier letzten Gleichungen dienen dazu, um von den acht Stücken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\chi(b)$, $\chi(\beta)$, $f(a)$, $f(\alpha)$, $F(b)$, $F(\beta)$ vier so zu bestimmen, dass sie zu Functionen der übrigen vier werden; und die vier noch nicht bestimmten Stücke machen es möglich, dass man die gesuchte Fläche noch vier weiteren (und zwar von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängigen) Bedingungen unterwerfen kann. Vier dergleichen Bedingungen sind z. B. am Schlusse des ersten Falles aufgestellt.

Vierter Fall. Man soll die gesuchte Fläche nur aus jenen unendlichvielen einander überall nächstanliegenden herauswählen, welchen allen die vier Punkte $(a, b, z_{a,b})$, $(a, \beta, z_{a,\beta})$, $(\alpha, b, z_{\alpha,b})$, $(\alpha, \beta, z_{\alpha,\beta})$ gemeinschaftlich sind; und ausser diesen vier Punkten sollen die hier zu betrachtenden Flächen nichts weiter miteinander gemeinschaftlich haben.

Wenn $z_{x,y}$ die zu beliebigen Abscissen x und y gehörige Ordinate der gesuchten Fläche vorstellt, so müssen zwischen der gesuchten und allen in Betracht zu ziehenden Flächen folgende vier Gleichungen stattfinden:

$$z_{a,b} = z_{a,b} + \varkappa \cdot \delta z_{a,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{a,b} + \ldots\ldots\ldots$$

$$z_{a,\beta} = z_{a,\beta} + \varkappa \cdot \delta z_{a,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{a,\beta} + \ldots\ldots\ldots$$

$$z_{\alpha,b} = z_{\alpha,b} + \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,b} + \ldots\ldots\ldots$$

$$z_{\alpha,\beta} = z_{\alpha,\beta} + \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Weil aber diese Gleichungen bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen x gelten, so müssen folgende einzelne nichtidentische Gleichungen

$$\delta z_{a,b} = 0,\quad \delta z_{a,\beta} = 0,\quad \delta z_{\alpha,b} = 0,\quad \delta z_{\alpha,\beta} = 0$$

$$\delta^2 z_{a,b} = 0,\quad \delta^2 z_{a,\beta} = 0,\quad \delta^2 z_{\alpha,b} = 0,\quad \delta^2 z_{\alpha,\beta} = 0$$

etc. etc.

stattfinden; und die Gränzengleichung X reducirt sich auf

$$2 \cdot \int_b^\beta \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} \cdot (\delta z_{\alpha,y} - \delta z_{a,y}) \cdot dy + 2 \cdot \int_a^\alpha \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} \cdot (\delta z_{x,\beta} - \delta z_{x,b}) \cdot dx = 0$$

Weil aber die Ausdrücke $\delta z_{\alpha,y}$ und $\delta z_{a,y}$, wo das y noch ganz willkürlich ist, und weil ebenso die Ausdrücke $\delta z_{x,\beta}$ und $\delta z_{x,b}$, wo das x noch ganz willkürlich ist, nicht zu Null werden; so wird letztere Gleichung nur erfüllt, wenn folgende zwei identische Gleichungen

$$\frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0$$

stattfinden. Integrirt man sie, so bekommt man wieder

$$\xi(x) = \mathfrak{A} \cdot x + \mathfrak{B}, \quad \text{und} \quad \chi(y) = \mathfrak{C} \cdot y + \mathfrak{G}$$

Gleichung IX geht also jetzt über in

$$54)\quad z = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot xy + \mathfrak{B} \cdot y + \mathfrak{G} \cdot x + f(x) + F(y)$$

Wenn nun $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bezüglich die vorgeschriebenen Werthe von $z_{a,b}$, $z_{\alpha,b}$, $z_{a,\beta}$, $z_{\alpha,\beta}$ sind; so hat man noch die vier Gleichungen

$$55)\quad \mathfrak{M} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot ab + \mathfrak{B} \cdot b + \mathfrak{G} \cdot a + f(a) + F(b)$$

$$56)\quad \mathfrak{N} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot \alpha b + \mathfrak{B} \cdot b + \mathfrak{G} \cdot \alpha + f(\alpha) + F(b)$$

$$57)\quad \mathfrak{P} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot a\beta + \mathfrak{B} \cdot \beta + \mathfrak{G} \cdot a + f(a) + F(\beta)$$

$$58)\quad \mathfrak{Q} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot \alpha\beta + \mathfrak{B} \cdot \beta + \mathfrak{G} \cdot \alpha + f(\alpha) + F(\beta)$$

Und so fort.

Fünfter Fall. Man soll die gesuchte Fläche aus allen jenen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herauswählen, bei welchen folgende Gleichungen stattfinden:

$$59)\quad z_{\alpha,y} - z_{a,y} = A \cdot y + B \cdot y^2$$

und

$$60)\quad z_{x,\beta} - z_{x,b} = C + E \cdot x$$

Man ordne die Gränzengleichung X auf folgende Weise:

$$61)\quad 2 \cdot \int_b^\beta \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} \cdot (\delta z_{\alpha,y} - \delta z_{a,y}) \cdot dy + 2 \cdot \int_a^\alpha \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} \cdot (\delta z_{x,\beta} - \delta z_{x,b}) \cdot dx$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha \cdot (\delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{\alpha,b}) + 2 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a \cdot (\delta z_{a,\beta} - \delta z_{a,b})$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta \cdot (\delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{a,\beta}) + 2 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b \cdot (\delta z_{\alpha,b} - \delta z_{a,b}) = 0$$

Mutirt man nun Gleichung 59, so gibt sich

$$62)\quad \delta z_{\alpha,y} - \delta z_{a,y} = 0$$

und

$$63)\quad \delta^2 z_{\alpha,y} - \delta^2 z_{a,y} = 0$$

etc. etc.

Mutirt man Gleichung 60, so gibt sich

$$64)\quad \delta z_{x,\beta} - \delta z_{x,b} = 0$$

und

$$65)\quad \delta^2 z_{x,\beta} - \delta^2 z_{x,b} = 0$$

etc. etc.

Digitized by Google

Die Gleichungen 62 und 63 gelten bei jedem Werthe des y, sind also nach y identisch; ebenso gelten die Gleichungen 64 und 65 bei jedem Werthe des x, sind also nach x identisch. Bei den speciellen Werthen $y = b$ und $y = \beta$ geht die Gleichung 62 über in

$$66)\quad \delta z_{\alpha,b} - \delta z_{a,b} = 0, \qquad 67)\quad \delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{a,\beta} = 0$$

und bei den speciellen Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ geht Gleichung 64 über in

$$68)\quad \delta z_{a,\beta} - \delta z_{a,b} = 0, \qquad 69)\quad \delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{\alpha,b} = 0$$

Die sechs Gleichungen 62, 64, 66, 67, 68, 69 machen, dass die Gränzengleichung von selbst wegfällt. Die Gleichungen 59 und 60 gehen bezüglich über in

$$70)\quad y \cdot (\xi(\alpha) - \xi(a)) + (\alpha - a) \cdot \chi(y) + f(\alpha) - f(a) = A \cdot y + B \cdot y^2$$

$$71)\quad (\beta - b) \cdot \xi(x) + x \cdot (\chi(\beta) - \chi(b)) + F(\beta) - F(b) = C + E \cdot x$$

Daraus lassen sich $\chi(y)$ und $\xi(x)$ bestimmen, während $f(x)$ und $F(y)$ ganz willkürliche Functionen bleiben. Und so fort.

Andere specielle Fälle lassen sich nach Belieben bilden.

Aufgabe 268.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[z - x \cdot y \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} \mp m^4 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze zur Abkürzung s anstatt $\frac{d_x d_y z}{dx . dy}$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\delta z + (-x \cdot y + 2 \cdot m^4 \cdot s) \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right] \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)}\quad \delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\delta^2 z + (-xy + 2 \cdot m^4 \cdot s) \cdot \frac{d_x d_y \delta^2 z}{dx \cdot dy} + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

Man forme den in I aufgestellten Ausdruck um, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = 2 \cdot m^4 \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2} \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \left[\left(x - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - \left(x - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(y - 2m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - \left(y - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx$$

$$+ \left(-xy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{\alpha,\beta} \cdot \delta z_{\alpha,\beta} - \left(-xy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{\alpha,b} \cdot \delta z_{\alpha,b}$$

$$- \left(-xy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{a,\beta} \cdot \delta z_{a,\beta} + \left(-xy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{a,b} \cdot \delta z_{a,b}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Da der zu δz gehörige Factor $= 1$ ist, also nicht zu Null werden, und nicht die Form $\frac{M}{0}$ annehmen kann; so erkennt man, dass die erste Form des δU nicht beachtet zu werden

Digitized by Google

braucht. Es gibt also keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden könnte

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung:

$$\text{IV)}\quad \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2} = 0 \ .$$

Integrirt man, so bekommt man, wie in der vorigen Aufgabe,

$$\text{V)}\quad z = y \cdot \xi(x) + x \cdot \chi(y) + f(x) + F(y)$$

Hier stellt jeder der beiden Ausdrücke $f(x)$ und $\xi(x)$ eine für sich beliebige Function von x, und ebenso stellt jeder der beiden Ausdrücke $\chi(y)$ und $F(y)$ ein für sich beliebige Function von y vor.

Die Gränzengleichung geht jetzt über in

$$\begin{aligned}\text{VI)}\quad &\int_b^\beta \left[\left(\alpha - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2}\right) \cdot \delta z_{\alpha,y} - \left(a - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2}\right) \cdot \delta z_{a,y}\right] \cdot dy \\ &+ \int_a^\alpha \left[\left(\beta - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2}\right) \cdot \delta z_{x,\beta} - \left(b - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2}\right) \cdot \delta z_{x,b}\right] \cdot dx \\ &+ \left[- \alpha \cdot \beta + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right] \cdot \delta z_{\alpha,\beta} \\ &- \left[- \alpha \cdot b + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right] \cdot \delta z_{\alpha,b} \\ &- \left[- a \cdot \beta + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right] \cdot \delta z_{a,\beta} \\ &+ \left[- a \cdot b + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + 2m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right] \cdot \delta z_{a,b} = 0\end{aligned}$$

Specieller Fall. Wenn keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sind, so zerfällt Gleichung VI in zweierlei Gleichungen.

Erstens. In folgende zwei nach y identische:

$$\text{VII)}\quad \alpha - 2m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{VIII)}\quad a - 2m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0$$

und in folgende zwei nach x identische:

$$\text{IX)}\quad \beta - 2m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{X)}\quad b - 2m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0$$

Zweitens. In folgende vier nichtidentische Gleichungen:

$$\text{XI)}\quad - \alpha \cdot \beta + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$\text{XII)}\quad - \alpha \cdot b + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

$$\text{XIII)}\quad - a \cdot \beta + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$\text{XIV)}\quad - a \cdot b + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + 2 \cdot m^4 \cdot \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

Aus VII und VIII würde folgen $a = \alpha$; und man erkennt, dass diese Gleichungen einander widersprechen.

Aus IX und X würde folgen $b = \beta$; und man erkennt, dass auch diese beiden Gleichungen einander widersprechen.

Somit kann dieser specielle Fall, wo keine Gränzbedingungen gestellt sind, nicht stattfinden.

Digitized by Google

Aufgabe 269.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, für welche der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[2 \cdot z^2 + 2 \cdot (x + y) \cdot z + 2 \cdot (yq + xp) \cdot z$$
$$+ (x^2 + y^2) \cdot (p + q) - 8 \cdot mxy \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + m^4 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)^2 \Big] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze zur Abkürzung p, q, s bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[(4z + 2x + 2y + 2yq + 2xp) \cdot \delta z$$
$$+ (2xz + x^2 + y^2) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (2yz + x^2 + y^2) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$
$$+ (-8 \cdot mxy + 2m^4 \cdot s) \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} \Big] \cdot dy \cdot dx$$

und

$$\text{II)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[(4z + 2x + 2y + 2yq + 2xp) \cdot \delta^2 z$$
$$+ (2xz + x^2 + y^2) \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + (2yz + x^2 + y^2) \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}$$
$$+ (-8 \cdot mxy + 2 \cdot m^4 \cdot s) \cdot \frac{d_x d_y \delta^2 z}{dx \cdot dy} + 4 \cdot \delta z^2$$
$$+ 4x \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + 4y \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2m^4 \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy}\right)^2 \Big] \cdot dy \cdot dx$$

Man forme den in I aufgestellten Ausdruck um, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(-8m + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_b^\beta \Big[\left(2xz + x^2 + y^2 + 8mx - 2m^4 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y}$$
$$- \left(2xz + x^2 + y^2 + 8mx - 2m^4 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y} \Big] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[\left(2yz + x^2 + y^2 + 8my - 2m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy}\right)_{x, \beta} \cdot \delta z_{x, \beta}$$
$$- \left(2yz + x^2 + y^2 + 8my - 2m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy}\right)_{x, b} \cdot \delta z_{x, b} \Big] \cdot dx$$
$$+ \left(-8mxy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{\alpha, \beta} \cdot \delta z_{\alpha, \beta} - \left(-8mxy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{\alpha, b} \cdot \delta z_{\alpha, b}$$
$$- \left(-8mxy + 2m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{a, \beta} \cdot \delta z_{a, \beta} + \left(-8mxy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{a, b} \cdot \delta z_{a, b}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Man erkennt, dass weder der zu δz, noch der zu $\frac{d_x \delta z}{dx}$, noch der zu $\frac{d_y \delta z}{dy}$, noch der zu $\frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy}$

Digitized by Google

gehörige Factor die Form $\frac{M}{0}$ annehmen kann. Wenn es also für z eine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function von x und y gibt, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden kann; so ist es nur eine solche Function, durch welche folgende vier Gleichungen

$$\text{IV)}\quad 4z + 2x + 2y + 2yq + 2xp = 0$$

$$\text{V)}\quad 2xz + x^2 + y^2 = 0$$

$$\text{VI)}\quad 2yz + x^2 + y^2 = 0$$

$$\text{VII)}\quad -8mxy + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} = 0$$

zugleich identisch werden. Allein man sieht gradezu, dass die Gleichungen V und VI sich widersprechen. Es gibt also keine von den Gränzen a, α, b, β unabhängige Function, bei welcher U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function z von x und y gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad -8m + 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2} = 0$$

welche mit folgender

$$\text{IX)}\quad \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2} = \frac{4}{m^3}$$

ganz gleichbedeutend ist. Integrirt man, so bekommt man

$$\text{X)}\quad z = \frac{x^2 \cdot y^2}{m^3} + y \cdot \xi(x) + x \cdot \chi(y) + F(x) + f(y)$$

wo jeder der beiden Ausdrücke $\xi(x)$ und $F(x)$ eine für sich beliebige Function von x, und wo ebenso jeder der beiden Ausdrücke $\chi(y)$ und $f(y)$ eine für sich beliebige Function von y vorstellt.

Formt man den (in II) für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck um, so bekommt man, wenn man die Hauptgleichung beachtet,

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_b^\beta 2m^4 \cdot \left(\frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy}\right)^2 \cdot dy \cdot dx + \ldots\ldots\ldots$$

woran man schon erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet; und man braucht nicht die weitläufigen Umformungen, welche hier nöthig sind, wirklich auszuführen. Für die Gränzengleichung bekommt man zunächst

$$\int_b^\beta \Big[\Big(2 \cdot \frac{\alpha^3}{m^3} \cdot y^2 + \alpha^2 + y^2 + 2\alpha y \cdot \xi(\alpha) + 2\alpha^2 \cdot \chi(y) + 2\alpha \cdot F(\alpha)$$
$$+ 2\alpha \cdot f(y) - 2m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2}\Big) \cdot \delta z_{\alpha,y} - \Big(2 \cdot \frac{a^3}{m^3} \cdot y^2 + a^2 + y^2$$
$$+ 2ay \cdot \xi(a) + 2a^2 \cdot \chi(y) + 2a \cdot F(a) + 2a \cdot f(y) - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2}\Big) \cdot \delta z_{a,y}\Big] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[\Big(2 \cdot \frac{\beta^3}{m^3} \cdot x^2 + x^2 + \beta^2 + 2\beta^2 \cdot \xi(x) + 2\beta x \cdot \chi(\beta) + 2\beta \cdot F(x)$$
$$+ 2\beta \cdot f(\beta) - 2m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2}\Big) \cdot \delta z_{x,\beta} - \Big(2 \cdot \frac{b^3}{m^3} \cdot x^2 + x^2 + b^2$$
$$+ 2 \cdot b^2 \cdot \xi(x) + 2 \cdot bx \cdot \chi(b) + 2b \cdot F(x) + 2b \cdot f(b) - 2m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2}\Big) \cdot \delta z_{x,b}\Big] \cdot dx +$$

Digitized by Google

$$+ 2 \cdot m^4 \cdot \left[\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right] \cdot \delta z_{\alpha,\beta} - 2 \cdot m^4 \cdot \left[\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta\right] \cdot \delta z_{a,\beta}$$

$$- 2 \cdot m^4 \cdot \left[\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right] \cdot \delta z_{\alpha,b} + 2 \cdot m^4 \cdot \left[\left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b\right] \cdot \delta z_{a,b}$$

$$= 0$$

Specieller Fall. Soll die gesuchte Fläche aus allen möglichen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgesucht werden, d. h. sollen keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sein; so zerfällt die Gränzengleichung in zweierlei Gleichungen:

Erstens. In folgende zwei nach y identische:

$$1) \quad 2 \cdot \frac{\alpha^3}{m^3} \cdot y^2 + \alpha^2 + y^2 + 2\alpha y \cdot \xi(\alpha) + 2\alpha^2 \cdot \chi(y) + 2\alpha \cdot F(\alpha) + 2\alpha \cdot f(y) - 2m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0$$

$$2) \quad 2 \cdot \frac{a^3}{m^3} \cdot y^2 + a^2 + y^2 + 2ay \cdot \xi(a) + 2a^2 \cdot \chi(y) + 2a \cdot F(a) + 2a \cdot f(y) - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0$$

und in folgende zwei nach x identische:

$$3) \quad 2 \cdot \frac{\beta^3}{m^3} \cdot x^2 + x^2 + \beta^2 + 2 \cdot \beta^2 \cdot \xi(x) + 2\beta x \cdot \chi(\beta) + 2\beta \cdot F(x) + 2\beta \cdot f(\beta) - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0$$

$$4) \quad 2 \cdot \frac{b^3}{m^3} \cdot x^2 + x^2 + b^2 + 2b^2 \cdot \xi(x) + 2bx \cdot \chi(b) + 2b \cdot F(x) + 2b \cdot f(b) - 2 \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0$$

Zweitens. In folgende vier nichtidentische;

$$5) \quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$6) \quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_\beta = 0$$

$$7) \quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

$$8) \quad \left(\frac{d\xi(x)}{dx}\right)_a + \left(\frac{d\chi(y)}{dy}\right)_b = 0$$

Man vervielfache Gleichung 1 mit a, und Gleichung 2 mit α, und subtrahire; so bekommt man

$$9) \quad 2 \cdot (\alpha - a) \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\chi(y)}{dy^2} + 2a \cdot \alpha \cdot (\alpha - a) \cdot \chi(y) - (\alpha - a) \cdot \left(1 - \frac{2a\alpha \cdot (a + \alpha)}{m^3}\right) \cdot y^2 + 2a\alpha \cdot (\xi(\alpha) - \xi(a)) \cdot y + a \cdot \alpha \cdot (\alpha - a) + 2a \cdot \alpha \cdot (F(\alpha) - F(a)) = 0$$

Man vervielfache ebenso Gleichung 3 mit b, und Gleichung 4 mit β, und subtrahire; so bekommt man

$$10) \quad 2 \cdot (\beta - b) \cdot m^4 \cdot \frac{d^2\xi(x)}{dx^2} + 2b \cdot \beta \cdot (\beta - b) \cdot \xi(x) - (\beta - b) \cdot \left(1 - \frac{2b \cdot \beta\,(b + \beta)}{m^3}\right) \cdot x^2 + 2b \cdot \beta \cdot (\chi(\beta) - \chi(b)) \cdot x + b \cdot \beta \cdot (\beta - b) + 2b \cdot \beta \cdot (f(\beta) - f(b)) = 0$$

Digitized by Google

Man integrire die totale Differentialgleichung 9, so gehen dadurch zwei willkürliche Constanten A und B ein. Aus der sich ergebenden Integralgleichung lässt sich dann $\chi(y)$ entwickeln, so dass man

$$11)\quad \chi(y) = \mathfrak{F}'(y, A, B, \xi(\alpha), \xi(a), F(\alpha), F(a))$$

bekommt. Man integrire auch die totale Differentialgleichung 10, so gehen dadurch zwei willkürliche Constanten C und E ein. Aus der sich ergebenden Integralgleichung lässt sich dann $\xi(x)$ entwickeln, so dass man

$$12)\quad \xi(x) = \mathfrak{F}''(x, C, E, \chi(\beta), \chi(b), f(\beta), f(b))$$

bekommt.

Die für $\chi(y)$ erhaltene Function führe man in die beiden Gleichungen 1 und 2 ein, und aus diesen beiden Gleichungen muss sich dann für $f(y)$ genau eine und dieselbe Function ergeben.

Die für $\xi(x)$ erhaltene Function führe man in die beiden Gleichungen 3 und 4 ein; und aus diesen beiden Gleichungen muss sich dann für $F(x)$ genau eine und dieselbe Function ergeben.

Hierauf muss noch den vier Gleichungen 5, 6, 7, 8 genügt werden.

Und so fort, wie bei den früheren Aufgaben.

Aufgabe 270.

Man sucht unter allen Flächen diejenige, bei welcher der Ausdruck

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[g + \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)^2 \right] \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, und setze zur Abkürzung r, s, t bezüglich statt $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx . dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$; so bekommt man zunächst

$$I)\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2r \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} - 10s \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx . dy} + 8t \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man forme um, so bekommt man

$$II)\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(2 \cdot \frac{d_x^4 z}{dx^4} - 10 \cdot \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2 . dy^2} + 8 \cdot \frac{d_y^4 z}{dy^4}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Bigg[\left(- 2 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3} + 10 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \delta z_{\alpha, y} + 2 \cdot \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha, y}$$

$$- \left(- 2 \cdot \frac{d_x^3 z}{dx^3} + 10 \cdot \frac{d_x d_y^2 z}{dx . dy^2}\right)_{a, y} \cdot \delta z_{a, y} - 2 \cdot \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a, y} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a, y} \Bigg] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Bigg[\left(10 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy} - 8 \cdot \frac{d_y^3 z}{dy^3}\right)_{x, \beta} \cdot \delta z_{x, \beta} + 8 \cdot \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x, \beta} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x, \beta}$$

$$- \left(10 \cdot \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2 . dy} - 8 \cdot \frac{d_y^3 z}{dy^3}\right)_{x, b} \cdot \delta z_{x, b} - 8 \cdot \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x, b} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x, b} \Bigg] \cdot dx$$

$$- 10 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{\alpha, \beta} \cdot \delta z_{\alpha, \beta} + 10 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{\alpha, b} \cdot \delta z_{\alpha, b} + 10 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{a, \beta} \cdot \delta z_{a, \beta}$$

$$- 10 \cdot \left(\frac{d_x d_y z}{dx . dy}\right)_{a, b} \cdot \delta z_{a, b}$$

Digitized by Google

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hier kann nur dann $\delta U = 0$ werden, wenn folgende drei Partialdifferentialgleichungen zugleich stattfinden:

$$\text{III)}\ \frac{d_x^2 z}{dx^2} = 0, \qquad \text{IV)}\ \frac{d_x d_y z}{dx.dy} = 0, \qquad \text{V)}\ \frac{d_y^2 z}{dy^2} = 0$$

Integrirt man Gleichung III, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad z = x \cdot \xi(y) + \chi(y)$$

Daraus folgt $\frac{d_x d_y z}{dx.dy} = \frac{d\xi(y)}{dy}$; und wegen Gleichung IV muss $\frac{d\xi(y)}{dy} = 0$ sein, so dass sich $\xi(y) = A$ ergibt, wo A ein willkürlicher Constanter ist. Gleichung VI geht nun über in

$$\text{VII)}\quad z = A \cdot x + \chi(y)$$

Aus dieser Gleichung folgt $\frac{d_y^2 z}{dy^2} = \frac{d^2\chi(y)}{dy^2}$; und wegen Gleichung V muss $\frac{d^2\chi(y)}{dy^2} = 0$ sein, so dass sich $\chi(y) = B \cdot y + C$ ergibt, wo B und C zwei willkürliche Constanten sind. Gleichung VII (oder vielmehr Gleichung VI) geht nun über in

$$\text{VIII)}\quad z = A \cdot x + B \cdot y + C$$

Diese Function ist aber von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche aber nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht. Man hat hier die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad 2 \cdot \frac{d_x^4 z}{dx^4} - 10 \cdot \frac{d_x^2 d_y^2 z}{dx^2.dy^2} + 8 \cdot \frac{d_y^4 z}{dy^4} = 0$$

Um das allgemeine Integral dieser Gleichung zu finden, bilde man sich aus ihr (nach bekannter Methode) folgende neue Gleichung

$$\text{X)}\quad 2 \cdot w^4 - 10 \cdot w^2 + 8 = 0$$

Daraus folgt im Allgemeinen

$$\text{XI)}\quad w = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{2}}$$

und sonach ist $w' = 2$, $w'' = -2$, $w''' = 1$, $w'''' = -1$, wesshalb das zu Gleichung IX gehörige allgemeine Integral folgendes ist:

$$\text{XII)}\quad z = \xi(y + 2x) + \chi(y - 2x) + f(y + x) + F(y - x)$$

Man bezeichne mit $\xi'(y + 2x)$, $\xi''(y + 2x)$, $\xi'''(y + 2x)$, etc. diejenigen Resultate, welche sich ergeben, wenn man $\xi(y + 2x)$ bezüglich einmal, zweimal, dreimal, etc. nach dem ganzen Ausdrucke $(y + 2x)$ differentiirt.

Man bezeichne ebenso mit $\chi'(y - 2x)$, $\chi''(y - 2x)$, $\chi'''(y - 2x)$, etc. diejenigen Resultate, welche sich ergeben, wenn man $\chi(y - 2x)$ bezüglich einmal, zweimal, dreimal, etc. nach dem ganzen Ausdrucke $(y - 2x)$ differentiirt.

Und so fort.

Dadurch bekommt man als Gränzengleichung

$$\begin{aligned}
\text{XIII)}\ \int_b^\beta \Big[& \Big(4 \cdot \xi'''(y+2\alpha) - 4 \cdot \chi'''(y-2\alpha) + 8 \cdot f'''(y+\alpha) - 8 \cdot F'''(y-\alpha)\Big) \cdot \delta z_{\alpha,y} \\
& + \Big(8 \cdot \xi''(y+2\alpha) + 8 \cdot \chi''(y-2\alpha) + 2 \cdot f''(y+\alpha) + 2 \cdot F''(y-\alpha)\Big) \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} \\
& - \Big(4 \cdot \xi'''(y+2a) - 4 \cdot \chi'''(y-2a) + 8 \cdot f'''(y+a) - 8 \cdot F'''(y-a)\Big) \cdot \delta z_{a,y} \\
& - \Big(8 \cdot \xi''(y+2a) + 8 \cdot \chi''(y-2a) + 2 \cdot f''(y+a) + 2 \cdot F''(y-a)\Big) \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} \Big] \cdot dy
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+\int_a^\alpha \Big[\Big(32\cdot \xi'''(\beta+2x)+32\cdot\chi'''(\beta-2x)+2\cdot f'''(\beta+x)+2\cdot F'''(\beta-x)\Big)\cdot\delta z_{x,\beta}$$

$$+\Big(8\cdot\xi''(\beta+2x)+8\cdot\chi''(\beta-2x)+8\cdot f''(\beta+x)+8\cdot F''(\beta-x)\Big)\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta}$$

$$-\Big(32\cdot\xi'''(b+2x)+32\cdot\chi'''(b-2x)+2\cdot f'''(b+x)+2\cdot F'''(b-x)\Big)\cdot\delta z_{x,b}$$

$$-\Big(8\cdot\xi''(b+2x)+8\cdot\chi''(b-2x)+8\cdot f''(b+x)+8\cdot F''(b-x)\Big)\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b}\Big]\cdot dx$$

$$-10\cdot\Big(2\cdot\xi''(\beta+2\alpha)-2\cdot\chi''(\beta-2\alpha)+f''(\beta+\alpha)-F''(\beta-\alpha)\Big)\cdot\delta z_{\alpha,\beta}$$
$$+10\cdot\Big(2\cdot\xi''(b+2\alpha)-2\cdot\chi''(b-2\alpha)+f''(b+\alpha)-F''(b-\alpha)\Big)\cdot\delta z_{\alpha,b}$$
$$+10\cdot\Big(2\cdot\xi''(\beta+2a)-2\cdot\chi''(\beta-2a)+f''(\beta+a)-F''(\beta-a)\Big)\cdot\delta z_{a,\beta}$$
$$-10\cdot\Big(2\cdot\xi''(b+2a)-2\cdot\chi''(b-2a)+f''(b+a)-F''(b-a)\Big)\cdot\delta z_{a,b}$$

Erster Fall. I) Es ist in dem Endpunkte der Abscisse a eine auf die Axe X senkrechte Ebene errichtet; und in dieser Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$1)\quad x=a,\qquad\text{und}\qquad 2)\quad z=A\cdot y+B\cdot y^2$$

Von dieser Curve soll die gesuchte Fläche begränzt werden; desshalb finden (man sehe Aufgabe 253, erster Fall) bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen statt:

$$\delta z_{a,y}=0,\quad \delta^2 z_{a,y}=0,\ \text{etc.}$$

und man hat jetzt

$$\text{XIV)}\quad \xi(y+2a)+\chi(y-2a)+f(y+a)+F(y-a)=A\cdot y+B\cdot y^2$$

Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen einander in jedem Punkte nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse $x=a$ und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise ineinander hineinfallen. Die von allen diesen Spuren und der Axe X eingeschlossenen Winkel sollen eine goniometrische Tangente $=\frac{y}{m}$ haben. Desshalb müssen (man sehe Aufgabe 266, erster Fall) bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}=0,\quad \left(\frac{d_x\delta^2 z}{dx}\right)_{a,y}=0,\ \text{etc.}$$

und man hat jetzt

$$\text{XV)}\quad 2\cdot\xi'(y+2a)-2\cdot\chi'(y-2a)+f'(y+a)-F'(y-a)=\frac{y}{m}$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit folgender

$$2\cdot\frac{d\xi(y+2a)}{dy}-2\cdot\frac{d\chi(y-2a)}{dy}+\frac{df(y+a)}{dy}$$
$$-\frac{dF(y-a)}{dy}=\frac{y}{m}$$

und wenn man integrirt, so bekommt man

$$\text{XVI)}\quad 2\cdot\xi(y+2a)-2\cdot\chi(y-2a)+f(y+a)-F(y-a)$$
$$=\frac{y^2}{2\cdot m}+\mathfrak{A}$$

II) Es ist auch im Endpunkte der Abscisse α eine auf die Axe X senkrechte Ebene errichtet; und in dieser Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$3)\quad x=\alpha,\qquad\text{und}\qquad 4)\quad z=C+E\cdot y$$

Digitized by Google

Von dieser Curve soll die gesuchte Fläche begränzt werden; desshalb finden auch jetzt bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen statt:

$$\delta z_{\alpha, y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha, y} = 0, \text{ etc.}$$

und man hat

$$\text{XVII)} \quad \xi(y + 2\alpha) + \chi(y - 2\alpha) + f(y + \alpha) + F(y - \alpha) = C + E \cdot y$$

Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse $x = \alpha$ und zu irgend einer grade genommenen Abscisse y gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise ineinander hineinfallen. Die von allen diesen Spuren und der Axe X eingeschlossenen Winkel sollen eine goniometrische Tangente $= \frac{y}{n}$ haben. Desshalb müssen bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha, y} = 0, \quad \left(\frac{d_x \delta^2 z}{dx}\right)_{\alpha, y} = 0, \text{ etc.}$$

und man hat jetzt

$$\text{XVIII)} \quad 2 \cdot \xi'(y + 2\alpha) - 2 \cdot \chi'(y - 2\alpha) + f'(y + \alpha) - F'(y - \alpha) = \frac{y}{n}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XIX)} \quad 2 \cdot \xi(y + 2\alpha) - 2 \cdot \chi(y - 2\alpha) + f(y + \alpha) - F(y - \alpha) = \frac{y^2}{2n} + \mathfrak{B}$$

III) Es ist auch im Endpunkte der Abscisse b eine auf die Axe Y senkrechte Ebene errichtet; und in dieser Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen:

$$5) \quad y = b, \qquad \text{und} \qquad 6) \quad z = H \cdot x^2$$

Von dieser Curve soll die gesuchte Fläche begränzt werden; desshalb finden jetzt bei jedem Werthe des x folgende Gleichungen statt:

$$\delta z_{x, b} = 0, \quad \delta^2 z_{x, b} = 0, \text{ etc.}$$

und man hat

$$\text{XX)} \quad \xi(b + 2x) + \chi(b - 2x) + f(b + x) + F(b - x) = H \cdot x^2$$

Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse $y = b$ und zu irgend einer grade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise ineinander hineinfallen. Die von allen diesen Spuren und der Axe Y eingeschlossenen Winkel sollen eine goniometrische Tangente $= \frac{e + x}{g}$ haben. Desshalb müssen bei jedem Werthe des x folgende Gleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x, b} = 0, \quad \left(\frac{d_y \delta^2 z}{dy}\right)_{x, b} = 0, \text{ etc.}$$

und man hat jetzt

$$\text{XXI)} \quad \xi'(b + 2x) + \chi'(b - 2x) + f'(b + x) + F'(b - x) = \frac{e + x}{g}$$

Diese Gleichung ist aber gleichbedeutend mit folgender:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d\xi(b + 2x)}{dx} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\chi(b - 2x)}{dx} + \frac{df(b + x)}{dx} - \frac{dF(b - x)}{dx} = \frac{e + x}{g}$$

und wenn man integrirt, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XXII)}\quad \frac{1}{2}\cdot\xi(b+2x)-\frac{1}{2}\cdot\chi(b-2x)+f(b+x)-F(b-x)$$
$$=\frac{2ex+x^2}{2g}+\mathfrak{G}$$

IV) Es ist auch im Endpunkte der Abscisse β eine auf die Axe Y senkrechte Ebene errichtet; und in dieser Ebene liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$7)\ y=\beta,\qquad \text{und}\qquad 8)\ z=G+K\cdot x^2$$

Von dieser Curve soll die gesuchte Fläche begränzt werden; desshalb finden jetzt bei jedem Werthe des x folgende Gleichungen statt:

$$\delta z_{\beta,x}=0,\quad \delta^2 z_{\beta,x}=0,\ \text{etc.}$$

und man hat

$$\text{XXIII)}\quad \xi(\beta+2x)+\chi(\beta-2x)+f(\beta+x)+F(\beta-x)=G+K\cdot x^2$$

Ausserdem soll die gesuchte Fläche nur aus der Zahl derjenigen in jedem Punkte einander nächstanliegenden herausgewählt werden, deren zu der festen Abscisse $y=\beta$ und zu irgend einer grade genommenen Abscisse x gehörigen Berührungsebenen eine solche Lage haben, dass ihre in der Coordinatenebene YZ liegenden Spuren miteinander parallel laufen und theilweise ineinander hineinfallen. Die von allen diesen Spuren und der Axe Y eingeschlossenen Winkel sollen eine goniometrische Tangente $=\frac{h+2kx}{c}$ haben. Desshalb müssen bei jedem Werthe des x folgende Gleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta}=0,\quad \left(\frac{d_y\delta^2 z}{dy}\right)_{x,\beta}=0,\ \text{etc.}$$

und man hat jetzt

$$\text{XXIV)}\quad \xi'(\beta+2x)+\chi'(\beta-2x)+f'(\beta+x)+F'(\beta-x)=\frac{h+2kx}{c}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{XXV)}\quad \frac{1}{2}\cdot\xi(\beta+2x)-\frac{1}{2}\cdot\chi(\beta-2x)+f(\beta+x)-F(\beta-x)$$
$$=\frac{hx+k\cdot x^2}{c}+\mathfrak{G}$$

Nun gelten bei jedem Werthe des y folgende Gleichungen

$$\delta z_{a,y}=0,\quad \delta z_{\alpha,y}=0,\quad \delta^2 z_{a,y}=0,\quad \delta^2 z_{\alpha,y}=0,\ \text{etc.}$$

sie gelten also auch bei $y=b$ und bei $y=\beta$, d. h. es ist auch

$$\odot\ \left\{\begin{array}{l} \delta z_{a,b}=0,\quad \delta z_{a,\beta}=0,\quad \delta z_{\alpha,b}=0,\quad \delta z_{\alpha,\beta}=0\\ \delta^2 z_{a,b}=0,\quad \delta^2 z_{a,\beta}=0,\quad \delta^2 z_{\alpha,b}=0,\quad \delta^2 z_{\alpha,\beta}=0\\ \text{etc. etc.}\end{array}\right.$$

Zugleich gelten aber auch bei jedem Werthe des x folgende Gleichungen

$$\delta z_{x,b}=0,\quad \delta z_{x,\beta}=0,\quad \delta^2 z_{x,b}=0,\quad \delta^2 z_{x,\beta}=0,\ \text{etc.}$$

sie gelten aber auch bei $x=a$ und bei $x=\alpha$, d. h. es finden abermals die Gleichungen $\odot$ statt.

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg; und die acht Gleichungen XIV, XVI, XVII, XIX, XX, XXII, XXIII, XXV müssen bei Bestimmung der vier in z eingegangenen willkürlichen Functionen mitbenützt werden. (Man erinnere sich, dass man zur Bestimmung einer willkürlichen Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen jedesmal zwei Gleichungen nöthig hat.)

Zweiter Fall. Es sollen durchaus keine Gränzbedingungen vorgeschrieben sein. Hier fällt die Gränzengleichung nur hinweg, wenn folgende vier nach y identische Gleichungen

Digitized by Google

$$9)\quad 4\cdot\xi'''(y+2\alpha) - 4\cdot\chi'''(y-2\alpha) + 8\cdot f'''(y+\alpha) - 8\cdot F'''(y-\alpha) = 0$$
$$10)\quad 8\cdot\xi''(y+2\alpha) + 8\cdot\chi''(y-2\alpha) + 2\cdot f''(y+\alpha) + 2\cdot F''(y-\alpha) = 0$$
$$11)\quad 4\cdot\xi'''(y+2a) - 4\cdot\chi'''(y-2a) + 8\cdot f'''(y+a) - 8\cdot F'''(y-a) = 0$$
$$12)\quad 8\cdot\xi''(y+2a) + 8\cdot\chi''(y-2a) + 2\cdot f''(y+a) + 2\cdot F''(y-a) = 0$$

und wenn folgende vier nach x identische Gleichungen

$$13)\quad 32\cdot\xi'''(\beta+2x) + 32\cdot\chi'''(\beta-2x) + 2\cdot f'''(\beta+x) + 2\cdot F'''(\beta-x) = 0$$
$$14)\quad 8\cdot\xi''(\beta+2x) + 8\cdot\chi''(\beta-2x) + 8\cdot f''(\beta+x) + 8\cdot F''(\beta-x) = 0$$
$$15)\quad 32\cdot\xi'''(b+2x) + 32\cdot\chi'''(b-2x) + 2\cdot f'''(b+x) + 2\cdot F'''(b-x) = 0$$
$$16)\quad 8\cdot\xi''(b+2x) + 8\cdot\chi''(b-2x) + 8\cdot f''(b+x) + 8\cdot F''(b-x) = 0$$

und wenn folgende vier nichtidentische Gleichungen

$$17)\quad 2\cdot\xi''(\beta+2\alpha) - 2\cdot\chi''(\beta-2\alpha) + f''(\beta+\alpha) - F''(\beta-\alpha) = 0$$
$$18)\quad 2\cdot\xi''(b+2\alpha) - 2\cdot\chi''(b-2\alpha) + f''(b+\alpha) - F''(b-\alpha) = 0$$
$$19)\quad 2\cdot\xi''(\beta+2a) - 2\cdot\chi''(\beta-2a) + f''(\beta+a) - F''(\beta-a) = 0$$
$$20)\quad 2\cdot\xi''(b+2a) - 2\cdot\chi''(b-2a) + f''(b+a) - F''(b-a) = 0$$

stattfinden. Die Gleichungen 9, 10, 11, 12 sind bezüglich gleichbedeutend mit folgenden

$$21)\quad 4\cdot\frac{d^3\xi(y+2\alpha)}{dy^3} - 4\cdot\frac{d^3\chi(y-2\alpha)}{dy^3} + 8\cdot\frac{d^3f(y+\alpha)}{dy^3} - 8\cdot\frac{d^3F(y-\alpha)}{dy^3} = 0$$
$$22)\quad 8\cdot\frac{d^2\xi(y+2\alpha)}{dy^2} + 8\cdot\frac{d^2\chi(y-2\alpha)}{dy^2} + 2\cdot\frac{d^2f(y+\alpha)}{dy^2} + 2\cdot\frac{d^2F(y-\alpha)}{dy^2} = 0$$
$$23)\quad 4\cdot\frac{d^3\xi(y+2a)}{dy^3} - 4\cdot\frac{d^3\chi(y-2a)}{dy^3} + 8\cdot\frac{d^3f(y+a)}{dy^3} - 8\cdot\frac{d^3F(y-a)}{dy^2} = 0$$
$$24)\quad 8\cdot\frac{d^2\xi(y+2a)}{dy^2} + 8\cdot\frac{d^2\chi(y-2a)}{dy^2} + 2\cdot\frac{d^2f(y+a)}{dy^2} + 2\cdot\frac{d^2F(y-a)}{dy^2} = 0$$

Wenn man bei jeder dieser Gleichungen den gemeinschaftlichen Factor unterdrückt, und dann alle Integrationen ausführt; so bekommt man bezüglich

$$25)\quad \xi(y+2\alpha) - \chi(y-2\alpha) + 2\cdot f(y+\alpha) - 2\cdot F(y-\alpha) = A + B\cdot y + C\cdot y^2$$
$$26)\quad 4\cdot\xi(y+2\alpha) + 4\cdot\chi(y-2\alpha) + f(y+\alpha) + F(y-\alpha) = F + E\cdot y$$
$$27)\quad \xi(y+2a) - \chi(y-2a) + 2\cdot f(y+a) - 2\cdot F(y-a) = G + H\cdot y + K\cdot y^2$$
$$28)\quad 4\cdot\xi(y+2a) + 4\cdot\chi(y-2a) + f(y+a) + F(y-a) = M + N\cdot y$$

wo A, B, C, E, F, G, H, K, M, N die durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten sind.

Die Gleichungen 13, 14, 15, 16 sind bezüglich gleichbedeutend mit folgenden

$$29)\quad 4\cdot\frac{d^3\xi(\beta+2x)}{dx^3} - 4\cdot\frac{d^3\chi(\beta-2x)}{dx^3} + 2\cdot\frac{d^3f(\beta+x)}{dx^3} - 2\cdot\frac{d^3F(\beta-x)}{dx^3} = 0$$
$$30)\quad 2\cdot\frac{d^2\xi(\beta+2x)}{dx^2} + 2\cdot\frac{d^2\chi(\beta-2x)}{dx^2} + 8\cdot\frac{d^2f(\beta+x)}{dx^2} + 8\cdot\frac{d^2F(\beta-x)}{dx^2} = 0$$
$$31)\quad 4\cdot\frac{d^3\xi(b+2x)}{dx^3} - 4\cdot\frac{d^3\chi(b-2x)}{dx^3} + 2\cdot\frac{d^3f(b+x)}{dx^3} - 2\cdot\frac{d^3F(b-x)}{dx^3} = 0$$
$$32)\quad 2\cdot\frac{d^2\xi(b+2x)}{dx^2} + 2\cdot\frac{d^2\chi(b-2x)}{dx^2} + 8\cdot\frac{d^2f(b+x)}{dx^2} + 8\cdot\frac{d^2F(b-x)}{dx^2} = 0$$

Lässt man bei diesen vier Gleichungen den gemeinschaftlichen Factor 2 weg, und integrirt dann; so bekommt man bezüglich

$$33)\quad 2\cdot\xi(\beta+2x) - 2\cdot\chi(\beta-2x) + f(\beta+x) - F(\beta-x) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cdot x + \mathfrak{C}\cdot x^2$$
$$34)\quad \xi(\beta+2x) + \chi(\beta-2x) + 4\cdot f(\beta+x) + 4\cdot F(\beta-x) = \mathfrak{F} + \mathfrak{E}\cdot x$$
$$35)\quad 2\cdot\xi(b+2x) - 2\cdot\chi(b-2x) + f(b+x) - F(b-x) = \mathfrak{G} + \mathfrak{H}\cdot x + \mathfrak{K}\cdot x^2$$
$$36)\quad \xi(b+2x) + \chi(b-2x) + 4\cdot f(b+x) + 4\cdot F(b-x) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\cdot x$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten sind. Man hat im Ganzen zwanzig willkürliche Constanten durch die Integrationen bekommen. Die acht Gleichungen (25–28 und 33–36) müssen bei Bestimmung der vier willkürlichen Functionen $\xi(y+2x)$, $\chi(y-2x)$, $f(y+x)$, $F(y-x)$ benützt werden. Hieraus setze man b und β statt y in 25 ein, so bekommt man bezüglich

Digitized by Google

37) $\xi(b + 2\alpha) - \chi(b - 2\alpha) + 2 \cdot f(b + \alpha) - 2 \cdot F(b - \alpha) = A + B \cdot b + C \cdot b^2$
und
38) $\xi(\beta + 2\alpha) - \chi(\beta - 2\alpha) + 2 \cdot f(\beta + \alpha) - 2 \cdot F(\beta - \alpha) = A + B \cdot \beta + C \cdot \beta^2$
Man setze b und β statt y in 26 ein, so bekommt man bezüglich
39) $4 \cdot \xi(b + 2\alpha) + 4 \cdot \chi(b - 2\alpha) + f(b + \alpha) + F(b - \alpha) = F + E \cdot b$
und
40) $4 \cdot \xi(\beta + 2\alpha) + 4 \cdot \chi(\beta - 2\alpha) + f(\beta + \alpha) + F(\beta - \alpha) = F + E \cdot \beta$
Man setze b und β statt y in 27 ein, so bekommt man bezüglich
41) $\xi(b + 2a) - \chi(b - 2a) + 2 \cdot f(b + a) - 2 \cdot F(b - a) = \mathfrak{G} + H \cdot b + K \cdot b^2$
und
42) $\xi(\beta + 2a) - \chi(\beta - 2a) + 2 \cdot f(\beta + a) - 2 \cdot F(\beta - a) = \mathfrak{G} + H \cdot \beta + K \cdot \beta^2$
Man setze b und β statt y in 28 ein, so bekommt man bezüglich
43) $4 \cdot \xi(b + 2a) + 4 \cdot \chi(b - 2a) + f(b + a) + F(b - a) = M + N \cdot b$
und
44) $4 \cdot \xi(\beta + 2a) + 4 \cdot \chi(\beta - 2a) + f(\beta + a) + F(\beta - a) = M + N \cdot \beta$
Nun setze man a und α statt x in 33 ein, so bekommt man bezüglich
45) $2 \cdot \xi(\beta + 2a) - 2 \cdot \chi(\beta - 2a) + f(\beta + a) - F(\beta - a) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cdot a + \mathfrak{C} \cdot a^2$
und
46) $2 \cdot \xi(\beta + 2\alpha) - 2 \cdot \chi(\beta - 2\alpha) + f(\beta + \alpha) - F(\beta - \alpha) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \cdot \alpha + \mathfrak{C} \cdot \alpha^2$
Man setze a und α statt x in 34 ein, so bekommt man bezüglich
47) $\xi(\beta + 2a) + \chi(\beta - 2a) + 4 \cdot f(\beta + a) + 4 \cdot F(\beta - a) = \mathfrak{F} + \mathfrak{E} \cdot a$
und
48) $\xi(\beta + 2\alpha) + \chi(\beta - 2\alpha) + 4 \cdot f(\beta + \alpha) + 4 \cdot F(\beta - \alpha) = \mathfrak{F} + \mathfrak{E} \cdot \alpha$
Man setze a und α statt x in 35 ein, so bekommt man bezüglich
49) $2 \cdot \xi(b + 2a) - 2 \cdot \chi(b - 2a) + f(b + a) - F(b - a) = \mathfrak{G} + \mathfrak{H} \cdot a + \mathfrak{K} \cdot a^2$
und
50) $2 \cdot \xi(b + 2\alpha) - 2 \cdot \chi(b - 2\alpha) + f(b + \alpha) - F(b - \alpha) = \mathfrak{G} + \mathfrak{H} \cdot \alpha + \mathfrak{K} \cdot \alpha^2$
Man setze a und α statt x in 36 ein, so bekommt man bezüglich
51) $\xi(b + 2a) + \chi(b - 2a) + 4 \cdot f(b + a) + 4 \cdot F(b - a) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N} \cdot a$
und
52) $\xi(b + 2\alpha) + \chi(b - 2\alpha) + 4 \cdot f(b + \alpha) + 4 \cdot F(b - \alpha) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N} \cdot \alpha$

Man setze in den sechszehn letzteren Gleichungen (37 bis 52) die für $\xi(y + 2x)$, $\chi(y - 2x)$, $f(y + x)$, $F(y - x)$ bereits ermittelten speciellen Functionen ein; und wenn man mit diesen speciellen Functionen die gehörigen Differentiationen ausgeführt hat, so setze man die sich ergebenden Differentialquotienten in die vier Gleichungen 17, 18, 19, 20 ein. Man hat dann zwanzig Gleichungen, welche bei Bestimmung der zwanzig willkürlichen Constanten mitbenützt werden müssen. Diese Constanten stehen aber in einem gewissen Zusammenhange untereinander, welcher genau ausgemittelt werden muss. (Man vergleiche in dieser Hinsicht den zweiten Fall der 255sten Aufgabe, wo sich ergeben hat, dass die daselbst eingegangenen Constanten A, B, C, E einander gleich sein müssen).

Andere speciellen Fälle hinsichtlich der Zerlegung der Gränzengleichung, besonders wobei unter ihren Mutationscoefficienten irgend welche Abhängigkeiten stattfinden, kann man sich nach Belieben bilden.

Aufgabe 271.

Es sei V ein reeller, mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$, $\frac{d_x^3 z}{dx^3}$, $\frac{d_x^2 d_y z}{dx^2.dy}$, $\frac{d_x d_y^2 z}{dx.dy^2}$, $\frac{d_y^3 z}{dy^3}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für z eine solche Function

Digitized by Google

der beiden nichtmutablen und untereinander unabhängigen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert. Man mutire, und versehe die zu wählenden Abkürzungszeichen mit Merkmalen, die es möglich machen, dass die Bedeutung und der Ursprung eines jeden dieser Abkürzungszeichen durch die ganze Untersuchung hindurch erkennbar bleibt. Dieser Zweck wird erreicht, wenn man (nach dem Vorgange der 265sten Aufg.) die zu den beiden Differentialquotienten der ersten Ordnung

$$\frac{d_x\delta z}{dx} \text{ und } \frac{d_y\delta z}{dy}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(Ix) \text{ und } (Iy)$$

wenn man die zu den drei Differentialquotienten der zweiten Ordnung

$$\frac{d_x^2\delta z}{dx^2},\ \frac{d_x d_y\delta z}{dx.dy} \text{ und } \frac{d_y^2\delta z}{dy^2}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(IIx^2),\ (IIxy) \text{ und } (IIy^2)$$

und wenn man die zu den vier Differentialquotienten der dritten Ordnung

$$\frac{d_x^3\delta z}{dx^3},\ \frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy},\ \frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2} \text{ und } \frac{d_y^3\delta z}{dy^3}$$

gehörigen Factoren bezüglich mit

$$(IIIx^3),\ (IIIx^2y),\ (IIIxy^2) \text{ und } (IIIy^3)$$

bezeichet. Dadurch bekommt man für die erste Form des δU folgenden Ausdruck:

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z V}{dz}\cdot\delta z + (Ix)\frac{d_x\delta z}{dx} + (Iy)\frac{d_y\delta z}{dy} + (IIx^2)\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}$$
$$+ (IIxy)\frac{d_x d_y\delta z}{dx.dy} + (IIy^2)\frac{d_y^2\delta z}{dy^2} + (IIIx^3)\frac{d_x^3\delta z}{dx^3} + (IIIx^2y)\frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy}$$
$$+ (IIIxy^2)\frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2} + (IIIy^3)\frac{d_y^3\delta z}{dy^3}\Big]\cdot dy\cdot dx$$

Führt man hier die gewöhnliche Umformung aus, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx\cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2}$$
$$- \frac{d_x^3(IIIx^3)}{dx^3} - \frac{d_x^2 d_y(IIIx^2y)}{dx^2\cdot dy} - \frac{d_x d_y^2(IIIxy^2)}{dx\cdot dy^2} - \frac{d_y^3(IIIy^3)}{dy^3}\Big]\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$
$$+\int_b^\beta\Big[\Big((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIIx^3)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIIx^2y)}{dx\cdot dy} + \frac{d_y^2(IIIxy^2)}{dy^2}\Big)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}$$
$$+\Big((IIx^2) - \frac{d_x(IIIx^3)}{dx} - \frac{d_y(IIIx^2y)}{dy}\Big)_{\alpha,y}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{\alpha,y} + (IIIx^3)_{\alpha,y}\cdot\Big(\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}\Big)_{\alpha,y}$$
$$-\Big((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIIx^3)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIIx^2y)}{dx\cdot dy} + \frac{d_y^2(IIIxy^2)}{dy^2}\Big)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}$$
$$-\Big((IIx^2) - \frac{d_x(IIIx^3)}{dx} - \frac{d_y(IIIx^2y)}{dy}\Big)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_x\delta z}{dx}\Big)_{a,y} - (IIIx^3)_{a,y}\cdot\Big(\frac{d_x^2\delta z}{dx^2}\Big)_{a,y}\Big]\cdot dy$$

Digitized by Google

sucht für z und w solche reelle Functionen der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und y, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249[sten] Aufg.) erläutert. Man setze zur Abkürzung p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, und mutire; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_w V}{dw} \cdot \delta w + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_x \delta w}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_y \delta w}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man berücksichtige, dass die durch $\frac{d_p V}{dp}$, $\frac{d_q V}{dq}$, $\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}$, $\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}$ repräsentirten Ausdrücke das x und y sowohl unmittelbar als auch mittelbar in z, w, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$ enthalten; und man beachte, dass die durch δz, δw, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$, $\frac{d_x \delta w}{dx}$, $\frac{d_y \delta w}{dy}$, etc. vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x und y zu behandeln sind. Nach allem diesem bekommt man, wenn man wie in der 251[sten] Aufgabe verfahrt, als zweite Form

$$\text{III)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)\right) \cdot \delta z + \left(\frac{d_w V}{dw} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)\right) \cdot \delta w\right] \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta w_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{a,y} \cdot \delta w_{a,y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + \left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,\beta} \cdot \delta w_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - \left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,b} \cdot \delta w_{x,b}\right] \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch zugleich noch integrirt werden soll. Es lässt sich also keine fernere Transformation mehr anbringen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des δU. Hier bekommt man im Allgemeinen Systeme von je sechs Gleichungen, d. h. die für z und w gesuchten Functionen müssen zusammen sechs Gleichungen zugleich erfüllen; und desshalb wird die Aufgabe in der Regel eine überbestimmte sein. Uebrigens sind, wenn sich für z und w wirklich entsprechende Functionen finden lassen, diese von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig. (Wie man Functionen findet, welche mehreren Partialdifferentialgleichungen zugleich genügen, darüber mögen die Aufgaben 133 bis 153 verglichen werden.)

Zweitens. Schaut man aber auf die zweite (in III aufgestellte) Form des δU zurück, so erkennt man, dass es für z und w auch solche Functionen gibt, welche von den Gränzen a, α, b, β abhängig sind, und welche nur zweien identischen Gleichungen genügen müssen, dagegen auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen können, während das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo für z und w solche Functionen gesucht werden, welche von den Gränzen a, α, b, β abhängig sind, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und jedesmal möglich ist.

Digitized by Google

A) Man zerlege Gleichung III zunächst in folgende drei:

$$\text{IV)}\quad \frac{d_zV}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)}{dy} = 0$$

$$\text{V)}\quad \frac{d_wV}{dw} - \frac{d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{q}}\right)}{dy} = 0$$

$$\begin{aligned}\text{VI)}\quad & \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + \left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta w_{\alpha,y} \right.\\ & \left. - \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - \left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)_{a,y} \cdot \delta w_{a,y}\right] \cdot dy \\ & + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + \left(\frac{d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,\beta} \cdot \delta w_{x,\beta} \right.\\ & \left. - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - \left(\frac{d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,b} \cdot \delta w_{x,b}\right] \cdot dx = 0\end{aligned}$$

Die Gleichungen IV und V sind die Hauptgleichungen, und gelten bei jedem Werthe des x und des y. Die Gleichung VI ist die Gränzengleichung; sie hat schon die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden. Die beiden Hauptgleichungen werden in der Regel von der zweiten Ordnung sein; sind sie aber nicht beide von der zweiten Ordnung, so wird die Gränzengleichung sehr oft nicht erfüllt werden können.

Um zu untersuchen, ob δ^2U positiv oder negativ sei, suche man die Bedingungen auf, unter denen der Ausdruck

$$\begin{aligned}& \frac{d_p^2V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_pd_qV}{dp.dq} \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} + 2 \cdot \frac{d_pd_\mathfrak{p}V}{dp.d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} \cdot \frac{d_x\delta w}{dx} \\ & + 2 \cdot \frac{d_pd_\mathfrak{q}V}{dp.d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} \cdot \frac{d_y\delta w}{dy} + \frac{d_q^2V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_qd_\mathfrak{p}V}{dq.d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} \cdot \frac{d_x\delta w}{dx} \\ & + 2 \cdot \frac{d_qd_\mathfrak{q}V}{dq.d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} \cdot \frac{d_y\delta w}{dy} + \frac{d_\mathfrak{p}^2V}{d\mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d_x\delta w}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_\mathfrak{p}d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{p}.d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_x\delta w}{dx} \cdot \frac{d_y\delta w}{dy} + \frac{d_\mathfrak{q}^2V}{d\mathfrak{q}^2} \cdot \left(\frac{d_y\delta w}{dy}\right)^2\end{aligned}$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt. Diese Bedingungen lassen sich aber nach Anleitung des §. 13 leicht aufsuchen. Alles Weitere nach Analogie der 251sten Aufgabe.

Was die Zerlegung der Gränzengleichung betrifft, so verfahre man nach Analogie der Aufgaben 251, 265, etc.

B) Hat man nun diese (mit der zweiten Form des δU hier unternommene) Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung III zurück, ob man nicht den zu δz und δw gehörigen Factoren

$$\frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$$

und

$$\frac{d_wV}{dw} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{q}}\right)$$

entweder einem oder allen beiden zugleich die Form $\frac{\mathfrak{M}}{0}$ beilegen kann.

Digitized by Google

$$+\int_a^\alpha \Bigg[\left((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy} + \frac{d_x^2(IIIx^2y)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIIxy^2)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIIy^3)}{dy^2}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta}$$

$$+\left((IIy^2) - \frac{d_x(IIIxy^2)}{dx} - \frac{d_y(IIIy^3)}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta} + (IIIy^3)_{x,\beta} \cdot \left(\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}\right)_{x,\beta}$$

$$-\left((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy} + \frac{d_x^2(IIIx^2y)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIIxy^2)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIIy^3)}{dy^2}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}$$

$$-\left((IIy^2) - \frac{d_x(IIIxy^2)}{dx} - \frac{d_y(IIIy^3)}{dy}\right)_{x,b} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b} - (IIIy^3)_{x,b} \cdot \left(\frac{d_y^2\delta z}{dy^2}\right)_{x,b}\Bigg] \cdot dx$$

$$+\left((IIxy) - \frac{d_x(IIIx^2y)}{dx} - \frac{d_y(IIIxy^2)}{dy}\right)_{\alpha,\beta} \cdot \delta z_{\alpha,\beta}$$

$$-\left((IIxy) - \frac{d_x(IIIx^2y)}{dx} - \frac{d_y(IIIxy^2)}{dy}\right)_{\alpha,b} \cdot \delta z_{\alpha,b}$$

$$-\left((IIxy) - \frac{d_x(IIIx^2y)}{dx} - \frac{d_y(IIIxy^2)}{dy}\right)_{a,\beta} \cdot \delta z_{a,\beta}$$

$$+\left((IIxy) - \frac{d_x(IIIx^2y)}{dx} - \frac{d_y(IIIxy^2)}{dy}\right)_{a,b} \cdot \delta z_{a,b}$$

$$+(IIIx^2y)_{\alpha,\beta} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,\beta} - (IIIx^2y)_{\alpha,b} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,b}$$

$$-(IIIx^2y)_{a,\beta} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,\beta} + (IIIx^2y)_{a,b} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,b}$$

$$+(IIIxy^2)_{\alpha,\beta} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{\alpha,\beta} - (IIIxy^2)_{\alpha,b} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{\alpha,b}$$

$$-(IIIxy^2)_{a,\beta} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,\beta} + (IIIxy^2)_{a,b} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,b}$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch zugleich noch integrirt werden soll. Es lässt sich also keine weitere Transformation mehr anbringen

Erstens. Man nehme zuerst die erste (in Gleichung II aufgestellte) Form des δU vor. Hier bekommt man im Allgemeinen Systeme von je zehn Gleichungen, d. h. eine und dieselbe für z gesuchte Function muss zehn Gleichungen zugleich genügen. Desshalb wird die Aufgabe in der Regel eine überbestimmte sein. Uebrigens ist, wenn sich für z wirklich eine entsprechende Function finden lässt, diese von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig. (Wie man Functionen findet, welche mehreren Partialdifferentialgleichungen zugleich genügen, darüber mögen die Aufgaben 133—153 verglichen werden).

Zweitens. Schaut man auf die zweite (in III aufgestellte) Form des δU, so erkennt man, dass es eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen andern Gränzen erstrekte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a, α, b, β abhängige Function z gesucht wird, ist aber diejenigc, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und fast immer möglich sein wird.

A) Will man Gleichung III zu Null werden lassen, so bekommt man zunächst die Hauptgleichung

$$\text{IV)}\quad \frac{d_zV}{dz} - \frac{d_x(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2}$$
$$- \frac{d_x^3(IIIx^3)}{dx^3} - \frac{d_x^2 d_y(IIIx^2y)}{dx^2 \cdot dy} - \frac{d_x d_y^2(IIIxy^2)}{dx \cdot dy^2} - \frac{d_y^3(IIIy^3)}{dy^3} = 0$$

Digitized by Google

Diese Gleichung gilt bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des y, und sie wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der sechsten Ordnung sein. Ist sie aber wirklich von der sechsten Ordnung, so nimmt ihr allgemeines Integral sechs willkürliche Functionen in sich auf, während unter jenen singulären Integralen, welche keine willkürliche Function enthalten, keines mit mehr als mit siebenundzwanzig neuen willkürlichen Constanten versehen sein kann, welche nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren.

Die Gränzengleichung hat schon die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden; auch wird sie sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der sechsten Ordnung ist.

Um zu untersuchen, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, setze man vorerst zur Abkürzung

$$p, q, r, s, t, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}, \frac{d_x^2 z}{dx^2}, \frac{d_x d_y z}{dx.dy}, \frac{d_y^2 z}{dy^2}, \frac{d_x^3 z}{dx^3}, \frac{d_x^2 d_y z}{dx^2.dy}, \frac{d_x d_y^2 z}{dx.dy^2}, \frac{d_y^3 z}{dy^3}$$

und suche dann die Bedingungen auf, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d_x^3\delta z}{dx^3}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_\mathfrak{p}d_\mathfrak{q}V}{d\mathfrak{p}.d\mathfrak{q}}\cdot\frac{d_x^3\delta z}{dx^3}\cdot\frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy} + 2\cdot\frac{d_\mathfrak{p}d_\mathfrak{r}V}{d\mathfrak{p}.d\mathfrak{r}}\cdot\frac{d_x^3\delta z}{dx^3}\cdot\frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2}$$

$$+ 2\cdot\frac{d_\mathfrak{p}d_\mathfrak{s}V}{d\mathfrak{p}.d\mathfrak{s}}\cdot\frac{d_x^3\delta z}{dx^3}\cdot\frac{d_y^3\delta z}{dy^3} + \frac{d_\mathfrak{q}^2 V}{d\mathfrak{q}^2}\cdot\left(\frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_\mathfrak{q}d_\mathfrak{r}V}{d\mathfrak{q}.d\mathfrak{r}}\cdot\frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy}\cdot\frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2}$$

$$+ 2\cdot\frac{d_\mathfrak{q}d_\mathfrak{s}V}{d\mathfrak{q}.d\mathfrak{s}}\cdot\frac{d_x^2 d_y\delta z}{dx^2.dy}\cdot\frac{d_y^3\delta z}{dy^3} + \frac{d_\mathfrak{r}^2 V}{d\mathfrak{r}^2}\cdot\left(\frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2}\right)^2$$

$$+ 2\cdot\frac{d_\mathfrak{r}d_\mathfrak{s}V}{d\mathfrak{r}.d\mathfrak{s}}\cdot\frac{d_x d_y^2\delta z}{dx.dy^2}\cdot\frac{d_y^3\delta z}{dy^3} + \frac{d_\mathfrak{s}^2 V}{d\mathfrak{s}^2}\cdot\left(\frac{d_y^3\delta z}{dy^3}\right)^2$$

beständig negativ oder positiv bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt. Diese Bedingungen lassen sich aber (nach §. 13) leicht aufsuchen.

Alles Weitere nach Analogie der 251sten Aufgabe.

Nun ist man auf dem Punkte, die Gränzengleichung zu erfüllen. Zu diesem Behufe brauchen aber in Folge alles Vorhergehenden keine weiteren Einzelheiten mehr aufgestellt zu werden.

B) Hat man diese (mit der zweiten Form des δU hier unternommene) Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung III zurück, ob man nicht dem zu δz gehörigen Factor

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(\text{I}x)}{dx} - \frac{d_y(\text{I}y)}{dy} + \frac{d_x^2(\text{II}x^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(\text{II}xy)}{dx\cdot dy} + \frac{d_y^2(\text{II}y^2)}{dy^2}$$

$$- \frac{d_x^3(\text{III}x^3)}{dx^3} - \frac{d_x^2 d_y(\text{III}x^2y)}{dx^2\cdot dy} - \frac{d_x d_y^2(\text{III}xy^2)}{dx\cdot dy^2} - \frac{d_y^3(\text{III}y^3)}{dy^3}$$

die Form $\frac{\mathfrak{M}}{0}$ beilegen kann, etc. etc. (Dergleichen Fälle mögen dann nach Analogie der Aufgaben 163, 164, 165 behandelt werden).

Aufgabe 262.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, w, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$ gebildeter Ausdruck, wo die Elemente z und w ganz unabhängig untereinander sind, und man

Digitized by Google

sucht für z und w solche reelle Functionen der beiden [illegible] Veränderlichen x und y, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufg.) erläutert. Man setze zur Abkürzung p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, und mutire; so bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_w V}{dw} \cdot \delta w + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_x \delta w}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_y \delta w}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Man berücksichtige, dass die durch $\frac{d_p V}{dp}$, $\frac{d_q V}{dq}$, $\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}$, $\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}$ repräsentirten Ausdrücke das x und y sowohl unmittelbar als auch mittelbar in z, w, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$ enthalten; und man beachte, dass die durch δz, δw, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$, $\frac{d_x \delta w}{dx}$, $\frac{d_y \delta w}{dy}$, etc. vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x und y zu behandeln sind. Nach allem diesem bekommt man, wenn man wie in der 251sten Aufgabe verfahrt, als zweite Form

$$\text{III)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)\right) \cdot \delta z + \left(\frac{d_w V}{dw} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)\right) \cdot \delta w\right] \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta w_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{a,y} \cdot \delta w_{a,y}\right] \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + \left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,\beta} \cdot \delta w_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - \left(\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,b} \cdot \delta w_{x,b}\right] \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch zugleich noch integrirt werden soll. Es lässt sich also keine fernere Transformation mehr anbringen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in II aufgestellten) Form des δU. Hier bekommt man im Allgemeinen Systeme von je sechs Gleichungen, d. h. die für z und w gesuchten Functionen müssen zusammen sechs Gleichungen zugleich erfüllen; und desshalb wird die Aufgabe in der Regel eine überbestimmte sein. Uebrigens sind, wenn sich für z und w wirklich entsprechende Functionen finden lassen, diese von den Gränzen a, α, b, β ganz unabhängig. (Wie man Functionen findet, welche mehreren Partialdifferentialgleichungen zugleich genügen, darüber mögen die Aufgaben 133 bis 153 verglichen werden.)

Zweitens. Schaut man aber auf die zweite (in III aufgestellte) Form des δU zurück, so erkennt man, dass es für z und w auch solche Functionen gibt, welche von den Gränzen a, α, b, β abhängig sind, und welche nur zweien identischen Gleichungen genügen müssen, dagegen auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α und von b bis β erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen können, während das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximumstand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo für z und w solche Functionen gesucht werden, welche von den Gränzen a, α, b, β abhängig sind, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und jedesmal möglich ist.

Digitized by Google

A) Man zerlege Gleichung III zunächst in folgende drei:

$$\text{IV)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)}{dy} = 0$$

$$\text{V)}\quad \frac{d_w V}{dw} - \frac{d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)}{dy} = 0$$

$$\begin{aligned}\text{VI)}\quad & \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta w_{\alpha,y}\right. \\ & \left. - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_{a,y} \cdot \delta w_{a,y}\right] \cdot dy \\ & + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,\beta} \cdot \delta w_{x,\beta}\right. \\ & \left. - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)_{x,b} \cdot \delta w_{x,b}\right] \cdot dx = 0\end{aligned}$$

Die Gleichungen IV und V sind die Hauptgleichungen, und gelten bei jedem Werthe des x und des y. Die Gleichung VI ist die Gränzengleichung; sie hat schon die Werthe a, α, b, β in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden. Die beiden Hauptgleichungen werden in der Regel von der zweiten Ordnung sein; sind sie aber nicht beide von der zweiten Ordnung, so wird die Gränzengleichung sehr oft nicht erfüllt werden können.

Um zu untersuchen, ob $\delta^2 U$ positiv oder negativ sei, suche man die Bedingungen auf, unter denen der Ausdruck

$$\begin{aligned}& \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp . dq} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2 \cdot \frac{d_p d_\mathfrak{p} V}{dp . d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_x \delta w}{dx} \\ & + 2 \cdot \frac{d_p d_\mathfrak{q} V}{dp . d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta w}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_q d_\mathfrak{p} V}{dq . d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_x \delta w}{dx} \\ & + 2 \cdot \frac{d_q d_\mathfrak{q} V}{dq . d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_y \delta w}{dy} + \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta w}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_\mathfrak{p} d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{p} . d\mathfrak{q}} \cdot \frac{d_x \delta w}{dx} \cdot \frac{d_y \delta w}{dy} + \frac{d_\mathfrak{q}^2 V}{d\mathfrak{q}^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta w}{dy}\right)^2\end{aligned}$$

beständig positiv oder negativ bleibt, während man dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt. Diese Bedingungen lassen sich aber nach Anleitung des §. 13 leicht aufsuchen. Alles Weitere nach Analogie der 251sten Aufgabe.

Was die Zerlegung der Gränzengleichung betrifft, so verfahre man nach Analogie der Aufgaben 251, 265, etc.

B) Hat man nun diese (mit der zweiten Form des δU hier unternommene) Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung III zurück, ob man nicht den zu δz und δw gehörigen Factoren

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)$$

und

$$\frac{d_w V}{dw} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)$$

entweder einem oder allen beiden zugleich die Form $\frac{\mathfrak{M}}{0}$ beilegen kann.

Digitized by Google

Aufgabe 273.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, v, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_v z}{dv}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht z als solche Function der drei nichtmutablen Veränderlichen x, y, v, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma V \cdot dv \cdot dy \cdot dx$$

wo c und γ keine Functionen von x und y, und wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 249sten Aufgabe) auseinandergesetzt. Man setze zur Abkürzung p, q, r bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_v z}{dv}$, und mutire; so bekommt man vorerst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_r V}{dr} \cdot \frac{d_v \delta z}{dv}\right) \cdot dv \cdot dy \cdot dx$$

Man berücksichtige, dass die durch $\frac{d_p V}{dp}$, $\frac{d_q V}{dq}$, $\frac{d_r V}{dr}$ repräsentirten Ausdrücke das x, das y und das v sowohl unmittelbar als auch mittelbar in z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_v z}{dv}$ enthalten; und man beachte, dass die durch δz, $\frac{d_x \delta z}{dx}$, $\frac{d_y \delta z}{dy}$, $\frac{d_v \delta z}{dv}$, $\delta^2 z$, $\frac{d_x \delta^2 z}{dx}$, $\frac{d_y \delta^2 z}{dy}$, $\frac{d_v \delta^2 z}{dv}$, etc. vorgestellten Ausdrücke nur als unmittelbare Functionen von x, y, v zu betrachten sind. Dieses berücksichtigend, forme man um, und man bekommt

$$\text{III)}\quad \delta U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right) - \frac{1}{dv} \cdot d_v\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right] \cdot \delta z \cdot dv \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y,v} \cdot \delta z_{\alpha,y,v} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y,v} \cdot \delta z_{a,y,v}\right] \cdot dv \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta,v} \cdot \delta z_{x,\beta,v} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b,v} \cdot \delta z_{x,b,v}\right] \cdot dv \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x,y,\gamma} \cdot \delta z_{x,y,\gamma} - \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x,y,c} \cdot \delta z_{x,y,c}\right] \cdot dy \cdot dx$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch zugleich integrirt werden soll. Es lässt sich also keine fernere Transformation mehr anbringen.

Erstens. Man nehme zuerst die erste (in Gleichung II aufgestellte) Form des δU vor. Hier bekommt man im Allgemeinen Systeme von je vier Gleichungen, d. h. eine und dieselbe für z gesuchte Function muss vier Gleichungen zugleich genügen; desshalb wird die Aufgabe in der Regel eine überbestimmte sein. Uebrigens ist, wenn sich für z wirklich eine entsprechende Function finden lässt, diese von den Gränzen a, α, b, β, c, γ ganz unabhängig.

Zweitens. Schaut man aber auf die zweite (in Gleichung II aufgestellte) Form des δU; so erkennt man, dass es für z auch eine von den Gränzen a, α, b, β, c, γ abhängige Function gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen von a bis α, von b bis β, von c bis γ erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während das zwischen andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a, α, b, β, c, γ abhängige Function z gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt und auch jedesmal möglich ist.

Digitized by Google

A) Man zerlege die Gleichung III zunächst in folgende zwei:

$$\text{IV)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)}{dy} - \frac{d_v\left(\frac{d_r V}{dr}\right)}{dv} = 0$$

und

$$\text{V)}\quad \int_b^\beta \int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha, y, v} \cdot \delta z_{\alpha, y, v} - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a, y, v} \cdot \delta z_{a, y, v}\right] \cdot dv \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \int_c^\gamma \left[\left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x, \beta, v} \cdot \delta z_{x, \beta, v} - \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x, b, v} \cdot \delta z_{x, b, v}\right] \cdot dv \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x, y, \gamma} \cdot \delta z_{x, y, \gamma} - \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x, y, c} \cdot \delta z_{x, y, c}\right] \cdot dy \cdot dx = 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung gilt bei jedem Werthe des x, bei jedem Werthe des y, und bei jedem Werthe des v; und sie wird in der Regel eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung mit drei absolut unabhängigen Veränderlichen sein.

Die Gränzengleichung hat schon die Werthe a, α, b, β, c, γ in sich aufgenommen, und muss nach ihnen modificirt werden; auch wird sie sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der zweiten Ordnung ist.

In Beziehung auf das Prüfungsmittel, ob nemlich ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von beiden stattfinde, sei nur Folgendes bemerkt:

Wenn der Gang des in der 251sten und den folgenden Aufgaben angewendeten Verfahrens gehörig aufgefasst ist; so kann es gradezu auf den hiesigen Fall ausgedehnt werden, und man gelangt dabei zu dem Ergebnisse, dass $\delta^2 U$ positiv oder negativ bleibt, wenn der Ausdruck

$$\text{VI)}\quad \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp \cdot dq} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + 2 \cdot \frac{d_p d_r V}{dp \cdot dr} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_v \delta z}{dv}$$

$$+ \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_q d_r V}{dq \cdot dr} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{d_v \delta z}{dv} + \frac{d_r^2 V}{dr^2} \cdot \left(\frac{d_v \delta z}{dv}\right)^2$$

beständig negativ oder positiv bleibt, während man dem v alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von c bis γ, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des v auch dem y alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von b bis β, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des v und des y auch dem x alle stetig nebeneinander liegenden Werthe von a bis α beilegt. Die Bedingungen, unter welchen dieser Ausdruck beständig einerlei Zeichen behält, lassen sich nach §. 12 jedesmal leicht aufsuchen.

Wenn aber der Ausdruck VI nicht bei allen von a bis α, von b bis β, von c bis γ liegenden Werthen des x, des y, des v beständig negativ oder beständig positiv bleibt; so ist dieses (man sehe §. 10 und namentlich die entsprechende Untersuchung in der 251sten Aufgabe) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand bestehe, sondern dieses müsste noch besonders nachgewiesen werden. Alles Weitere nach Analogie der 251sten und 265sten Aufgabe.

Nun ist man auf dem Punkte, die Gränzengleichung zu erfüllen.

Erster Fall. Die Specialitäten seien von der Art, dass die Gleichungen

$$\delta z_{a,y,v} = 0,\ \delta z_{\alpha,y,v} = 0,\ \delta^2 z_{a,y,v} = 0,\ \delta^2 z_{\alpha,y,v} = 0, \text{ etc.}$$

$$\delta z_{x,b,v} = 0,\ \delta z_{x,\beta,v} = 0,\ \delta^2 z_{x,b,v} = 0,\ \delta^2 z_{x,\beta,v} = 0, \text{ etc.}$$

$$\delta z_{x,y,c} = 0,\ \delta z_{x,y,\gamma} = 0,\ \delta^2 z_{x,y,c} = 0,\ \delta^2 z_{x,y,\gamma} = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden. Hierbei fällt die Gränzengleichung V von selbst hinweg.

Zweiter Fall. Es seien gar keine Gränzbedingungen vorgeschrieben. Hier wird der Gränzengleichung nur genügt, wenn folgende sechs Gleichungen stattfinden:

Digitized by Google

$$1)\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{\alpha,y,v} = 0, \quad 2)\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y,v} = 0$$

$$3)\ \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,\beta,v} = 0, \quad 4)\ \left(\frac{d_q V}{dq}\right)_{x,b,v} = 0$$

$$5)\ \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x,y,\gamma} = 0, \quad 6)\ \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_{x,y,c} = 0$$

In den Gleichungen 1 und 2 ist x constant; dieselben werden aber in der Regel Differentialgleichungen, und zwar Partialdifferentialgleichungen nach y und v sein. Diesen Umstand muss man berücksichtigen, wenn man dieselben integrirt.

In den Gleichungen 3 und 4 ist y constant; dieselben werden aber in der Regel Partialdifferentialgleichungen nach x und v sein.

In den Gleichungen 5 und 6 ist v constant; dieselben werden aber in der Regel Partialdifferentialgleichungen nach x und y sein.

Erst wenn man das für z hergestellte allgemeine Integral in den Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 substituirt, und hierauf diese Gleichungen integrirt hat, können dieselben bei Bestimmung der in z eingegangenen willkürlichen Functionen mitbenützt werden.

Andere specielle Fälle hinsichtlich der Zerlegung der Gränzengleichung, besonders wobei unter ihren Mutationscoefficienten irgend eine Abhängigkeit stattfindet, kann man sich nach Belieben bilden.

B) Hat man nun diese (mit der zweiten Form des δU hier unternommene) Untersuchung ausgeführt, so schaue man abermals auf Gleichung III zurück, ob man nicht dem zu δz gehörigen Factor

$$\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right) - \frac{1}{dv}\cdot d_v\left(\frac{d_r V}{dr}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{N}}{0}$ beilegen kann etc. etc. (Dergleichen Fälle mögen dann nach Analogie der Aufgaben 163, 164, 165 behandelt werden.)

Aufgabe 274.

Es sei V ein reeller, mit den Elementen x, y, z, w, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für z und w solche Functionen der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für z und w gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass noch einer Urgleichung

$$\text{II)}\quad F(x, y, z, w) = 0$$

identisch genügt wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist bereits (im Anfange der 249sten Aufgabe) erläutert.

Verfahrt man hier nach Analogie der 59sten Untersuchung (§ 243 — 251), so gelangt man zu drei verschiedenen Auflösungen.

Erste Auflösung.

Man sondere das mittelbar mutable Element ab. Dieses sei w, und aus II folge

$$\text{III)}\quad w = f(x, y, z)$$

Nun eliminire man w, $\frac{d_x w}{dx}$ und $\frac{d_y w}{dy}$ aus I, so ist die hiesige Aufgabe auf die 251ste gebracht.

Digitized by Google

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire hierauf die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Aus II folgt

$$\text{IV)}\quad \frac{d_w F}{dw}\cdot\delta w+\frac{d_z F}{dz}\cdot\delta z=0$$

$$\text{V)}\quad \frac{d_w F}{dw}\cdot\delta^2 w+\frac{d_z F}{dz}\cdot\delta^2 z+\frac{d_w^2 F}{dw^2}\cdot\delta w^2+2\cdot\frac{d_w d_z F}{dw.dz}\cdot\delta w\cdot\delta z+\frac{d_z^2 F}{dz^2}\cdot\delta z^2=0$$

etc. etc.

Man sondere δw und $\delta^2 w$ aus IV und V ab, so bekommt man Ausdrücke von folgender Form:

$$\text{VI)}\quad \delta w=Q\cdot\delta z$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 w=Q\cdot d^2 z+R\cdot\delta z^2$$

etc. etc.

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_x\delta w}{dx}=\frac{1}{dx}\cdot d_x(Q\cdot\delta z)$$

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y\delta w}{dy}=\frac{1}{dy}\cdot d_y(Q\cdot\delta z)$$

$$\text{X)}\quad \frac{d_x\delta^2 w}{dx}=\frac{1}{dx}\cdot d_x(Q\cdot\delta^2 z)+\frac{1}{dx}\cdot d_x(R\cdot\delta z^2)$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y\delta^2 w}{dy}=\frac{1}{dy}\cdot d_y(Q\cdot\delta^2 z)+\frac{1}{dy}\cdot d_y(R\cdot\delta z^2)$$

Hier müssen Q und R als Functionen von x, y und z gedacht werden, während δz und $\delta^2 z$ nur Functionen von x und y sind. Führt man jetzt die in den letzten vier Gleichungen angedeuteten Differentiationen aus, so gibt sich bezüglich

$$\text{XII)}\quad \frac{d_x\delta w}{dx}=\frac{d_x Q}{dx}\cdot\delta z+Q\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_y\delta w}{dy}=\frac{d_y Q}{dy}\cdot\delta z+Q\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{d_x\delta^2 w}{dx}=\frac{d_x Q}{dx}\cdot\delta^2 z+Q\cdot\frac{d_x\delta^2 z}{dx}+\frac{d_x R}{dx}\cdot\delta z^2+2\cdot R\cdot\delta z\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}$$

$$\text{XV)}\quad \frac{d_y\delta^2 w}{dy}=\frac{d_y Q}{dy}\cdot\delta^2 z+Q\cdot\frac{d_y\delta^2 z}{dy}+\frac{d_y R}{dy}\cdot\delta z^2+2\cdot R\cdot\delta z\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$

Man setze zur Abkürzung p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y w}{dy}$, und mutire I; so bekommt man zunächst

$$\text{XVI)}\quad \delta U=\int_a^\alpha\int_b^\beta\Big(\frac{d_z V}{dz}\cdot\delta z+\frac{d_w V}{dw}\cdot\delta w+\frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d_x\delta z}{dx}+\frac{d_q V}{dq}\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$
$$+\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d_x\delta w}{dx}+\frac{d_{\mathfrak{q}} V}{d\mathfrak{q}}\cdot\frac{d_y\delta w}{dy}\Big)\cdot dy\cdot dx$$

A) Dieses ist die erste Form des δU; und wenn man sie untersuchen will, so hat man δw, $\frac{d_x\delta w}{dx}$ und $\frac{d_y\delta w}{dy}$ zu eliminiren. Dann bekommt man Systeme von drei Gleichungen. Solche drei zusammengehörige Gleichungen müssen aber jedesmal mit Gleichung II verbunden werden, so dass die beiden für z und w gesuchten Functionen im Allgemeinen vier Gleichungen zu genügen haben, wenn die erste Form des δU zu einem Resultate führen soll.

B) Will man die zweite Form des δU untersuchen, so kann man auf zweierlei Weise verfahren:

Digitized by Google

1) Man eliminire zuerst die unmittelbaren Stücke δw, $\frac{d_x\delta w}{dx}$ und $\frac{d_y\delta w}{dy}$, und forme hierauf um.

2) Man forme zuerst um, und eliminire dann das mittelbare Stück δw.

Jedesmal wird, weil $Q = -\frac{d_zF}{dz} : \frac{d_wF}{dw}$ ist, man bekommen

$$\text{XVII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha\int_b^\beta \Bigg\{\Bigg[\left(\frac{d_zV}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)}{dy}\right) \times \frac{d_wF}{dw}$$

$$- \left(\frac{d_wV}{dw} - \frac{d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)}{dy}\right) \times \frac{d_zF}{dz}\Bigg] : \frac{d_wF}{dw}\Bigg\} \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Bigg\{\left(\left(\frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d_wF}{dw} - \frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) : \frac{d_wF}{dw}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y}$$

$$- \left(\left(\frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d_wF}{dw} - \frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) : \frac{d_wF}{dw}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\Bigg\} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Bigg\{\left(\left(\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d_wF}{dw} - \frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) : \frac{d_wF}{dw}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta}$$

$$- \left(\left(\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d_wF}{dw} - \frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) : \frac{d_wF}{dw}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\Bigg\} \cdot dx$$

Das weitere Verfahren ist dem in den §§. 247 und 248 (Band I. Seite 314 – 316) ganz analog.

Noch beachte man Folgendes: Wenn man zuerst umformt, und hierauf die mittelbaren Stücke δw und $\delta^2 w$ eliminirt; so werden bei Herstellung des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes alle jene Nachtheile wieder erscheinen, welche bereits (Band I. Seite 316) angezeigt und erledigt sind.

Dritte Auflösung.

Diese besteht darin, dass man zwar wieder vorerst mutirt, aber hierauf Multiplicatoren anwendet, um die mittelbaren Stücke zu eliminiren.

Man mutire Gleichung II, so gibt sich

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d_zF}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_wF}{dw} \cdot \delta w = 0$$

Diese Mutationsgleichung ist sowohl nach x als auch nach y identisch.

Differentiirt man sie zuerst nach allem x, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad \frac{d_x\left(\frac{d_zF}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{d_x\delta z}{dx} + \frac{d_x\left(\frac{d_wF}{dw}\right)}{dx} \cdot \delta w + \frac{d_wF}{dw} \cdot \frac{d_x\delta w}{dx} = 0$$

Differentiirt man Gleichung XVIII auch nach allem y, so bekommt man

$$\text{XX)}\quad \frac{d_y\left(\frac{d_zF}{dz}\right)}{dy} \cdot \delta z + \frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} + \frac{d_y\left(\frac{d_wF}{dw}\right)}{dy} \cdot \delta w + \frac{d_wF}{dw} \cdot \frac{d_y\delta w}{dy} = 0$$

A) Will man die erste Form des δU untersuchen, so multiplicire man die Gleichungen XVIII, XIX und XX bezüglich mit den drei (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutabeln Functionen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, und addire diese drei Produkte zu Gleichung XVI unter das Integralzeichen.

Verfahrt man dann nach Analogie des §. 249, so wird sich nicht nur ergeben, ob die erste Form des δU zu einem Resultate führt, sondern auch, was $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ für Functionen von x und y sind.

Digitized by Google

B) Will man die zweite Form des δU untersuchen, so kann man wieder auf zweierlei Weise verfahren.

Erstens. Man multiplicire Gleichung XVIII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutabeln Function L von x und y, addire dieses Produkt zu XVI unter das Integralzeichen, und forme hierauf um. Das Weitere nach Analogie des §. 250. Hier werden aber bei Herstellung des für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruckes alle jene Nachtheile wieder erscheinen, welche bereits (Bd. I. Seite 318 in den vier untersten Zeilen) angezeigt, und auch (Bd. I. Seite 316) erledigt sind.

Zweitens. Der Calcul gewinnt die meiste Ebenmässigkeit, und der für $\delta^2 U$ herzustellende Ausdruck bekommt ohneweiters die richtige Form, wenn man die Gleichungen XIX und XX addirt, diese Summe mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutabeln Function K von x und y multiplicirt, und hierauf dieses Product unter das Integralzeichen zu Gleichung XVI addirt. Formt man dann um, so gibt sich

$$\text{XXI)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big\{ \Big[\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)}{dy} - \left(\frac{d_x K}{dx} + \frac{d_y K}{dy}\right) \cdot \frac{d_z F}{dz}\Big] \cdot \delta z$$

$$+ \Big[\frac{d_w V}{dw} - \frac{d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)}{dy} - \left(\frac{d_x K}{dx} + \frac{d_y K}{dy}\right) \cdot \frac{d_w F}{dw}\Big] \cdot \delta w \Big\} \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Big[\left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}$$

$$+ \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta w_{\alpha,y} - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{a,y} \cdot \delta w_{a,y}\Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[\left(\frac{d_q V}{dq} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}$$

$$+ \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{x,\beta} \cdot \delta w_{x,\beta} - \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\Big] \cdot dx$$

Soll nun das δw unter dem doppelten Integralzeichen wegfallen, so denke man sich unter K eine solche Function von x und y, dass folgende nach x und y identische Gleichung

$$\text{XXII)}\quad \frac{d_w V}{dw} - \frac{d_x\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}}\right)}{dy} - \left(\frac{d_x K}{dx} + \frac{d_y K}{dy}\right) \cdot \frac{d_w F}{dw} = 0$$

stattfindet. Soll aber auch das δw unter den beiden einfachen Integralzeichen wegfallen, so müssen folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$\text{XXIII)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad \text{XXIV)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{a,y} = 0$$

und folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$\text{XXV)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{x,\beta} = 0, \quad \text{XXVI)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{q} V}{d\mathfrak{q}} + K \cdot \frac{d_w F}{dw}\right)_{x,b} = 0$$

stattfinden. Gleichung XXI reducirt sich also auf

$$\text{XXVII)}\quad \delta U =$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right)}{dx} - \frac{d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)}{dy} - \left(\frac{d_x K}{dx} + \frac{d_y K}{dy}\right) \cdot \frac{d_z F}{dz}\Big] \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Big[\left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - \left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}\Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[\left(\frac{d_q V}{dq} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - \left(\frac{d_q V}{dq} + K \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b}\Big] \cdot dx$$

Digitized by Google

Gleichung XXII ist eine Partialdifferentialgleichung der zweiten Ordnung. Integrirt man sie, so gibt sich eine Urgleichung mit zwei willkürlichen Functionen, zu deren Bestimmung die vier Gleichungen XXIII—XXVI benützt werden müssen. Dann sondere man K ab, setze die für K, $\frac{d_x K}{dx}$ und $\frac{d_y K}{dy}$ sich ergebenden Ausdrücke in XXVII ein, und behandle dieselbe weiter, wie bekannt.

Diesen Weitläufigkeiten braucht man sich aber nicht zu unterziehen. Man sondere die fünf Stücke

$$\left(\frac{d_x K}{dx} + \frac{d_y K}{dy}\right), \quad K_{\alpha, y}, \quad K_{a, y}, \quad K_{x, \beta}, \quad K_{x, b}$$

ohne sich zu bekümmern, was sie sein mögen, ohneweiters aus den Gleichungen XXII bis XXVI ab, und substituire die sich ergebenden Ausdrücke in XXVII; so bekommt man wieder Gleichung XVII. Und so fort.

Will man dann den für $\delta^2 U$ sich ergebenden Ausdruck herstellen, so differentiire man Gleichung V zuerst nach allem x und dann nach allem y. Dadurch bekommt man zwei Differentialgleichungen, welche beide nach x und nach y identisch sind. Man addire beide, multiplicire diese Summe mit der bereits angewendeten Function K, und berücksichtige, nach gehöriger Umformung, die fünf Gleichungen XXII — XXVI. Dadurch ergibt sich gradezu die richtige Form des für $\delta^2 U$ herzustellenden Ausdruckes.

Die zweite Methode, nach welcher die Bedingungsgleichung vor Allem noch differentiirt werden muss, hat sehr bedeutende Vortheile. Man vergleiche desshalb Bd. I, Seite 321, Anmerkung, und besonders Seite 327.

Aufgabe 275.

Es sei V ein reeller, mit den Elementen x, y, z, w, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_x w}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_y w}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x^2 w}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_x d_y w}{dx.dy}$, ... gebildeter Ausdruck; und man sucht für z und w solche Functionen der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

wo b und β keine Functionen von x sind, ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für z und w gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass noch einer Differentialgleichung

$$\text{II)}\quad F\left(x, y, z, w, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_x w}{dx}, \frac{d_y z}{dy}, \frac{d_y w}{dy}, \frac{d_x^2 z}{dx^2}, \ldots\ldots\right) = 0$$

identisch genügt wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist bereits (im Anfange der 249sten Untersuchung) erläutert.

Die Aufgabe wird nach Analogie der (in §. 256 stehenden) 61sten Untersuchung durchgeführt.

Vieles, was auf hiesige Aufgabe analoge Anwendung zulässt, befindet sich aber auch schon in der (in §§. 251 — 255 stehenden) 60sten Untersuchung.

Folgende zwei Auflösungen mögen hier kurz angedeutet werden.

Erste Auflösung.

Man integrire Gleichung II, so bekommt man eine Urgleichung mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Functionen. Das weitere Verfahren ist dann, wie in der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe; nur ist noch zu bemerken, dass die bei Gleichung II

Digitized by Google

eingegangenen willkürlichen Functionen nicht durch die Gränzengleichung bestimmt werden können, sondern nur durch Bedingungen, welche, wenn sie sich auch auf die Gränzen beziehen, doch mit der Gränzengleichung selbst nichts zu thun haben.

Zweite Auflösung.

Man eliminire die mittelbaren Mutationen auf indirectem Wege mittelst Multiplicatoren, indem man sich soviele Gleichungen bildet, dass man für z und w dieselben Functionen bekommt, wie bei der vorigen directen Elimination.

Wenn man namentlich nur die zweite Form des δU untersuchen will; so ist es gar nicht nöthig, die Bedingungsgleichung II zu integriren. Ja man wird sie öfters sogar noch differentiiren, und dann mehrere der successiven Differentialgleichungen addiren müssen, ehe es vortheilhaft ist, einen Multiplicator anzuwenden. (Man vergleiche in dieser Hinsicht die dritte Auflösung der vorigen Aufgabe).

Im Allgemeinen gilt folgende Regel:

„Die mit einem Multiplicator versehene zweite Form des δU ist dann am vor-„theilhaftesten eingerichtet, wenn man dem Multiplicator soviele allgemeine und „besondere Eigenschaften beilegen kann, dass dadurch alle Mutationen des „mittelbar mutablen Elementes, sowohl die, welche sich unter dem doppelten „und unter den beiden einfachen Integralzeichen, als auch die, welche sich „ausserhalb aller Integralzeichen befinden, wegfallen."

Es ist aber jedesmal möglich, die zweite Form des δU auf besagte Weise einzurichten; denn wenn dazu noch irgend eine Vorkehrung nöthig sein sollte, so kann sie ja nur darin bestehen, dass man die Bedingungsgleichung vorerst gehörig differentiirt, eine Operation, welcher bekanntlich kein Hinderniss im Wege steht.

Die vorhin mitgetheilte Regel ist noch von Niemand ausgesprochen worden. Sie ist aber sehr wichtig; und vernachlässigt man sie, so wird man gewöhnlich in ein Gedränge gerathen, aus dem man sich nicht helfen kann.

Bis jetzt war der Ausdruck, welcher ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden sollte, gradezu in gesonderter Form gegeben. Nun soll auch eine Aufgabe folgen, wo dieser Ausdruck in ungesonderter Form mittelst einer Gleichung gegeben ist.

Aufgabe 276.

Es sei die Gleichung

$$\text{I)}\quad \left(\frac{d_xz}{dx}\right)^2 - 10\cdot\frac{d_xz}{dx}\cdot\frac{d_yz}{dy} + 34\cdot\left(\frac{d_yz}{dy}\right)^2 + g\cdot\frac{d_xd_yU}{dx.dy} = 0$$

gegeben; und man sucht für z eine solche reelle Function von x und y, dass, während U_{ab}, $U_{a,\beta}$ und $U_{\alpha,b}$ bezüglich die bestimmt vorgeschriebenen Werthe A, B und C haben, $U_{\alpha,\beta}$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die Gleichung I ist eine identische, d. h. gilt bei jedem Werthe des x und des y. Multiplicirt man dieselbe mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x und y, so ist auch das Product

$$\text{II)}\quad \mathfrak{N}\cdot\left[\left(\frac{d_xz}{dx}\right)^2 - 10\cdot\frac{d_xz}{dx}\cdot\frac{d_yz}{dy} + 34\cdot\left(\frac{d_yz}{dy}\right)^2 + g\cdot\frac{d_xd_yU}{dx.dy}\right] = 0$$

noch eine nach x und y identische Gleichung. Desshalb ist auch noch

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha\int_b^\beta \mathfrak{N}\cdot\left[\left(\frac{d_xz}{dx}\right)^2 - 10\cdot\frac{d_xz}{dx}\cdot\frac{d_yz}{dy} + 34\cdot\left(\frac{d_yz}{dy}\right)^2 + g\cdot\frac{d_xd_yU}{dx.dy}\right]\cdot dy\cdot dx = 0$$

Man mutire, so bekommt man zunächst

Digitized by Google

$$\text{IV)} \int_a^\alpha \int_b^\beta \left[(2\mathfrak{R} \cdot p - 10\mathfrak{R} \cdot q) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (-10\mathfrak{R} \cdot p + 68\mathfrak{R} \cdot q) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + g \cdot \mathfrak{R} \cdot \frac{d_x d_y \delta U}{dx \cdot dy}\right] \cdot dy \cdot dx = 0$$

und wenn man umformt, so bekommt man

$$\begin{aligned}
\text{V)}\quad & g \cdot \mathfrak{R}_{\alpha,\beta} \cdot \delta U_{\alpha,\beta} - g \cdot \mathfrak{R}_{\alpha,b} \cdot \delta U_{\alpha,b} - g \cdot \mathfrak{R}_{a,\beta} \cdot \delta U_{a,\beta} + g \cdot \mathfrak{R}_{a,b} \cdot \delta U_{a,b} \\
& + \int_b^\beta \Big[(2\mathfrak{R}p - 10\mathfrak{R}q)_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} - (2\mathfrak{R}p - 10\mathfrak{R}q)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \\
& \qquad - \left(\frac{d_y(g \cdot \mathfrak{R})}{dy}\right)_{\alpha,y} \cdot \delta U_{\alpha,y} + \left(\frac{d_y(g \cdot \mathfrak{R})}{dy}\right)_{a,y} \cdot \delta U_{a,y} \Big] \cdot dy \\
& + \int_a^\alpha \Big[(-10\mathfrak{R}p + 68\mathfrak{R}q)_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} - (-10\mathfrak{R}p + 68\mathfrak{R}q)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} \\
& \qquad - \left(\frac{d_x(g \cdot \mathfrak{R})}{dx}\right)_{x,\beta} \cdot \delta U_{x,\beta} + \left(\frac{d_x(g \cdot \mathfrak{R})}{dx}\right)_{x,b} \cdot \delta U_{x,b} \Big] \cdot dx \\
& + \int_a^\alpha \int_b^\beta \Big[\left(- \frac{d_x(2\mathfrak{R}p - 10\mathfrak{R}q)}{dx} - \frac{d_y(-10\mathfrak{R}p + 68\mathfrak{R}q)}{dy} \right) \cdot \delta z \\
& \qquad + \frac{d_x d_y (g \cdot \mathfrak{R})}{dx \cdot dy} \cdot \delta U \Big] \cdot dy \cdot dx = 0
\end{aligned}$$

Um nun das mittelbare δU unter dem doppelten Integralzeichen wegzubringen, denke man sich unter $\mathfrak{R}$ eine solche Function von x und y, dass die Partialdifferentialgleichung

$$\text{VI)} \quad \frac{d_x d_y (g \cdot \mathfrak{R})}{dx \cdot dy} = 0$$

stattfindet. Weil g constant ist, so kann man auch setzen

$$\frac{d_x d_y \mathfrak{R}}{dx . dy} = 0$$

Integrirt man, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \mathfrak{R} = f(x) + F(y)$$

Damit das mittelbare δU auch unter den beiden einfachen Integralzeichen wegfalle, müssen noch folgende vier totale Differentialgleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d_y(g \cdot \mathfrak{R})}{dy}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad \left(\frac{d_y(g \cdot \mathfrak{R})}{dy}\right)_{a,y} = 0,$$

$$\left(\frac{d_x(g \cdot \mathfrak{R})}{dx}\right)_{x,\beta} = 0, \quad \left(\frac{d_x(g \cdot \mathfrak{R})}{dx}\right)_{x,b} = 0,$$

Die zwei ersten dieser Gleichungen gehen über in

$$\text{VIII)} \quad \frac{dF(y)}{dy} = 0$$

Die zwei andern aber gehen über in

$$\text{IX)} \quad \frac{df(x)}{dx} = 0$$

Daraus folgt, dass sowohl $F(y)$ als auch $f(x)$ constant sind; und somit ist auch $\mathfrak{R}$ constant, d. h. Gleichung VII geht über in

$$\text{X)} \quad \mathfrak{R} = k$$

Weil $U_{a,b} = A$, $U_{a,\beta} = B$ und $U_{\alpha,b} = C$ bestimmt gegebene Werthe haben sollen, so ist $\delta U_{a,b} = 0$, $\delta U_{a,\beta} = 0$, und $\delta U_{\alpha,b} = 0$; und wenn man in Gleichung V die angezeigten Differentiationen ausführt, das gemeinschaftliche constante k überall wegdividirt, und dann $\delta U_{\alpha,\beta}$ absondert, so bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XI)}\quad \delta U_{\alpha,\beta} = -\frac{2}{g}\cdot\int_b^\beta [(p - 5q)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y} - (p - 5q)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}]\cdot dy$$

$$-\frac{2}{g}\cdot\int_a^\alpha [(-5p + 34q)_{x,\beta}\cdot\delta z_{x,\beta} - (-5p + 34q)_{x,b}\cdot\delta z_{x,b}]\cdot dx$$

$$-\frac{2}{g}\cdot\int_a^\alpha\int_b^\beta (-r + 10\cdot s - 34\cdot t)\cdot\delta z\cdot dy\cdot dx$$

Man hat daher die Hauptgleichung

$$\text{XII)}\quad r - 10\cdot s + 34\cdot t = 0$$

Daraus folgt (man sehe Aufgabe 255) gradezu

$$\text{XIII)}\quad z = \xi\big(y + x\cdot(5 + 3\cdot\sqrt{-1})\big) + \chi\big(y + x\cdot(5 - 3\cdot\sqrt{-1})\big)$$

Diese zwei willkürlichen Functionen muss man durch solche Bedingungen bestimmen, dass der Gränzengleichung

$$\text{XIV)}\quad \int_b^\beta [(p - 5q)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y} - (p - 5q)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha [(-5p + 34q)_{x,\beta}\cdot\delta z_{x,\beta} - (-5p + 34q)_{x,b}\cdot\delta z_{x,b}]\cdot dx = 0$$

genügt wird.

Hat man aber für z eine bestimmte Function hergestellt, so führe man sie in Gleichung I ein. Integrirt man dann, so ergibt sich für U ein Ausdruck, welcher (eben weil in Gleichung I nur $\frac{d_x d_y U}{dx.dy}$ vorkommt) noch eine willkürliche Function von x und eine willkürliche Function von y in sich aufnimmt, so dass man z. B.

$$\text{XV)}\quad U = F(x,\ y,\ \pi'(x),\ \pi''(y))$$

bekommt, wo $\pi'(x)$ eine ganz willkürliche Function von x, und $\pi''(y)$ eine ganz willkürliche Function von y, dagegen $F(x,\ y,\ \pi'(x),\ \pi''(y))$ eine ganz bestimmte Function der vier Stücke x, y, $\pi'(x)$, $\pi''(y)$ vorstellt. Da man aber nur noch die drei Gleichungen $U_{a,b} = A$, $U_{a,\beta} = B$ und $U_{\alpha,b} = C$ hat, welche bezüglich in

$$\text{XVI)}\quad F(a,\ b,\ \pi'(a),\ \pi''(b)) = A$$

$$\text{XVII)}\quad F(a,\ \beta,\ \pi'(a),\ \pi''(\beta)) = B$$

$$\text{XVIII)}\quad F(\alpha,\ b,\ \pi'(\alpha),\ \pi''(b)) = C$$

übergehen; so erkennt man, dass sowohl die Function $\pi'(x)$ als auch die Function $\pi''(y)$ ganz unbestimmt, d. h. ganz beliebig bleiben, nur müssen in beiden zusammen wenigstens drei willkürliche Constanten enthalten sein, die sich noch so bestimmen lassen, dass den drei Gleichungen XVI — XVIII genügt wird.

Um zu untersuchen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, mutire man Gleichung IV noch einmal, forme dann um, und verfahre überhaupt nach Analogie der 204[ten] Aufgabe.

Bis jetzt wurden nur solche Aufgaben gestellt, wo die vier Gränzelemente a, α, b, β alle constant waren; nun mögen noch einige Aufgaben folgen, wo dieses nicht der Fall ist.

Aufgabe 277.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht z als solche Function der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und y, dass folgendes Integral

Digitized by Google

$$U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$$

wo $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ bestimmt gegebene Functionen von x sind, ein **Maximum-stand oder Minimum-stand** wird.

Hier soll U als Function von a und α dargestellt werden; und weil die Werthe von a und α nicht gesucht zu werden brauchen, sondern entweder bestimmt gegeben oder beliebig sind, also auch nicht mit ihren nächstanliegenden Nachbarwerthen verglichen werden müssen; ebendesshalb kann hier im Allgemeinen nur von einem Maximum-stande oder Minimum-stande und nicht von einem Maximum-werthe oder Minimum-werthe die Rede sein. Die Werthe von a und α sind also als constant zu betrachten, jedoch mit steter Rücksicht, das $\alpha > a$, d. h. dass die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist.

Man mutire, so bekommt man vorerst

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(N \cdot \delta z + P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Hier steht N, P, Q bezüglich statt $\frac{d_z V}{dz}$, $\frac{d_p V}{dp}$, $\frac{d_q V}{dq}$. Auch beachte man durch die ganze Aufgabe, dass es, eben weil $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ Functionen von x sind, nicht gleichgiltig ist, ob man zuerst nach y und dann nach x, oder ob man zuerst nach x und dann nach y integrirt; sondern man muss zuerst nach y integriren, dann das sich ergebende Integral von $y = \pi(x)$ bis $y = \zeta(x)$ erstrecken, und erst hierauf darf man nach x integriren. Man forme um, so bekommt man zunächst

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(N - \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x (P \cdot \delta z)}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_y (Q \cdot \delta z)}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

Hier bekommt man ohneweiters

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_y (Q \cdot \delta z)}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \left[(Q \cdot \delta z)_{x,\zeta(x)} - (Q \cdot \delta z)_{x,\pi(x)}\right] \cdot dx$$

Das unten angehängte x bedeutet, dass x unverändert geblieben; dagegen das unten angehängte $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ bedeutet, dass man bezüglich $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ an die Stelle des y gesetzt habe. Aber eben weil nicht zuerst nach x integrirt werden darf, so muss der Ausdruck

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x (P \cdot \delta z)}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx$$

auf andere Weise behandelt werden. Man beachte zu diesem Ende folgende fünf Punkte:

1) z ist eine Function von x und y, also sind auch p und q Functionen von x und y.

2) Der Ausdruck P enthält die Elemente x und y sowohl unmittelbar als auch mittelbar in z, in p und in q.

3) δz ist eine (und zwar ganz beliebige) Function von x und y.

4) Durch folgendes Zeichen, $\frac{d_x (P \cdot \delta z)}{dx}$, wo im Zähler ein x unten an d angehängt ist, wird ein partieller Differentialquotient dargestellt; und wegen des doppelten Bruchstriches soll man (nach §. 4) diesen partiellen Differentialquotienten nach allem (sowohl unmittelbar als auch mittelbar in dem Ausdrucke $P \cdot \delta z$ enthaltenen) x nehmen, dabei aber y nicht als Function von x betrachten.

5) Dagegen durch folgendes Zeichen $\frac{d[\int P \cdot \delta z \cdot dy]}{dx}$, wo im Zähler kein x unten an d angehängt ist, wird ein totaler Differentialquotient dargestellt; und wegen des

Digitized by Google

doppelten Bruchstriches soll man (nach §. 3) diesen totalen Differentialquotienten nach allem (sowohl unmittelbar als auch mittelbar in dem Ausdrucke $\int P \cdot \delta z \cdot dy$ enthaltenen) x nehmen, und dabei auch y als Function von x betrachten.

Sonach ist im Allgemeinen

$$\text{IV)}\quad \frac{d[\int P \cdot \delta z \cdot dy]}{dx} = \int \frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx} \cdot dy + P \cdot \delta z \cdot \frac{dy}{dx}$$

Wenn man jetzt zuerst $\zeta(x)$ und hierauf $\pi(x)$ an die Stelle von y setzt, und dann das zweite Resultat vom ersten subtrahirt; so bekommt man

$$\text{V)}\quad \frac{d\left[\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right]}{dx} = \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx} \cdot dy$$
$$+ (P \cdot \delta z)_{x,\zeta(x)} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx} - (P \cdot \delta z)_{x,\pi(x)} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx}$$

Daraus folgt durch Uebertragen

$$\text{VI)}\quad \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx} \cdot dy = \frac{d\left[\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right]}{dx}$$
$$- P_{x,\zeta(x)} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta(x)} + P_{x,\pi(x)} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi(x)}$$

Es ist also

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)}{dx} \cdot dx$$
$$- \int_a^\alpha \left[P_{x,\zeta(x)} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta(x)} - P_{x,\pi(x)} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi(x)}\right] \cdot dx$$

Der erste Theilsatz rechts des Gleichheitszeichens lässt sich gradezu integriren; und wenn man dieses thut, so nimmt letztere Gleichung folgende Form an:

$$\text{VII)}\quad \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x(P \cdot \delta z)}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx = \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)_\alpha - \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)_a$$
$$- \int_a^\alpha \left[P_{x,\zeta(x)} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta(x)} - P_{x,\pi(x)} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi(x)}\right] \cdot dx$$

Da wo nur nach y integrirt werden soll, ist es einerlei, ob α an die Stelle des ausserhalb y vorkommenden x erst nach der Integration oder schon vor derselben gesetzt wird. Es ist also

$$\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)_\alpha = \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy\right)_\alpha$$

Betrachtet man aber die rechte Seite dieser Gleichung, so erkennt man Folgendes:

Man soll den von x befreiten Ausdruck $P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y}$ nach y integriren, dieses Integral von $y = \pi(x)$ bis $y = \zeta(x)$ erstrecken, und dann α an die Stelle des hierdurch eingehenden x setzen.

Ganz das Nemliche wird erreicht, wenn man diesen von x befreiten Ausdruck nach y integrirt, und dann das Integral von $y = \pi(\alpha)$ bis $y = \zeta(\alpha)$ erstreckt. Sonach hat man

$$\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)_\alpha = \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy$$

Auf ganz gleiche Weise bekommt man

Digitized by Google

$$\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} P \cdot \delta z \cdot dy\right)_a = \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

Setzt man von jetzt an zur Abkürzung π und ζ bezüglich statt $\pi(x)$ und $\zeta(x)$, so geht Gleichung II über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(N - \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi}\right] \cdot dx$$

Mutirt man Gleichung I noch einmal, und formt dann um; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left[\left(N - \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta^2 z + \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz . dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}\right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{d_z d_q V}{dz . dq} \cdot \delta z \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp . dq} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right] . dy . dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\zeta} - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\pi}\right] \cdot dx$$

Diese beiden Ausdrücke ziehen sich auf die Gleichungen VII und VIII der 251sten Aufgabe zurück, wenn $\zeta(x) = \beta$ und $\pi(x) = b$, d. h. wenn $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ constant sind; denn dabei ist $\frac{d\zeta}{dx} = 0$ und $\frac{d\pi}{dx} = 0$, und ebenso ist $\zeta(\alpha) = \zeta(a) = \beta$ und $\pi(\alpha) = \pi(a) = b$.

Die 251ste Aufgabe ist also ein specieller Fall der hiesigen.

Erstens. Untersuchung der ersten (in I aufgestellten) Form des δU. Hieran erkennt man, dass man für z dieselbe Function von x und y bekommt, wie wenn die nach y auszuführende Integration zwischen den constanten Gränzen von $y = b$ bis $y = \beta$ genommen wird. (Man vergleiche die in der 251sten Aufgabe befindliche Untersuchung der ersten Form des δU).

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in VIII aufgestellten) Form des δU. Hier bekommt man als Hauptgleichung zuerst folgende:

$$\text{X)}\quad N - \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy} = 0$$

Hierauf schaue man wieder auf den in VIII mit dem doppelten Integralzeichen versehenen Theilsatz zurück, und sehe zu, ob man dem zu δz gehörigen Factor nicht auch die Form $\frac{3}{0}$ beilegen kann.

Jedenfalls erkennt man, dass man auch jetzt dieselbe Function z von x und y bekommt, wie wenn die nach y auszuführende Integration zwischen den constanten Gränzen von $y = b$ bis $y = \beta$ genommen wird. (Man vergleiche die in der 251sten Aufgabe befindliche Untersuchung der zweiten Form des δU).

Die Gränzengleichung hat hier eine eigenthümliche Form, welche jedoch keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, wie in der nächsten Aufgabe gezeigt werden wird.

Auch die Behandlung des Prüfungsmittels (Gleichung IX) bietet keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Digitized by Google

Aufgabe 278.

Es ist ein auf der Coordinatenebene XY senkrecht stehender circulärer Cylinder gegeben mit der Gleichung

$$\text{I)}\quad (m - y)^2 + (n - x)^2 = r^2$$

Man sucht eine Fläche, welche von diesem Cylinder durchdrungen wird, und deren von demselben begränzte Ausdehnung kleiner ist, als die von dem nemlichen Cylinder begränzte Ausdehnung jeder andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarfläche.

Die Aufgabe verlangt also: Es soll

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden.

In wieferne hier von einem Minimum-stande die Rede sein kann, ist bereits (im Anfange der vorigen Aufgabe) erläutert. Aus Gleichung I folgt

$$y = m \pm \sqrt{r^2 - (n - x)^2}$$

Sonach ist

$$\text{III)}\quad \pi(x) = m - \sqrt{r^2 - (n - x)^2}$$

und

$$\text{IV)}\quad \zeta(x) = m + \sqrt{r^2 - (n - x)^2}$$

wo die Radicale nur ihre eindeutige positive Bedeutung haben. Die Gränzwerthe des x sind da, wo $y = m$; und man bekommt für dieselben folgenden zweiförmigen Ausdruck:

$$\text{V)}\quad x = n \pm r$$

Der kleinste Werth des x ist also

$$\text{VI)}\quad a = n - r$$

und der grösste Werth des x ist

$$\text{VII)}\quad \alpha = n + r$$

Man mutire Gleichung II, forme um, und setze, so oft es bequem ist, π und ζ bezüglich statt $\pi(x)$ und $\zeta(x)$; so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(-\frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y P}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi}\right] \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

Hier ist zur Abkürzung P und Q bezüglich statt $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ und $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ gesetzt worden. Man hat nun die Hauptgleichung

$$\text{IX)}\quad (1 + q^2) \cdot r - 2 \cdot p \cdot q \cdot s + (1 + p^2) \cdot t = 0$$

welche dieselbe ist, wie Gleichung X der 261sten Aufgabe, wo die nach y auszuführende Integration zwischen den constanten Gränzen $y = b$ bis $y = \beta$ erstreckt wurde.

Jede Fläche, welche hier in Betracht kommen darf, muss vorerst der Gleichung IX genügen.

Erster Fall. Es seien keine Gränzbedingungen vorgeschrieben, sondern die gesuchte Fläche soll aus allen möglichen herausgewählt werden. Hier wird die Gränzengleichung nur erfüllt, wenn folgende zwei nach y identische Gleichungen

Digitized by Google

$$1)\ P_{\alpha,y} = 0, \quad \text{und} \quad 2)\ P_{a,y} = 0$$

und wenn folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$3)\ Q_{x,\xi} - P_{x,\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad 4)\ Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx} = 0$$

stattfinden. Diese vier Gleichungen reduciren sich aber im hiesigen Gränzfalle auf folgende vier einfachere:

$$5)\ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad 6)\ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0$$

$$7)\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\xi} - \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0, \quad 8)\ \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} - \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx} = 0$$

Die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$ und $\frac{d\varkappa}{dx}$ werden aus den Gleichungen III und IV entnommen.

Man muss also eine solche Function z von x und y aufsuchen, welche den fünf Gleichungen (IX, 5, 6, 7, 8) zugleich genügt. Eine solche Function ist z. B.

$$X)\ z = A$$

und dadurch ist die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene dargestellt, welche in der That die Eigenschaft hat, dass ihr von dem gegebenen Cylinder eingeschlossenes Stück kleiner ist, als das von demselben Cylinder eingeschlossene Stück jeder andern Fläche. Wie weit aber die durch Gleichung X dargestellte Ebene von der Coordinatenebene XY entfernt sei, das ist ganz gleichgiltig; ihr von dem gegebenen Cylinder begränztes Stück bleibt immer gleich gross. Der Constante A kann dadurch bestimmt werden, dass man die gefundene Ebene zwingt, durch einen bestimmten Punkt zu gehen.

Für das Prüfungsmittel steht in Gleichung IX der vorigen Aufgabe die allgemeine Formel.

Zweiter Fall. Die Curve, nach welcher der gegebene Cylinder von der gesuchten Fläche und allen ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen durchdrungen werden soll, sei bestimmt vorgeschrieben, und sei erzeugt durch den ursprünglich gegebenen circulären Cylinder mit der Gleichung

$$XI)\ (m - y)^2 + (n - x)^2 = r^2$$

und durch einen auf der Coordinatenebene YZ senkrecht stehenden parabolischen Cylinder mit der Gleichung

$$XII)\ h \cdot (z - k) = y^2$$

Da alle hier in Betracht zu ziehenden Flächen durch die zu den Gleichungen XI und XII gehörige Curve hindurchgehen müssen; so finden im Umfange dieser Curve zwischen der gesuchten und den übrigen in Betracht zu ziehenden Flächen folgende zwei Gleichungen statt:

$$XIII)\ z_{x,\xi} = z_{x,\xi} + \varkappa \cdot \delta z_{x,\xi} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{x,\xi} + \ldots\ldots$$

und

$$XIV)\ z_{x,\varkappa} = z_{x,\varkappa} + \varkappa \cdot \delta z_{x,\varkappa} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{x,\varkappa} + \ldots\ldots$$

Diese beiden Gleichungen sollen bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten, sie sind also nur möglich, wenn bei jedem Werthe des x folgende identische Gleichungen stattfinden:

$$\delta z_{x,\xi} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\xi} = 0, \quad \delta^3 z_{x,\xi} = 0, \quad \text{etc.}$$

und

$$\delta z_{x,\varkappa} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\varkappa} = 0, \quad \delta^3 z_{x,\varkappa} = 0, \quad \text{etc.}$$

Digitized by Google

Damit aber die Gränzengleichung vollkommen erfüllt werde, müssen noch die beiden nach y identischen Gleichungen $P_{\alpha,y} = 0$ und $P_{a,y} = 0$ stattfinden, welche sich jetzt auf folgende einfachere reduciren:

$$9)\ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0, \quad \text{und} \quad 10)\ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0$$

Diese beiden Gleichungen, verbunden mit XI und XII, müssen bei Bestimmung der zwei willkürlichen Functionen, welche durch Integration der Gleichung IX eingegangen sind, mitbenützt werden.

Für das Prüfungsmittel steht in Gleichung IX der vorigen Aufgabe die allgemeine Formel.

Dritter Fall. Es seien in den Endpunkten der Abscissen a und α senkrechte Ebenen errichtet. In der ersten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$11)\ x = a, \quad \text{und} \quad 12)\ z = A \cdot y + B \cdot y^2$$

in der zweiten dieser Ebenen liege eine Curve mit den beiden Gleichungen

$$13)\ x = \alpha, \quad \text{und} \quad 14)\ z = C \cdot y^2 + E \cdot y^3$$

Es soll die gesuchte Fläche durch diese zwei Curven gehen. Dabei ist $\delta z_{a,y} = 0$, $\delta z_{\alpha,y} = 0$, $\delta^2 z_{a,y} = 0$, $\delta^2 z_{\alpha,y} = 0$, etc.

Es soll die gesuchte Fläche auch durch die zu den beiden Gleichungen XI und XII gehörige Curve gehen. Dabei ist $\delta z_{x,\zeta} = 0$, $\delta z_{x,\pi} = 0$, $\delta^2 z_{x,\zeta} = 0$, $\delta^2 z_{x,\pi} = 0$, etc.

Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst hinweg, und die vier Gleichungen (12, 14, XI, XII) müssen bei Bestimmung der zwei willkürlichen Functionen, welche durch Integration der Gleichung IX eingegangen sind, mitbenützt werden.

Für das Prüfungsmittel steht in Gleichung IX der vorigen Aufgabe die allgemeine Formel.

Andere speciellen Fälle, besonders solche, wo zwischen den Mutationscoefficienten eine Abhängigkeit stattfindet, lassen sich in beliebiger Menge bilden.

Aufgabe 279.

Es ist ein auf der Coordinatenebene XY senkrecht stehender Cylinder gegeben mit der Gleichung

$$\text{I)}\ y^4 + 2 \cdot m^2 \cdot x^2 - 2 \cdot m^2 \cdot y^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + m^4 = 0$$

Man sucht eine Fläche, welche von diesem Cylinder durchdrungen wird, und deren von demselben begränzte Ausdehnung kleiner ist, als die von dem nemlichen Cylinder begränzte Ausdehnung jeder andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarfläche.

Die Aufgabe verlangt also wieder: Es soll

$$\text{II)}\ U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

ein Minimum-stand werden.

In wieferne hier von einem Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange der 277[sten] Aufgabe) erläutert. Aus Gleichung I ergeben sich folgende nach absteigenden Werthen geordnete Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y' &= + \sqrt{m^2 + 2 \cdot x^2} \\ y'' &= + m, \text{ d. h. constant.} \\ y''' &= - m, \text{ d. h. constant.} \\ y'''' &= - \sqrt{m^2 + 2 \cdot x^2} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Wenn nun immer $\zeta(x) > \varkappa(x)$ sein soll, so kann man mit diesen vier Ausdrücken folgende sechs Verbindungen vornehmen:

$$\begin{array}{llll} 1) & \zeta(x) = +\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} & \text{und} & \varkappa(x) = +m \\ 2) & \zeta(x) = +\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} & \text{und} & \varkappa(x) = -m \\ 3) & \zeta(x) = +\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} & \text{und} & \varkappa(x) = -\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} \\ 4) & \zeta(x) = +m & \text{und} & \varkappa(x) = -m \\ 5) & \zeta(x) = +m & \text{und} & \varkappa(x) = -\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} \\ 6) & \zeta(x) = -m & \text{und} & \varkappa(x) = -\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2} \end{array}$$

Will man nur die erste dieser sechs Verbindungen benützen, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \int_m^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right)\cdot dy\cdot dx$$

wo, wie gesagt, $\zeta(x) = +\sqrt{m^2 + 2\cdot x^2}$ ist. Man mutire, und forme um; so bekommt man, weil $\varkappa(x) = +m$ constant, also $\frac{d\varkappa(x)}{dx} = 0$ ist, jetzt folgenden Ausdruck:

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \int_m^{\zeta(x)} \left(-\frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right)\cdot \delta z\cdot dy\cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)\cdot \delta z_{x,\zeta} - Q_{x,m}\cdot \delta z_{x,m}\right]\cdot dx$$

$$+ \int_m^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y}\cdot \delta z_{\alpha,y}\cdot dy - \int_m^{\zeta(a)} P_{a,y}\cdot \delta z_{a,y}\cdot dy$$

Wie mit diesem Ausdrucke weiter zu verfahren ist, ist aus allem Vorhergehenden hinlänglich klar.

Aufgabe 280.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht z als solche Function der beiden Elemente x und y, und zugleich zwei solche Functionen $\zeta(x)$ und $\varkappa(x)$ des einzigen Veränderlichen x, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} V\cdot dy\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein kann, ist schon (im Anfange der 277sten Aufgabe) erläutert. Man nehme an, die für z gesuchte Function von x und y sei gefunden; und es sei

$$\text{II)}\quad z = \varphi(x, y)$$

Die der gesuchten Function z bei jedem Werthe des x und des y stetsfort nächstanliegenden Nachbarfunctionen sind also dargestellt durch

$$\text{III)}\quad z + \Delta z = \varphi(x, y) + \varkappa\cdot\delta\varphi(x, y) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x, y) + \cdots\cdots$$

oder kürzer durch

$$\text{IV)}\quad z + \Delta z = \varphi(x, y) + \varkappa\cdot\delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 z + \cdots\cdots$$

Man nehme ferner an, es seien auch die Functionen $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ gefunden. Dann sind die bei jedem Werthe des x ihnen stetsfort nächstanliegenden Nachbarfunctionen bezüglich dargestellt durch

Digitized by Google

$$\text{V)}\quad \pi(x) + \varkappa \cdot \delta\pi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\pi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\pi(x) + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\text{VI)}\quad \zeta(x) + \varkappa \cdot \delta\zeta(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\zeta(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\zeta(x) + \ldots\ldots\ldots$$

Man beachte nun folgende zwei Punkte:

1) In Gleichung I erleidet im Allgemeinen das z eine unmittelbare reine Mutation, indem es in andere Functionen von x und y übergeht, d. h. indem man an die Stelle des z die Reihe III (oder IV) setzt.

2) Es erleiden aber auch $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ unmittelbare reine Mutationen, indem auch sie in andere Functionen von x übergehen, d. h. indem man auch an die Stelle von $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ bezüglich die Reihen V und VI setzt.

Hieraus folgt, dass das U eine zusammengesetzte reine Mutation erleidet.

Man mutire, und setze, so oft es bequem ist, ζ und π bezüglich statt $\zeta(x)$ und $\pi(x)$; so bekommt man zunächst

$$\text{VII)}\quad {}_{[}\delta_{]}U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

und

$$\text{VIII)}\quad {}_{[}\delta^2 U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta^2 V \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha \Big[V_{x,\zeta} \cdot \delta^2\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta^2\pi$$
$$+ 2 \cdot \delta V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - 2 \cdot \delta V_{x,\pi} \cdot \delta\pi + \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2 - \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \delta\pi^2 \Big] \cdot dx$$

Hier ist bekanntlich

$$\text{IX)}\quad \delta V = \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$\text{X)}\quad \delta^2 V = \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy}$$
$$+ \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2$$

Ferner ist

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{d_y V}{dy} + \frac{d_z V}{dz} \cdot \frac{d_y z}{dy} + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

und wenn man die gewöhnlichen Abkürzungszeichen q, s, t bezüglich statt $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ setzt; so geht letztere Gleichung über in

$$\text{XII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{d_y V}{dy} + \frac{d_z V}{dz} \cdot q + \frac{d_p V}{dp} \cdot s + \frac{d_q V}{dq} \cdot t$$

Wenn man zur Abkürzung P und Q bezüglich statt $\frac{d_p V}{dp}$ und statt $\frac{d_q V}{dq}$ in VI einsetzt, und umformt; so gibt sich

$$\text{XIII)}\quad {}_{[}\delta_{]}U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \Big[V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta}$$
$$- V_{x,\pi} \cdot \delta\pi - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi} \Big] \cdot dx$$
$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

Digitized by Google

Diese Formel enthält alle jene besonderen Fälle in sich, wo von den beiden Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ entweder eine oder gar beide bestimmt vorgeschrieben, oder wo entweder eine oder gar beide als constant vorausgesetzt sind.

1) Ist $\pi(x)$ bestimmt vorgeschrieben, so ist $\delta\pi(x) = 0$, $\delta^2\pi(x) = 0$, etc.; und ist gar noch $\pi(x) = b$, d. h. constant, so ist auch noch $\frac{d\pi(x)}{dx} = 0$, $\frac{d^2\pi(x)}{dx^2} = 0$, etc.; und $\pi(\alpha) = \pi(a) = b$.

2) Ist aber $\zeta(x)$ bestimmt vorgeschrieben, so ist $\delta\zeta(x) = 0$, $\delta^2\zeta(x) = 0$, etc., und ist gar noch $\zeta(x) = \beta$, d. h. constant, so ist auch $\frac{d\zeta(x)}{dx} = 0$, $\frac{d^2\zeta(x)}{dx^2} = 0$, etc., und $\zeta(\alpha) = \zeta(a) = \beta$.

Wie in dergleichen besonderen Fällen die Formel XIII sich reducirt, braucht nicht näher auseinandergesetzt zu werden.

Erstens. Untersuchung der ersten (in VII aufgestellten) Form des ${}_1\delta_1U$. Die Gleichungen, welche sich aus den drei Ausdrücken $\frac{d_zV}{dz}$, $\frac{d_pV}{dp}$ und $\frac{d_qV}{dq}$ ergeben, liefern die für z gesuchte Function von x und y. Die Gleichungen, welche sich aus

$$\int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

ergeben, werden bestimmen, was $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ für Functionen von x, oder ob eine derselben oder alle beide constant sind.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in XIII aufgestellten) Form des ${}_1\delta_1U$. Hier bekommt man zuerst eine Hauptgleichung. Hierauf bekommt man noch andere Gleichungen, welche bei Bestimmung der durch Integration der Hauptgleichung eingegangenen willkürlichen Functionen benützt werden müssen. Zuletzt werden sich noch zwei Gleichungen ergeben, aus welchen ausgemittelt wird, was $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ für Functionen von x, oder ob eine derselben oder alle beiden constant sind.

Die Umformungen, welche man mit der Formel VIII vorzunehmen hat, brauchen, wenn man auf Gleichung IX der 277sten Aufgabe zurückschaut, hier nicht mehr ausgeführt zu werden. Uebrigens werden darüber sowie über die Behandlung der Gränzengleichung die folgenden Aufgaben noch näheren Aufschluss geben.

Aufgabe 281.

Man sucht die kleinste Oberfläche zwischen zwei festen parallelen Ebenen und zwischen zwei gegebenen Flächen.

Einleitung.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe X so nimmt, dass sie auf den beiden parallelen Gränzebenen senkrecht steht. Man nehme dann irgend einen Punkt dieser Axe zum Coordinatenanfang, wobei der ersten Gränzebene die feste Abscisse $x = a$, und der zweiten die feste Abscisse $x = \alpha$ entsprechen mag. Die auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Gleichungen der beiden Gränzflächen mögen dann sein

$$\text{I)}\quad c = f'(x, y), \qquad \text{und} \qquad \text{II)}\quad \gamma = f''(x, y)$$

Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass die Gleichung der noch zu suchenden Fläche ebenfalls auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden muss.

Von der gesuchten Fläche werden die beiden Gränzebenen nach ebenen Curven, dagegen die beiden Gränzflächen nach räumlichen Curven geschnitten.

Die hier vorgelegte Aufgabe sucht eine in einer noch zu ermittelnden Curve, welche in der ersten Gränzfläche liegt, anfangende und in einer noch zu ermittelnden Curve, welche in der zweiten Gränzfläche liegt, aufhörende Fläche, deren Ausdehnung kleiner

Digitized by Google

ist, als bei jeder andern der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden (und entweder durch die noch zu ermittelnden oder durch die ihnen nächstgelegenen, übrigens nur in den Gränzflächen befindlichen Nachbarcurven begränzten) Nachbarfläche der Fall sein kann. Man verlangt also für z eine solche Function der beiden Veränderlichen x und y, und zugleich zwei solche Functionen $\varpi(x)$ und $\zeta(x)$ des einzigen Veränderlichen x, dass der Ausdruck

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\varpi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \int_{\varpi(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

ein Minimum-stand wird.

In wieferne hier von einem Minimum-stande die Rede ist, ist bereits (im Anfange der 277[sten] Aufgabe) erläutert.

Man setze, so oft es bequem ist, ζ und ϖ bezüglich statt $\zeta(x)$ und $\varpi(x)$; und beachte, dass die Aenderungen, welchen man die gesuchten Functionen $\varpi(x)$ und $\zeta(x)$ unterwerfen muss, unmittelbare Mutationen und keine Werthänderungen sind. Dadurch bekommt man (nach voriger Aufgabe) durch zusammengesetztes Mutiren zunächst

$$\text{IV)}\quad {}_{[}\delta_{]}U = \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) - V_{x,\varpi} \cdot \delta\varpi(x)) \cdot dx + \int_a^\alpha \int_{\varpi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dx$$

Wenn man die (in Aufgabe 277 begründete) Umformung ausführt, und die (schon in Aufgabe 261 gebrauchten) Abkürzungszeichen P und Q anwendet; so bekommt man für die zweite Form

$$\text{V)}\quad {}_{[}\delta_{]}U = -\int_a^\alpha \int_{\varpi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_{\varpi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\varpi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. - V_{x,\varpi} \cdot \delta\varpi(x) - \left(Q_{x,\varpi} - P_{x,\varpi} \cdot \frac{d\varpi(x)}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\varpi}\right] \cdot dx$$

Man mutire Gleichung IV abermals, und forme um; so gibt sich

$$\text{VI)}\quad {}_{[}\delta^2_{]}U = \int_a^\alpha \int_{\varpi(x)}^{\zeta(x)} \left\{\left(-\frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta^2 z\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q\,\frac{d_x \delta z}{dx} - p\,\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]\right\} \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_{\varpi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\varpi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta^2\zeta + 2 \cdot \delta V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta + \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2 + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. - V_{x,\varpi} \cdot \delta^2\varpi - 2 \cdot \delta V_{x,\varpi} \cdot \delta\varpi - \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\varpi} \cdot \delta\varpi^2 - \left(Q_{x,\varpi} - P_{x,\varpi} \cdot \frac{d\varpi}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\varpi}\right] \cdot dx$$

Hier in dieser Aufgabe ist

$$\text{VII)}\quad \delta V = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) = P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

und

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + q \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right) = P \cdot \frac{d_x d_y z}{dx.dy} + Q \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

Digitized by Google

Erstens. Untersuchung der ersten (in IV aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. In dieser Form kommen die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten nicht vor. Da aber die Aufgabe vorschreibt, dass die gesuchte Fläche in der einen der gegebenen Gränzflächen anfangen und in der andern enden soll, also die Gränzordinaten der gesuchten Fläche auch zugleich Ordinaten der Gränzflächen sein müssen; so müssen durchaus die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten verglichen werden mit den Aenderungen der zu den gegebenen Gränzflächen gehörigen Ordinaten. Dazu bietet aber die erste Form des ${}_{(}\delta_{)}U$ nicht die Mittel, sie kann also nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in V aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. Diese zerlegt sich zunächst in die Hauptgleichung

$$\text{IX)} \quad \frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy} = 0$$

welche bekanntlich gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{X)} \quad (1 + q^2) \cdot r - 2pq \cdot s + (1 + p^2) \cdot t = 0$$

Ausserdem hat man noch die Gränzengleichung

$$\text{XI)} \quad \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$
$$+ \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} \right.$$
$$\left. - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi(x) - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi} \right] \cdot dx = 0$$

Die Hauptgleichung IX ist dieselbe, wie Gleichung VIII oder X in der 261sten Aufgabe, wo b und β constant sind.

Nun ist man soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Man sucht die absolut kleinste Oberfläche, welche zwischen den zwei parallelen Gränzebenen und den zwei andern gegebenen Flächen möglich ist.

Hier müssen zunächst folgende zwei nach y identische Gleichungen stattfinden:

$$P_{a,y} = 0, \qquad \text{und} \qquad P_{\alpha,y} = 0$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich folgende zwei einfachere:

$$1) \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0, \qquad \text{und} \qquad 2) \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0$$

Die Gränzengleichung XI zieht sich also jetzt zurück auf

$$\text{XII)} \quad \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} \right.$$
$$\left. - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi(x) - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi} \right] \cdot dx = 0$$

Weil die gesuchte Fläche die beiden Gränzflächen schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittscurven folgende zwei Gleichungen

$$3) \quad z_{x,\pi} = f'(x, \pi(x)), \qquad \text{und} \qquad 4) \quad z_{x,\zeta} = f''(x, \zeta(x))$$

stattfinden. Beide sind identische Gleichungen, d. h. gelten bei jedem Werthe des x. Wenn man sie einer Mutation unterwirft, so hat man zu beachten, dass $c = f'(x, y)$ und $\gamma = f''(x, y)$ bestimmt gegebene Ausdrücke sind, welche nur eine einfache (und zwar mittelbare) Mutation erleiden können, dadurch, dass die für $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ zu suchenden Functionen unmittelbar mutirt werden. Dagegen die beiden Ausdrücke $z_{x,\pi}$ und $z_{x,\zeta}$ erleiden zusammengesetzte reine Mutationen, indem sowohl z als auch $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ unmittelbar rein mutirt werden.

Sonach bekommt man aus Gleichung 3

Digitized by Google

$$5)\quad \delta z_{x,\varkappa} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa = \left(\frac{d_y f'(x, y)}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa$$

$$6)\quad \delta^2 z_{x,\varkappa} + 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta^2\varkappa + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa^2$$
$$= \left(\frac{d_y f'(x, y)}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta^2\varkappa + \left(\frac{d_y^2 f'(x, y)}{dy^2}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa^2$$

Die unten angehängten $\varkappa$ zeigen an, dass, sobald man die innerhalb der Klammern angedeuteten Operationen ausgeführt habe, die gesuchte Function $\varkappa(x)$ an die Stelle des y gesetzt werden müsse.

Ganz ebenmässige Mutationsgleichungen bekommt man, wenn man Gleichung 4 mutirt. Da aber muss man, sobald die innerhalb der Klammern angedeuteten Operationen ausgeführt sind, $\zeta(x)$ an die Stelle des y setzen.

Man kann in den Gleichungen 5 und 6 entweder $\delta z_{x,\varkappa}$, $\delta^2 z_{x,\varkappa}$, etc. als abhängig und $\delta\varkappa$, $\delta^2\varkappa$, etc. als unabhängig behandeln, oder umgekehrt. Ebenso kann man entweder $\delta z_{x,\zeta}$, $\delta^2 z_{x,\zeta}$, etc. als abhängig und $\delta\zeta$, $\delta^2\zeta$, etc. als unabhängig behandeln, oder umgekehrt. Der hiesige Gränzfall kann also auf viererlei Weise durchgeführt werden. (Solche vier verschiedene Durchführungen eines und desselben Gränzfalles findet man z. B. auf Seite 247, etc.)

Man führe diesen Gränzfall so durch, dass $\delta\varkappa$, $\delta\zeta$, $\delta^2\varkappa$, $\delta^2\zeta$, etc. als unabhängig behandelt werden.

Man setze zur Abkürzung

$$p', q', r', s', t'$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x f'(x, y)}{dx},\ \frac{d_y f'(x, y)}{dy},\ \frac{d_x^2 f'(x, y)}{dx^2},\ \frac{d_x d_y f'(x, y)}{dx \cdot dy},\ \frac{d_y^2 f'(x, y)}{dy^2}$$

und ebenso

$$p'', q'', r'', s'', t''$$

bezüglich statt

$$\frac{d_x f''(x, y)}{dx},\ \frac{d_y f''(x, y)}{dy},\ \frac{d_x^2 f''(x, y)}{dx^2},\ \frac{d_x d_y f''(x, y)}{dx \cdot dy},\ \frac{d_y^2 f''(x, y)}{dy^2}$$

und sondere $\delta z_{x,\varkappa}$, $\delta z_{x,\zeta}$, $\delta^2 z_{x,\varkappa}$, $\delta^2 z_{x,\zeta}$ ab; so bekommt man

$$7)\quad \delta z_{x,\varkappa} = (q' - q)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa(x)$$

$$8)\quad \delta z_{x,\zeta} = (q'' - q)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x)$$

$$9)\quad \delta^2 z_{x,\varkappa} = (q' - q)_{x,\varkappa} \cdot \delta^2\varkappa + (t' - t)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa$$

$$10)\quad \delta^2 z_{x,\zeta} = (q'' - q)_{x,\zeta} \cdot \delta^2\zeta + (t'' - t)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta$$

Eliminirt man $\delta z_{x,\varkappa}$ und $\delta z_{x,\zeta}$ aus XII, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha \Bigg[\left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{x,\zeta} \cdot \left((1 + p^2 + q \cdot q'')_{x,\zeta} - (p(q'' - q))_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta\zeta$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)_{x,\varkappa} \cdot \left((1 + p^2 + q \cdot q')_{x,\varkappa} - (p(q' - q))_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx}\right) \cdot \delta\varkappa\Bigg] \cdot dx = 0$$

Weil aber $\delta\zeta$ und $\delta\varkappa$ zwei ganz willkürliche und untereinander unabhängige Functionen von x vorstellen; so zerlegt sich letztere Gleichung in folgende zwei

$$11)\quad (1 + p^2 + q \cdot q'')_{x,\zeta} - (p(q'' - q))_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = 0$$

und

Digitized by Google

$$12)\quad (1 + p^2 + q \cdot q')_{x,\pi} - (p(q' - q))_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = 0$$

Diesen zwei Gleichungen sieht man ihre geometrische Bedeutung nicht so leicht an: und desshalb suche man sie zu vereinfachen, was dadurch möglich ist, dass man die totalen Differentialquotienten $\frac{d\pi}{dx}$ und $\frac{d\zeta}{dx}$ entfernt. Weil nemlich, wie schon einmal bemerkt, die Gleichungen 3 und 4 identische sind; so differentiire man sie nach allem x, und man bekommt bezüglich

$$13)\quad p_{x,\pi} + q_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = \mathfrak{p}'_{x,\pi} + \mathfrak{q}'_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}$$

$$14)\quad p_{x,\zeta} + q_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = \mathfrak{p}''_{x,\zeta} + \mathfrak{q}''_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}$$

und daraus folgt

$$15)\quad (\mathfrak{q}' - q)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = (p - \mathfrak{p}')_{x,\pi}$$

$$16)\quad (\mathfrak{q}'' - q)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = (p - \mathfrak{p}'')_{x,\zeta}$$

Eliminirt man jetzt $\frac{d\pi}{dx}$ und $\frac{d\zeta}{dx}$ aus 11 und 12, und führt man dann statt $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die Ausdrücke wieder zurück; so bekommt man

$$17)\quad 1 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \left(\frac{d_y \gamma}{dy}\right)_{x,\zeta} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\zeta} \cdot \left(\frac{d_x \gamma}{dx}\right)_{x,\zeta} = 0$$

$$18)\quad 1 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,\pi} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\pi} \cdot \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,\pi} = 0$$

Die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 dienen dazu, um die zwei willkürlichen Functionen zu bestimmen, welche durch Integration der Hauptgleichung eingegangen sind. Hat man aber für z eine ganz bestimmte Function von x und y hergestellt, so führe man diese in die Gleichungen 17 und 18 ein, und ermittle die für $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ gesuchten Functionen von x.

Nun mögen die vier Gleichungen 1, 2, 17, 18 noch näher untersucht werden.

A) Durch den Quotienten $\frac{d_x z}{dx}$ ist bekanntlich die goniometrische Tangente des Winkels dargestellt, welcher von der in der Coordinatenebene XZ liegenden Spur der Berührungsebene und von der Axe X gebildet wird. Aus der Gleichung 1, d. h. aus $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0$, folgt also, dass, wenn man in alle Punkte der von der gesuchten Fläche und der ersten Gränzebene erzeugten Durchschnittscurve Berührungsebenen an die gesuchte Fläche legt, die in der Coordinatenebene XZ liegenden Spuren aller dieser Berührungsebenen parallel sind mit der Axe X. Somit stehen alle diese Berührungsebenen senkrecht auf der ersten Gränzebene, d. h. die gesuchte Fläche selbst steht auf der ersten Gränzebene senkrecht.

Aus Gleichung 2, d. h. aus $\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0$, folgt auf gleiche Weise, dass die gesuchte Fläche auch auf der zweiten Gränzebene senkrecht steht.

B) Die gesuchte Fläche und die durch $c = f'(x, y)$ dargestellte Gränzfläche schneiden sich nach einer räumlichen Curve. Wenn man nun in alle Punkte dieser Curve Berührungsebenen an die gesuchte Fläche legt, so sind alle diese Berührungsebenen durch folgende Gleichung

$$19)\quad z' = \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\pi} \cdot x' + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot y' + \left(z - \frac{d_x z}{dx} \cdot x - \frac{d_y z}{dy} \cdot y\right)_{x,\pi}$$

gegeben, wo $\pi(x)$ an die Stelle des y gesetzt werden muss.

Digitized by Google

Wenn man ferner in alle Punkte der eben besagten Curve auch Berührungsebenen an die Gränzfläche $c = f'(x, y)$ legt, so sind alle diese Berührungsebenen durch folgende Gleichung

$$20)\quad c'' = \left(\frac{d_x c}{dx}\right)_{x,\pi} \cdot x'' + \left(\frac{d_y c}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot y'' + \left(c - \frac{d_x c}{dx} \cdot x - \frac{d_y c}{dy} \cdot y\right)_{x,\pi}$$

gegeben, wo wieder $\pi(x)$ an die Stelle des y gesetzt werden muss.

Jeder Punkt der besagten räumlichen Curve hat also zwei Berührungsebenen, deren eine zur gesuchten Fläche und deren andere zur Gränzfläche gehört; und jedes Paar solcher zusammengehörigen Berührungsebenen bildet einen Winkel, dessen Cosinus

$$= \frac{1 + p_{x,\pi} \cdot p'_{x,\pi} + q_{x,\pi} \cdot q'_{x,\pi}}{(\sqrt{1 + p^2 + q^2})_{x,\pi} \cdot (\sqrt{1 + p'^2 + q'^2})_{x,\pi}}$$

Nun ist (nach Gleichung 18) dieses Bruches Zähler = Null; folglich steht jedes Paar solcher zusammengehörigen Berührungsebenen senkrecht aufeinander, d. h. die gesuchte Fläche steht auf der Gränzfläche $c = f'(x, y)$ senkrecht.

Aus Gleichung 17 folgt auf gleiche Weise, dass die gesuchte Fläche auch auf der Gränzfläche $\gamma = f''(x, y)$ senkrecht steht.

Dass aber die absolut kleinste Oberfläche sowohl auf den beiden Gränzebenen als auch auf den beiden Gränzflächen senkrecht steht, ist ein Ergebniss, welches zu erwarten war, und den Ergebnissen früherer Aufgaben analog ist. (Man sehe den ersten Gränzfall in den acht Aufgaben 160, 161, 176—180, 187.)

Man eliminire jetzt $\delta^2\pi_{x,\pi}$ und $\delta^2 z_{x,\zeta}$ aus VI, was mittelst der Gleichungen 9 und 10 geschieht. Dann beachte man die sieben Gleichungen VII, VIII, IX, 1, 2, 11, 12, reducire soviel als möglich, und setze überall P und Q bezüglich statt $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ und $\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$; so gibt sich zunächst

$$\text{XIV)}\quad {}_{[}\delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(q\frac{d_x\delta z}{dx} - p\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \Big\{\Big[\left((Ps + Qt'')_{x,\zeta} + (Pt - Pt'')_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta\zeta^2$$

$$+ 2 \cdot P_{x,\zeta}\left(\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta} + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta\zeta\Big]$$

$$- \Big[\left((Ps + Qt')_{x,\pi} + (Pt - Pt')_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta\pi^2$$

$$+ 2 \cdot P_{x,\pi}\left(\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\pi} + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta\pi\Big]\Big\} \cdot dx$$

Wenn man die nach x identischen Gleichungen 7 und 8 nach allem x differentiirt, so bekommt man bezüglich

$$21)\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\pi} + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = (q' - q)_{x,\pi} \cdot \frac{d\delta\pi}{dx}$$
$$+ \left((s' - s)_{x,\pi} + (t' - t)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta\pi$$

$$22)\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta} + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = (q'' - q)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\delta\zeta}{dx}$$
$$+ \left((s'' - s)_{x,\zeta} + (t'' - t)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta\zeta$$

Digitized by Google

Man substituire diese beiden Ausdrücke in XIV, so bekommt man

$$\text{XV)}\quad [\delta]^2U =$$

$$\int_a^\alpha\int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(q\,\frac{d_x\delta z}{dx} - p\,\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\Bigg\{\Bigg[2\cdot P_{x,\zeta}\cdot(q''-q)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta\cdot\frac{d\delta\zeta}{dx}$$

$$+\left((Qt''+2P\cdot s''-Ps)_{x,\zeta}+(Pt''-Pt)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)\cdot\delta\zeta^2\Bigg]$$

$$-\Bigg[2\cdot P_{x,\varkappa}\cdot(q'-q)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa\cdot\frac{d\delta\varkappa}{dx}$$

$$+\left((Qt'+2P\cdot s'-Ps)_{x,\varkappa}+(Pt'-Pt)_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right)\cdot\delta\varkappa^2\Bigg]\Bigg\}\cdot dx$$

Nun ist

$$\text{23)}\quad 2\cdot P_{x,\varkappa}\cdot(q'-q)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa\cdot\frac{d\delta\varkappa}{dx} = \frac{d\left[P_{x,\varkappa}\cdot(q'-q)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa^2\right]}{dx}$$

$$-\left[\left(\frac{d_xP}{dx}\right)_{x,\varkappa}\cdot(q'-q)_{x,\varkappa}+\left(\frac{d_yP}{dy}\right)_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\cdot(q'-q)_{x,\varkappa}\right.$$

$$\left.+P_{x,\varkappa}\cdot(s'-s)_{x,\varkappa}+P_{x,\varkappa}\cdot(t'-t)_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right]\cdot\delta\varkappa^2$$

und

$$\text{24)}\quad 2\cdot P_{x,\zeta}\cdot(q''-q)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta\cdot\frac{d\delta\zeta}{dx} = \frac{d\left[P_{x,\zeta}\cdot(q''-q)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta^2\right]}{dx}$$

$$-\left[\left(\frac{d_xP}{dx}\right)_{x,\zeta}\cdot(q''-q)_{x,\zeta}+\left(\frac{d_yP}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot(q''-q)_{x,\zeta}\right.$$

$$\left.+P_{x,\zeta}\cdot(s''-s)_{x,\zeta}+P_{x,\zeta}\cdot(t''-t)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right]\cdot\delta\zeta^2$$

Man substituire diese beiden Ausdrücke in XV, reducire soviel als möglich, und wende auf die vollständigen Differentiale die Integration an; so gibt sich

$$\text{XVI)}\quad [\delta]^2U =$$

$$\int_a^\alpha\int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(q\,\frac{d_x\delta z}{dx} - p\,\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

$$+\int_a^\alpha\Bigg\{\left[\left(Ps''+Qt''-\frac{d_xP}{dx}\,(q''-q)\right)_{x,\zeta}-\left(\frac{d_yP}{dy}\,(q''-q)\right)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right]\cdot\delta\zeta^2$$

$$-\left[\left(Ps'+Qt'-\frac{d_xP}{dx}\,(q'-q)\right)_{x,\varkappa}-\left(\frac{d_yP}{dy}\,(q'-q)\right)_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right]\cdot\delta\varkappa^2\Bigg\}\cdot dx$$

$$+P_{\alpha,\zeta(\alpha)}\cdot(q''-q)_{\alpha,\zeta(\alpha)}\cdot\delta\zeta(\alpha)^2-P_{a,\zeta(a)}\cdot(q''-q)_{a,\zeta(a)}\cdot\delta\zeta(a)^2$$

$$-P_{\alpha,\varkappa(\alpha)}\cdot(q'-q)_{\alpha,\varkappa(\alpha)}\cdot\delta\varkappa(\alpha)^2+P_{a,\varkappa(a)}\cdot(q'-q)_{a,\varkappa(a)}\cdot\delta\varkappa(a)^2$$

Die Gleichung 1 gilt bei jedem Werthe des y, sie gilt also auch bei $y=\varkappa(a)$ und bei $y=\zeta(a)$, d. h. es ist auch $P_{a,\varkappa(a)}=0$ und $P_{a,\zeta(a)}=0$.

Auch die Gleichung 2 gilt bei jedem Werthe des y, sie gilt also auch bei $y=\varkappa(\alpha)$ und bei $y=\zeta(\alpha)$, d. h. es ist auch $P_{\alpha,\varkappa(\alpha)}=0$ und $P_{\alpha,\zeta(\alpha)}=0$.

Die ausserhalb der Integralzeichen stehenden Theilsätze fallen somit alle hinweg.

Digitized by Google

Eliminirt man noch die beiden (unter dem einfachen Integralzeichen stehenden) totalen Differentialquotienten $\frac{d\varkappa(x)}{dx}$ und $\frac{d\zeta(x)}{dx}$, was mittelst der Gleichungen 15 und 16 geschieht; so bekommt man

$$\text{XVII)} \quad \delta^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(q\frac{d_x\delta z}{dx} - p\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(P s'' + Q t'' - \frac{d_x P}{dx}(q''-q) + \frac{d_y P}{dy}(p''-p)\right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2\right.$$

$$\left. - \left(P \cdot s' + Q \cdot t' - \frac{d_x P}{dx}(q'-q) + \frac{d_y P}{dy}(p'-p)\right)_{x,\varkappa} \cdot \delta\varkappa^2\right] \cdot dx$$

Der Theilsatz mit dem doppelten Integralzeichen ist unter allen Umständen positiv. Ob aber der Theilsatz mit dem einfachen Integralzeichen auch positiv ist, kann erst entschieden werden, wenn specielle Gränzflächen gegeben sind.

Zusatz. Folgende Unterscheidungen sind beachtenswerth:

𝔄) Wenn die beiden Gränzflächen sich innerhalb der beiden Gränzebenen nur berühren, so kann zwischen ihnen immer noch eine absolut kleinste Oberfläche stattfinden.

𝔅) Wenn aber die beiden Gränzflächen sich innerhalb der beiden Gränzebenen schneiden, so kann

a) zwischen ihnen keine absolut kleinste Oberfläche stattfinden. Würde aber eine solche (eine absolut kleinste nemlich) dennoch gefordert werden, so müsste sich die Unstatthaftigkeit der Forderung jedesmal durch eine Erscheinung des Calculs offenbaren.

b) Ganz anders verhält es sich bei einer relativ kleinsten Oberfläche, d. h. bei einer Oberfläche, welche unter allen denen, die einer oder mehreren gemeinschaftlichen Bedingungen genügen, die kleinste ist. Die Forderung einer solchen kleinsten Oberfläche wird in der Regel statthaft sein, auch wenn die beiden Gränzflächen sich zwischen den zwei parallelen Gränzebenen schneiden; und sollte sie einmal unstatthaft sein, so wird es der Calcul ohneweiters anzeigen. (Man vergleiche Seite 241, Zusatz 6; und Seite 254, Zusatz 8.)

Zweiter Fall.

Man sucht nicht die absolut kleinste Oberfläche zwischen den zwei parallelen Gränzebenen und den zwei gegebenen Gränzflächen; sondern man sucht nur unter jenen Flächen, welche von zwei festen in den parallelen Ebenen liegenden Curven begränzt werden, diejenige heraus, die zwischen den zwei gegebenen Gränzflächen die kleinste ist.

Die erste Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse a senkrechten Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichungen

$$25)\ x = a, \quad \text{und} \quad 26)\ z_{a,y} = A \cdot y + B \cdot y^2$$

Die zweite Curve, welche in der im Endpunkte der Abscisse α senkrechten Ebene liegt, sei gegeben durch die Gleichungen

$$27)\ x = \alpha, \quad \text{und} \quad 28)\ z_{\alpha,y} = C + E \cdot y^2$$

Desshalb müssen (man sehe den ersten Fall in Aufg. 253) folgende nach y identische Gleichungen stattfinden

$$\delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0, \text{ etc.}$$

und somit reducirt die Gränzengleichung XI sich wieder auf XII, so dass sich abermals die beiden Gleichungen 11 und 12 (oder 17 und 18) ergeben.

Die gesuchte Fläche steht also auch diesmal auf den beiden Gränzflächen $c = f'(x, y)$ und $\gamma = f''(x, y)$ senkrecht. Welchen Winkel aber die gesuchte Fläche an jeder Stelle mit den beiden parallelen Gränzebenen bildet, darüber kann jetzt (in diesem zweiten Falle nemlich) keine allgemeine Regel aufgestellt werden.

Die vier Gleichungen 3, 4, 26, 28 dienen dazu, um die zwei willkürlichen Functionen zu bestimmen, welche durch Integration der Hauptgleichung eingegangen sind. Hat man aber für z eine ganz bestimmte Function von x und y hergestellt, so führe man diese in die Gleichungen 17 und 18 ein, und ermittle die für $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ gesuchten Functionen.

Digitized by Google

$$\text{XVIII)} \quad {}_{|}\delta_{|}^2 U =$$

$$\int_a^\alpha \int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(q \frac{d_x \delta z}{dx} - p \frac{d_y \delta z}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d_x \delta z}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)^2 \right) \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\left(P\mathfrak{s}'' + Q\mathfrak{t}'' - \frac{d_x P}{dx} (\mathfrak{q}'' - q) + \frac{d_y P}{dy} (\mathfrak{p}'' - p) \right)_{x,\zeta} \right.$$

$$\left. - \left(P\mathfrak{s}' + Q\mathfrak{t}' - \frac{d_x P}{dx} (\mathfrak{q}' - q) + \frac{d_y P}{dy} (\mathfrak{p}' - p) \right)_{x,\varkappa} \right) \cdot \delta\zeta^2 \cdot dx$$

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden.

(Man vergleiche die Schlussbemerkung zu Aufg. 288.)

Aufgabe 282.

Man sucht eine Fläche und eine in dieser Fläche liegende räumliche Curve, für deren Umfang eine bestimmte Grösse k vorgeschrieben ist. Das von der gesuchten Curve begränzte Stück der gesuchten Fläche soll den kleinsten Flächeninhalt haben, der zwischen allen andern räumlichen Curven von gleichgrossem Umfange möglich ist. Welches ist die gesuchte Fläche und welches die gesuchte Curve?

Einleitung.

A) Man nehme an, die gesuchte Fläche sei gefunden, und habe die Gleichung

$$\text{I)} \quad z = \varphi(x, y)$$

Die der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen sind also dargestellt durch

$$\text{II)} \quad z + \varDelta z = \varphi(x, y) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, y) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, y) + \ldots\ldots$$

oder kürzer durch

$$\text{III)} \quad z + \varDelta z = \varphi(x, y) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo die unmittelbaren reinen Mutationscoefficienten δz, $\delta^2 z$, etc. als Functionen von x und y zu betrachten sind.

B) Die in der Coordinatenebene XY liegende Projection der gesuchten Curve (fig. 37) sei ADBE, und die in der Coordinatenebene XZ liegende Projection sei $\mathfrak{ADBE}$. Die kleinste Abscisse sei a, und die grösste sei α.

$\mathfrak{A}$) Man nehme ferner an, das Stück AEB der in XY liegenden Projection der gesuchten Curve habe die Gleichung

$$\text{IV)} \quad y' = \varkappa(x, m)$$

wo m ein vorerst noch willkürlicher Constanter ist, welcher dann verwendet werden wird, wenn es sich darum handelt, der gesuchten Curve den vorgeschriebenen Umfang k zu ertheilen.

Wenn man $\varkappa(x, m)$ an die Stelle des y in I substituirt, so bekommt man

$$\text{V)} \quad z' = \varphi(x, \varkappa(x, m))$$

und dieses ist die Gleichung des Stückes $\mathfrak{AEB}$ der in XZ liegenden Projection der gesuchten Curve.

Da alle zu betrachtenden Nachbarcurven den nemlichen Umfang k haben müssen, so müssen ihre Gleichungen mit einem andern willkürlichen Constanten $(m + Dm)$ versehen sein. Desshalb sind die der Projection AEB entsprechenden Projectionen aller nächstanliegenden Nachbarcurven nur durch gemischte Mutationen, d. h. durch folgende Reihe

$$\text{VI)} \quad y' + {}_{(}\varDelta_{1)} y' = \varkappa(x, m) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}\varkappa(x, m) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 \varkappa(x, m) + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

darstellbar, wo, wie man bereits (aus Aufg. 214) weiss,

$$\text{VII)}\quad {}_{(\delta_1)}\pi(x, m) = \delta\pi(x, m) + \frac{d_m\pi(x, m)}{dm}\cdot\vartheta m$$

$$\text{VIII)}\quad {}_{(\delta_1)^2}\pi(x, m) =$$

$$\delta^2\pi(x, m) + 2\cdot\frac{d_m\delta\pi(x, m)}{dm}\cdot\vartheta m + \frac{d_m\pi(x, m)}{dm}\cdot\vartheta^2 m + \frac{d_m^2\pi(x, m)}{dm^2}\cdot\vartheta m^2$$

etc. etc.

ist. Wenn man die Reihe VI an die Stelle des y in II substituirt, und dann eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt; so bekommt man folgende zusammengesetzte gemischte Mutation:

$$\text{IX)}\quad z' + {}_{[(\Delta_1)]}z' = \varphi(x, \pi(x, m)) + \varkappa\cdot{}_{[(\delta_1)]}z' + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(\delta_1)^2}z' + \ldots\ldots\ldots$$

und dadurch sind die der Projection $\mathfrak{AEB}$ entsprechenden Projectionen aller der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven dargestellt.

In die Zahl dieser Nachbarcurven gehören aber

1) nicht nur diejenigen, welche sich in der gesuchten Fläche befinden, und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern

2) auch diejenigen, welche sich in den der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen befinden, und zugleich der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen.

Dieses ist der Grund, warum wenigstens bei einer Projection die Mutationen zusammengesetzte sein müssen, und zwar zusammengesetzte gemischte, wegen der Werthänderungen des m.

Man setze, so oft es bequem ist, zur Abkürzung

$$\pi,\quad \delta\pi,\quad \delta^2\pi,\ \text{etc.}$$

bezüglich statt

$$\pi(x, m),\quad \delta\pi(x, m),\quad \delta^2\pi(x, m),\ \text{etc.}$$

so ergeben sich für die einzelnen Coefficienten der Reihe IX folgende Ausdrücke

$$\text{X)}\quad {}_{[(\delta_1)]}z' = \delta z_{x,\pi} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot\left(\delta\pi + \frac{d_m\pi}{dm}\cdot\vartheta m\right)$$

$$\text{XI)}\quad {}_{[(\delta_1)]^2}z' = \delta^2 z_{x,\pi} + 2\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot{}_{(\delta_1)}\pi + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot{}_{(\delta_1)^2}\pi + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\pi}\cdot{}_{(\delta_1)}\pi^2$$

etc. etc.

Die Bedeutung der Ausdrücke ${}_{(\delta_1)}\pi$ und ${}_{(\delta_1)^2}\pi$ ist durch die Gleichungen VII und VIII gegeben.

B) Man nehme auch noch an, das Stück ADB der in XY liegenden Projection der gesuchten Curve habe die Gleichung

$$\text{XII)}\quad y'' = \zeta(x, m)$$

wo m wieder der schon vorhin gebrauchte (und vorerst noch ganz willkürliche) Constante ist.

Wenn man $\zeta(x, m)$ an die Stelle des y in I substituirt, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad z'' = \varphi(x, \zeta(x, m))$$

und dieses ist die Gleichung des Stückes $\mathfrak{ADB}$ der in XZ liegenden Projection der gesuchten Curve.

Die der Projection ADB entsprechenden Projectionen aller der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven sind also wegen der Werthänderungen des m ebenfalls nur durch gemischte Mutationen, d. h. durch die Reihe

$$\text{XIV)}\quad y'' + {}_{(\Delta_1)}y'' = \zeta(x, m) + \varkappa\cdot{}_{(\delta_1)}\zeta(x, m) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(\delta_1)^2}\zeta(x, m) + \ldots\ldots$$

darstellbar, wo, wie man bereits (aus Aufg. 214) weiss,

Digitized by Google

$$\text{XV)} \quad {}_{(\delta_1)}\zeta(x, m) = \delta\zeta(x, m) + \frac{d_m\zeta(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{XVI)} \quad {}_{(\delta_1)}{}^2\zeta(x, m) =$$

$$\delta^2\zeta(x, m) + 2 \cdot \frac{d_m\delta\zeta(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m\zeta(x, m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2\zeta(x, m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

ist. Wenn man die Reihe XIV an die Stelle des y in II substituirt, und dann eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt; so bekommt man folgende zusammengesetzte gemischte Mutation:

$$\text{XVII)} \quad z'' + {}_{((\Delta_1))}z'' = \varphi(x, \zeta(x, m)) + \varkappa \cdot {}_{((\delta_1))}z'' + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{((\delta_1))}{}^2z'' + \ldots\ldots$$

und dadurch sind die der Projection 𝔄𝔇𝔅 entsprechenden Projectionen aller der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven dargestellt.

In die Zahl dieser Nachbarcurven gehören aber

1) nicht nur diejenigen, welche sich in der gesuchten Fläche befinden, und der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen, sondern

2) auch diejenigen, welche sich in den der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen befinden, und zugleich der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegen.

Dieses ist, wie kurz vorher schon einmal gesagt, der Grund, warum wenigstens bei einer Projection die Mutationen zusammengesetzte sind, und zwar zusammengesetzte gemischte, wegen der Werthänderungen des m.

Man setze, so oft es bequem ist, zur Abkürzung

$$\zeta, \quad \delta\zeta, \quad \delta^2\zeta, \text{ etc.}$$

bezüglich statt

$$\zeta(x, m), \quad \delta\zeta(x, m), \quad \delta^2\zeta(x, m), \text{ etc.}$$

so ergeben sich für die einzelnen Coefficienten der Reihe XVII folgende Ausdrücke:

$$\text{XVIII)} \quad {}_{((\delta_1))}z'' = \delta z_{x,\zeta} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \left(\delta\zeta + \frac{d_m\zeta}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$

$$\text{XIX)} \quad {}_{((\delta_1))}{}^2z'' = \delta^2 z_{x,\zeta} + 2 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}{}^2\zeta + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta^2$$

Die Bedeutung der Ausdrücke ${}_{(\delta_1)}\zeta$ und ${}_{(\delta_1)}{}^2\zeta$ ist durch die Gleichungen XV und XVI gegeben.

Zusatz 1. Zwischen der hiesigen und der folgenden Aufgabe besteht ein wesentlicher Unterschied.

α) Bei der hiesigen Aufgabe ist z ursprünglich nur eine Function von x und y, während erst in den für y gesuchten Functionen $\pi(x, m)$ und $\zeta(x, m)$ das m vorkommt, so dass in den beiden Ausdrücken $z_{x,\pi}$ und $z_{x,\zeta}$ das m erst mittelbar enthalten ist. Dagegen

β) bei der folgenden Aufgabe wird z schon ursprünglich eine Function von x, y, m sein, d. h. in der dortigen Function z wird das m schon unmittelbar vorkommen, während in den dort für y zu suchenden Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ kein m enthalten ist. (Man vergleiche den Zusatz im Gränzfalle der nächsten Aufgabe.)

Das durch die Projectionen AEB und 𝔄𝔈𝔅 gegebene Stück der gesuchten Curve hat folgende Länge:

$$\text{XX)} \quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

und das durch die Projectionen ADB und 𝔄𝔇𝔅 gegebene Stück der gesuchten Curve hat folgende Länge:

$$\text{XXI)} \quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz''}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx$$

Digitized by Google

Die hier vorgelegte Aufgabe verlangt also für z, für $\varkappa(x, m)$ und für $\zeta(x, m)$ solche Functionen, dass dabei folgendes Integral

$$\text{XXII)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x,m)}^{\zeta(x,m)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

ein Minimum-stand wird, während noch folgende Gleichung

$$\text{XXIII)}\quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx + \int_a^\alpha \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz''}{dx}\right)^2}\right) \cdot dx = k$$

stattfindet.

Gleichung XXIII kann erfüllt werden durch alle jene unendlichvielen Functionen $\varkappa(x, m)$ und $\zeta(x, m)$, bei welchen es möglich ist, den Werth des (vorerst willkürlichen) Constanten m noch so einzurichten, wie die Erfüllung dieser Gleichung erfordert.

Weil in Gleichung XXII die beiden Gränzfunctionen $\varkappa(x, m)$ und $\zeta(x, m)$ eine unmittelbare gemischte Mutation erleiden, so erleidet das U selbst eine zusammengesetzte gemischte Mutation, d. h. man bekommt

$$\text{XXIV)}\quad {}_{[(\delta_1)]}U = \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x,m)}^{\zeta(x,m)} \left(P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha \left(V_{x,\zeta(x,m)} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta(x,m) - V_{x,\varkappa(x,m)} \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa(x,m)\right) \cdot dx$$

Man forme um, und gebrauche, so oft es bequem ist, die bereits gewählten Abkürzungszeichen; so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXV)}\quad {}_{[(\delta_1)]}U = &- \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x,m)}^{\zeta(x,m)} \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx \\ &+ \int_{\varkappa(\alpha,m)}^{\zeta(\alpha,m)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\varkappa(a,m)}^{\zeta(a,m)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy \\ &+ \int_a^\alpha \Big[V_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} \\ &\quad - V_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa - \left(Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\varkappa}\Big] \cdot dx\end{aligned}$$

Man mutire Gleichung XIV noch einmal, und forme um; so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXVI)}\quad {}_{[(\delta)]^2}U = &\int_a^\alpha \int_{\varkappa(x,m)}^{\zeta(x,m)} \Bigg\{\left(-\frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta^2 z \\ &+ \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q \frac{d_x \delta z}{dx} - p \frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2\right]\Bigg\} \cdot dy \cdot dx \\ &+ \int_{\varkappa(\alpha,m)}^{\zeta(\alpha,m)} P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\varkappa(a,m)}^{\zeta(a,m)} P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} \cdot dy \\ &+ \int_a^\alpha \Big[V_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)^2}\zeta + 2 \cdot \delta V_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta + \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta^2 + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\zeta} \\ &- V_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)^2}\varkappa - 2 \cdot \delta V_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa - \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa^2 - \left(Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx}\right) \cdot \delta^2 z_{x,\varkappa}\Big] \cdot dx\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Bedeutung von ${}_{(\delta_1)}\varkappa$, ${}_{(\delta_1)}\zeta$, ${}_{(\delta_1)}{}^2\varkappa$, ${}_{(\delta_1)}{}^2\zeta$, etc. ist in VII, VIII, XV, XVI auseinandergesetzt.

Die Abkürzungszeichen δV und $\frac{d_y V}{dy}$ sind bereits (aus Nr. VII und VIII, Seite 683) bekannt.

Ferner ist, wie gewöhnlich, p, q, V, P, Q bezüglich statt $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\sqrt{1+p^2+q^2}$, $\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ gesetzt worden.

Gleichung XXIII wird dadurch mutirt, dass an die Stelle des $\varkappa$, z', ζ, z'' bezüglich die Reihen VI, IX, XIV, XVII eingehen; und wenn dabei zur Abkürzung noch

$$ds' \text{ und } ds''$$

bezüglich statt

$$\sqrt{dx^2+d\varkappa^2+dz'^2} \text{ und } \sqrt{dx^2+d\zeta^2+dz''^2}$$

gesetzt wird, so bekommt man

$$\text{XXVII)} \int_a^\alpha \left(\frac{d\varkappa}{ds'}\frac{d_{(\delta_1)}\varkappa}{dx} + \frac{dz'}{ds'}\frac{d_{[(\delta_1)]}z'}{dx}\right)\cdot dx + \int_a^\alpha \left(\frac{dz}{ds''}\frac{d_{(\delta_1)}\zeta}{dx} + \frac{dz''}{ds''}\frac{d_{[(\delta_1)]}z''}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

Formt man um, so geht diese Gleichung über in

$$\begin{aligned}\text{XXVIII)}\ &\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_\alpha\cdot{}_{(\delta_1)}\varkappa_\alpha + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_\alpha\cdot{}_{[(\delta_1)]}z'_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha\cdot{}_{(\delta_1)}\zeta_\alpha + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_\alpha\cdot{}_{[(\delta_1)]}z''_\alpha\\
&-\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_a\cdot{}_{(\delta_1)}\varkappa_a - \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_a\cdot{}_{[(\delta_1)]}z'_a - \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a\cdot{}_{(\delta_1)}\zeta_a - \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_a\cdot{}_{[(\delta_1)]}z''_a\\
&-\int_a^\alpha\left(\frac{d\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)}{dx}\,{}_{(\delta_1)}\varkappa + \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\,{}_{[(\delta_1)]}z' + \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx}\,{}_{(\delta_1)}\zeta + \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\,{}_{[(\delta_1)]}z''\right)\cdot dx = 0\end{aligned}$$

Man mutire Gleichung XXVII noch einmal, und forme um; so gibt sich

$$\begin{aligned}\text{XXIX)}\ &\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_\alpha\cdot{}_{(\delta_1)}{}^2\varkappa_\alpha + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_\alpha\cdot{}_{[(\delta_1)]}{}^2z'_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha\cdot{}_{(\delta_1)}{}^2\zeta_\alpha + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_\alpha\cdot{}_{[(\delta_1)]}{}^2z''_\alpha\\
&-\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_a\cdot{}_{(\delta_1)}{}^2\varkappa_a - \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_a\cdot{}_{[(\delta_1)]}{}^2z'_a - \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a\cdot{}_{(\delta_1)}{}^2\zeta_a - \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_a\cdot{}_{[(\delta_1)]}{}^2z''_a\\
&+\int_a^\alpha\Bigg\{-\left(\frac{d\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)}{dx}\,{}_{(\delta_1)}{}^2\varkappa + \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\,{}_{[(\delta_1)]}{}^2z' + \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx}\cdot{}_{(\delta_1)}{}^2\zeta + \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\,{}_{[(\delta_1)]}{}^2z''\right)\\
&\quad+\left(\frac{dx}{ds'}\right)^3\left[\left(\frac{dz'}{dx}\cdot\frac{d_{(\delta_1)}\varkappa}{dx} - \frac{d\varkappa}{dx}\cdot\frac{d_{[(\delta_1)]}z'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_{(\delta_1)}\varkappa}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_{[(\delta_1)]}z'}{dx}\right)^2\right]\\
&\quad+\left(\frac{dx}{ds''}\right)^3\left[\left(\frac{dz''}{dx}\cdot\frac{d_{(\delta_1)}\zeta}{dx} - \frac{d\zeta}{dx}\cdot\frac{d_{[(\delta_1)]}z''}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_{(\delta_1)}\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_{[(\delta_1)]}z''}{dx}\right)^2\right]\Bigg\}\cdot dx = 0\end{aligned}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in XXIV aufgestellten) Form des ${}_{[(\delta_1)]}U$. In dieser Form kommen die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten nicht vor. Da nun die Aufgabe verlangt, dass die gesuchte Fläche von der gesuchten Gränzcurve begränzt werden soll, also die Gränzordinaten der gesuchten Fläche auch zugleich Ordinaten der gesuchten Gränzcurve sein müssen; so müssen durchaus die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten verglichen werden mit den Mutationen der zur gesuchten Gränzcurve gehörigen Ordinaten. Dazu bietet aber die erste Form des ${}_{[(\delta_1)]}U$ nicht die Mittel, kann also nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in XXV aufgestellten) Form des ${}_{[(\delta_1)]}U$. Um hier das abhängige ϑm wegzubringen, multiplicire man Gleichung XXVIII mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Factor $\mathfrak{R}$; dann ist auch dieses Product noch Null, und kann zu XXV addirt werden, ohne dass ${}_{[(\delta_1)]}U$ sich im Geringsten ändert. Man addire besagtes Product wirklich, und führe unter dem

Digitized by Google

einfachen Integralzeichen für ${}_{(\delta_1)}\pi$, ${}_{[(\delta_1)]}z'$, ${}_{(\delta_1)}\zeta$, ${}_{[(\delta_1)]}z''$ die (in den Gleichungen VII, X, XV, XVIII stehenden) Ausdrücke ein; so ist noch vollkommen genau

$$\text{XXX)}\quad {}_{[(\delta_1)]}U = -\int_a^\alpha \int_{\pi(x,m)}^{\zeta(x,m)} \left(\frac{d_xP}{dx} + \frac{d_yQ}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha,m)}^{\zeta(\alpha,m)} P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a,m)}^{\zeta(a,m)} P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Bigg\{ \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \right) \cdot \delta z_{x,\zeta}$$

$$+ \left(-Q_{x,\pi} + P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \right) \cdot \delta z_{x,\pi}$$

$$+ \Bigg[\left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\zeta} \right) \cdot \frac{d_m\zeta}{dm}$$

$$+ \left(-V_{x,\pi} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\pi} \right) \cdot \frac{d_m\pi}{dm} \Bigg] \cdot \vartheta m$$

$$+ \left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\zeta} \right) \cdot \delta\zeta$$

$$+ \left(-V_{x,\pi} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\pi} \right) \cdot \delta\pi \Bigg\} \cdot dx$$

$$+ \mathfrak{N} \left[\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}\pi_\alpha + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_\alpha \cdot {}_{[(\delta_1)]}z'_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta_\alpha + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_\alpha \cdot {}_{[(\delta_1)]}z''_\alpha \right]$$

$$- \mathfrak{N} \left[\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}\pi_a + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_a \cdot {}_{[(\delta_1)]}z'_a + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta_a + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_a \cdot {}_{[(\delta_1)]}z''_a \right]$$

Hieraus ergibt sich zunächst die Hauptgleichung

$$\text{XXXI)}\quad \frac{d_xP}{dx} + \frac{d_yQ}{dy} = 0$$

welche bekanntlich gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XXXII)}\quad (1 + q^2) \cdot r - 2pq \cdot s + (1 + p^2) \cdot t = 0$$

Diese Gleichung ist nach x und y identisch, und ist dieselbe, wie Nr. VIII oder IX der 261[sten] Aufgabe, wo b und β constant sind.

Damit das abhängige ϑm unter dem einfachen Integralzeichen wegfalle, muss auch folgende nach x identische Gleichung

$$\text{XXXIII)}\quad \left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\zeta} \right) \cdot \frac{d_m\zeta}{dm}$$

$$+ \left(-V_{x,\pi} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N} \frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)_{x,\pi} \right) \cdot \frac{d_m\pi}{dm} = 0$$

stattfinden.

Man hat also jetzt die Gränzengleichung

$$\text{XXXIV)}\quad \int_{\pi(\alpha,m)}^{\zeta(\alpha,m)} P_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}\cdot dy - \int_{\pi(a,m)}^{\zeta(a,m)} P_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\cdot dy$$

$$\int_a^\alpha \Bigg\{\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\zeta}$$

$$+\left(-Q_{x,\pi} + P_{x,\pi}\cdot\frac{d\pi}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\pi}$$

$$+\left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right)\cdot\delta\zeta$$

$$+\left(-V_{x,\pi} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\right)\cdot\delta\pi\Bigg\}\cdot dx$$

$$\mathfrak{N}\left[\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)\pi_\alpha + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_\alpha\cdot[(\delta_1)]z'_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)\zeta_\alpha + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_\alpha\cdot[(\delta_1)]z''_\alpha\right]$$

$$-\mathfrak{N}\left[\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_a\cdot(\delta_1)\pi_a + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_a\cdot[(\delta_1)]z'_a + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a\cdot(\delta_1)\zeta_a + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_a\cdot[(\delta_1)]z''_a\right]$$

$$= 0$$

Nun ist man soweit gekommen, dass specielle Fälle aufgestellt werden können.

Erster Fall.

Man sucht die absolut kleinste Fläche, welche von der gesuchten Curve mit vorgeschriebener Umfangsgrösse eingeschlossen werden kann.

Hierbei wird die Gränzengleichung XXXIV nur erfüllt, wenn folgende zwei nach y identische

$$1)\quad P_{\alpha,y} = 0,\qquad 2)\quad P_{a,y} = 0$$

wenn folgende vier nach x identische

$$3)\quad Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} = 0$$

$$4)\quad -Q_{x,\pi} + P_{x,\pi}\cdot\frac{d\pi}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} = 0$$

$$5)\quad V_{x,\zeta} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} = 0$$

$$6)\quad -V_{x,\pi} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi} = 0$$

und wenn folgende nichtidentische Gleichung

$$7)\quad \left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)\pi_\alpha + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_\alpha\cdot[(\delta_1)]z'_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha\cdot(\delta_1)\zeta_\alpha + \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_\alpha\cdot[(\delta_1)]z''_\alpha$$

$$-\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)_a\cdot(\delta_1)\pi_a - \left(\frac{dz'}{ds'}\right)_a\cdot[(\delta_1)]z'_a - \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a\cdot(\delta_1)\zeta_a - \left(\frac{dz''}{ds''}\right)_a\cdot[(\delta_1)]z''_a = 0$$

stattfindet.

Wenn man die Hauptgleichung XXXII integrirt, so gehen zwei willkürliche Functionen ein, welche durch die vier Gleichungen Nr. 1—4 bestimmt werden. Dann dienen die Gleichungen 5 und 6 zur Bestimmung der zwei gesuchten Functionen $\pi(x, m)$ und $\zeta(x, m)$.

Die Gleichung 7 wird sich sehr verschiedenartig zerlegen, je nach den verschiedenen Gränzbedingungen, welche noch gestellt werden können.

Digitized by Google

Die Gleichung XXIII dient endlich zur Bestimmung des letzten Constanten m.

Man erkennt aber, das alle diejenigen Functionen z, $\varkappa(x, m)$ und $\zeta(x, m)$, durch welche die Gleichungen 5 und 6 identisch werden, auch die Gleichung XXXIII identisch machen. Somit hat Gleichung XXXIII durchaus keinen Einfluss auf die Modification der gesuchten Functionen.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, multiplicire man Gleichung XXIX mit dem bereits angewendeten Factor $\mathfrak{R}$, und addire dieses Product zu XXVI, etc. Dabei hat man aber unter dem einfachen Integralzeichen für $(\delta_1)^2\varkappa$, $[(\delta_1)]^2 z'$, $(\delta_1)^2\zeta$ und $[(\delta_1)]^2 z''$ die (in den Gleichungen VIII, XI, XVI und XIX stehenden) Ausdrücke zu setzen.

Zusatz 2. Die einfachste Function, wodurch der Hauptgleichung XXXII genügt wird, ist

$$8)\quad z = A$$

Dadurch ist die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene dargestellt.

Wegen Gleichung 8 ist also auch

$$9)\quad z' = \varphi(x, \varkappa(x, m)) = A$$

und

$$10)\quad z'' = \varphi(x, \zeta(x, m)) = A$$

und durch diese beiden Gleichungen ist angezeigt, dass die in der Coordinatenebene XZ liegende Projection der gesuchten Curve eine mit der Axe X parallele Grade ist.

a) Aus Gleichung 8 folgt $\frac{d_x z}{dx} = 0$ und $\frac{d_y z}{dy} = 0$ bei jeder Bedeutung des x und des y, also auch bei $y = \varkappa(x, m)$ und bei $y = \zeta(x, m)$.

b) Aus Gleichung 9 folgt $\frac{dz'}{dx} = 0$ bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$.

c) Aus Gleichung 10 folgt $\frac{dz''}{dx} = 0$ bei jedem Werthe des x, also auch bei $x = a$ und bei $x = \alpha$.

d) Weil, wie schon einmal gesagt, $\frac{d_x z}{dx} = 0$ und $\frac{d_y z}{dy} = 0$ ist, so ist $V = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1$.

In Folge alles dessen, was hier (in diesem Zusatze) vorkommt, fallen die vier Gleichungen Nr. 1—4 hinweg, und die drei Gleichungen Nr. 5—7 reduciren sich bezüglich auf

$$11)\quad 1 - \mathfrak{R} \cdot \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} = 0$$

$$12)\quad -1 - \mathfrak{R} \cdot \frac{d\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)}{dx} = 0$$

und

$$13)\quad \left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)\varkappa_\alpha + \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_\alpha \cdot (\delta_1)\zeta_\alpha - \left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)_a \cdot (\delta_1)\varkappa_a - \left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)_a \cdot (\delta_1)\zeta_a = 0$$

Weil die Gleichungen 11 und 12 stattfinden, und $\frac{d_y z}{dy} = 0$ ist; so wird auch Gleichung XXXIII erfüllt. Somit hat Gleichung XXXIII durchaus keinen Einfluss auf die Modification der gesuchten Curven.

In der Gränzengleichung 13 kommen die von z' und z'' herrührenden Mutationen nicht vor, und zwar desswegen nicht, weil die identischen Gleichungen $\frac{dz'}{dx} = 0$ und $\frac{dz''}{dx} = 0$ stattfinden. Besagte Mutationen sind aber auch für die Gränzengleichung gar nicht nöthig. Es ist nemlich ganz gleichgiltig, wie weit die durch $z = A$ dargestellte Ebene von der Coordinatenebene XY entfernt sei; denn diese Entfernung hat auf die Grösse des von den gesuchten Curven eingeschlossenen Flächenstückes keinen Einfluss.

Integrirt man die Gleichungen 11 und 12, so bekommt man bezüglich

$$14)\quad x - \mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cdot \frac{d\zeta}{ds''}, \qquad \text{und} \qquad 15)\quad x - \mathfrak{H} = -\mathfrak{R} \cdot \frac{d\varkappa}{ds'}$$

Man setze für ds' und ds'' die Ausdrücke, und beachte, dass $dz' = 0$ und $dz'' = 0$ ist; so geben die Gleichungen 14 und 15 über in

Digitized by Google

$$16)\quad x - H = \mathfrak{N} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{dx^2 + d\zeta^2}}, \quad \text{und} \quad 17)\quad x - \mathfrak{H} = -\mathfrak{N} \cdot \frac{d\pi}{\sqrt{dx^2 + d\pi^2}}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt bezüglich

$$18)\quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x - H}{\sqrt{\mathfrak{N}^2 - (x - H)^2}}, \quad \text{und} \quad 19)\quad \frac{d\pi}{dx} = \frac{x - \mathfrak{H}}{\sqrt{\mathfrak{N}^2 - (x - \mathfrak{H})^2}}$$

Integrirt man die beiden letzten Gleichungen noch einmal, so bekommt man bezüglich

$$\zeta = K - \sqrt{\mathfrak{N}^2 - (x - H)^2}, \quad \text{und} \quad \pi = \mathfrak{K} - \sqrt{\mathfrak{N}^2 - (x - \mathfrak{H})^2}$$

Der diesen beiden Functionen gemeinschaftliche Constante $\mathfrak{N}$ muss nun derjenige sein, welcher mit m bezeichnet wird; und so kann man statt dieser beiden Gleichungen bezüglich

$$20)\quad \zeta(x, m) = K - \sqrt{m^2 - (x - H)^2}$$

und

$$21)\quad \pi(x, m) = \mathfrak{K} - \sqrt{m^2 - (x - \mathfrak{H})^2}$$

schreiben. Diese beiden Functionen kann man auch bezüglich umformen in

$$22)\quad (\zeta(x, m) - K)^2 + (x - H)^2 = m^2$$

und

$$23)\quad (\pi(x, m) - \mathfrak{K})^2 + (x - \mathfrak{H})^2 = m^2$$

Wenn also für die gesuchte Fläche die mit der Coordinatenebene XY parallele Ebene genommen wird, so bekommt man Kreisbögen für die zu den gesuchten Curven gehörigen und in XY liegenden Projectionen, und zwar Kreisbögen, die einen gleichgrossen Halbmesser m haben.

Aber eben weil für die gesuchte Fläche eine mit XY parallele Ebene genommen wurde, so sind die gesuchten Curven ihren in XY liegenden Projectionen gleich, d. h. auch die gesuchten Curven sind Kreisbögen, wie zu erwarten war.

Gleichung XXIII geht jetzt über in

$$24)\quad m \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 - (x - H)^2}} + \frac{1}{\sqrt{m^2 - (x - \mathfrak{H})^2}} \right) \cdot dx = k$$

Nun muss noch die nichtidentische Gleichung 13, welche, wie man sieht, nur auf die gesuchten Curven und nicht auch auf die gesuchte Fläche Bezug hat, erfüllt werden. Dieses kann bekanntlich durch mancherlei Gränzbedingungen geschehen. Folgende einzige mag genügen.

G r ä n z b e d i n g u n g. Man errichte in den Punkten c und d der Abscissenaxe OX senkrechte Ebenen, so sind ce′ und dh′ die in der Coordinatenebene XY liegenden Spuren dieser Ebenen. Von diesen Ebenen wird die gesuchte Curve getroffen in vier Punkten, deren Projectionen e′, g′, h′, k′ sind. Auf der gesuchten Ebene wird also ein Stück begränzt von zwei Kreisbögen mit den Projectionen e′Dh′ und g′Ek′, und von zwei geraden Linien mit den Projectionen g′e′ und k′h′. Man hat also jetzt auf der gesuchten Ebene ein Stück mit der Projection g′e′Dh′k′E.

Man setze $Oc = a$, so ist $cg' = y'_a = \pi(a, m)$ und $ce' = y''_a = \zeta(a, m)$.

Man setze $Od = \alpha$, so ist $dk' = y'_\alpha = \pi(\alpha, m)$ und $dh' = y''_\alpha = \zeta(\alpha, m)$.

Sollen nun diese vier Gränzordinaten bezüglich die festen Werthe

$$b', \beta', b'', \beta''$$

haben; und sollen alle hier in Betracht zu ziehenden Curven durch die Punkte gehen, deren Projectionen e′, g′, h′, k′ sind; so müssen zwischen der gesuchten und allen hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichungen stattfinden

$$25)\quad \pi(a, m) = \pi(a, m) + \varkappa \cdot (\delta_1)\pi_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_1)^2\pi_a + \dots\dots\dots$$

$$26)\quad \zeta(a, m) = \zeta(a, m) + \varkappa \cdot (\delta_1)\zeta_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_1)^2\zeta_a + \dots\dots\dots$$

$$27)\quad \pi(\alpha, m) = \pi(\alpha, m) + \varkappa \cdot (\delta_1)\pi_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_1)^2\pi_\alpha + \dots\dots\dots$$

$$28)\quad \zeta(\alpha, m) = \zeta(\alpha, m) + \varkappa \cdot (\delta_1)\zeta_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_1)^2\zeta_\alpha + \dots\dots\dots$$

Es finden also folgende Gleichungen

Digitized by Google

$$_{(}\delta_{1)}\pi_a = 0, \quad _{(}\delta_{1)}\zeta_a = 0, \quad _{(}\delta_{1)}\pi_\alpha = 0, \quad _{(}\delta_{1)}\zeta_\alpha = 0,$$
$$_{(}\delta_{1)}^2\pi_a = 0, \quad _{(}\delta_{1)}^2\zeta_a = 0, \quad _{(}\delta_{1)}^2\pi_\alpha = 0, \quad _{(}\delta_{1)}^2\zeta_\alpha = 0$$

etc. etc.

statt. Somit fällt die Gleichung 13 von selbst hinweg, und die fünf Constanten m, H, K, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ bestimmen sich durch Gleichung 24 in Verbindung mit

$$29)\quad (b' - \mathfrak{K})^2 + (a - \mathfrak{H})^2 = m^2$$
$$30)\quad (\beta' - K)^2 + (a - H)^2 = m^2$$
$$31)\quad (b'' - \mathfrak{K})^2 + (\alpha - \mathfrak{H})^2 = m^2$$
$$32)\quad (\beta'' - K)^2 + (\alpha - H)^2 = m^2$$

Weil $z = A$, so folgt (aus Gleichung VII und VIII, Seite 683), dass bei jeder Bedeutung des x und des y sowohl $\delta V = 0$ als auch $\frac{d_y V}{dy} = 0$ sein muss. Es ist also auch

$$\delta V_{x,\zeta} = 0, \quad \delta V_{x,\pi} = 0, \quad \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\zeta} = 0, \quad \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\pi} = 0$$

Ferner, wie bereits bemerkt wurde, ist $V = 1$; und somit reducirt sich Gleichung XXVI auf

$$33)\quad _{(}\delta_{1)}^2 U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x,m)}^{\zeta(x,m)} \left(\left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)^2 \right) \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (_{(}\delta_{1)}^2\zeta - _{(}\delta_{1)}^2\pi) \cdot dx$$

Gleichung XXVIII reducirt sich in Folge alles Vorhergehenden zunächst auf

$$34)\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} \cdot _{(}\delta_{1)}\pi + \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} \cdot _{(}\delta_{1)}\zeta \right) \cdot dx = 0$$

Aus den Gleichungen 11 und 12 folgt bezüglich

$$35)\quad \frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{m}$$

und

$$36)\quad \frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} = -\frac{1}{\mathfrak{R}} = -\frac{1}{m}$$

Somit geht 34 über in

$$37)\quad \frac{1}{m} \cdot \int_a^\alpha (_{(}\delta_{1)}\zeta - _{(}\delta_{1)}\pi) \cdot dx = 0$$

Wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{m}$ weglässt, und für $_{(}\delta_{1)}\zeta$ und $_{(}\delta_{1)}\pi$ die Ausdrücke, welche in Nr. VII und XV stehen, zurückführt; so geht 37 über in

$$38)\quad \int_a^\alpha (\delta\zeta - \delta\pi) \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \left(\frac{d_m \zeta}{dm} - \frac{d_m \pi}{dm} \right) \cdot dx \right) \cdot \vartheta m = 0$$

Daraus folgt

$$39)\quad \vartheta m = - \frac{\int_a^\alpha (\delta\zeta - \delta\pi) \cdot dx}{\int_a^\alpha \left(\frac{d_m \zeta}{dm} - \frac{d_m \pi}{dm} \right) \cdot dx}$$

Gleichung XXIX reducirt sich in Folge alles Vorhergehenden zunächst auf

$$40)\quad \int_a^\alpha \Big\{ - \left(- \frac{1}{m} \cdot _{(}\delta_{1)}^2\pi + \frac{1}{m} \cdot _{(}\delta_{1)}^2\zeta \right)$$
$$+ \left(\frac{dx}{ds'}\right)^3 \cdot \left[\left(1 + \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{1)}\pi'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d_{(}\delta_{1)}\pi}{dx} \right)^2 \right] +$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{dx}{ds''}\right)^3\cdot\left[\left(1+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d_{[(\delta_1)]}z''}{dx}\right)^2+\left(\frac{d_{(\delta_1)}\zeta}{dx}\right)^2\right]\Big\}\cdot dx=0$$

Wenn man VII und XV nach allem x differentiirt, so gibt sich

$$41)\quad \frac{d_{(\delta_1)}\pi}{dx}=\frac{d\delta\pi}{dx}+\frac{d_x d_m\pi}{dx.dm}\cdot\vartheta m$$

und

$$42)\quad \frac{d_{(\delta_1)}\zeta}{dx}=\frac{d\delta\zeta}{dx}+\frac{d_x d_m\zeta}{dx.dm}\cdot\vartheta m$$

Weil $\frac{d_y z}{dy}=0$, so folgt aus den Gleichungen X und XVIII, dass sich $_{[(\delta_1)]}z'$ und $_{[(\delta_1)]}z''$ bezüglich auf $\delta z'$ und $\delta z''$ reduciren. Es ist also hier (in diesem zweiten Zusatze)

$$43)\quad \frac{d_{[(\delta_1)]}z'}{dx}=\frac{d\delta z'}{dx}$$

und

$$44)\quad \frac{d_{[(\delta_1)]}z''}{dx}=\frac{d\delta z''}{dx}$$

Somit geht Gleichung 40 über in

$$45)\quad \int_a^\alpha\Big\{-\left(-\frac{1}{m}\,{}_{(\delta_1)^2}\pi+\frac{1}{m}\cdot{}_{(\delta_1)^2}\zeta\right)$$
$$+\left(\frac{dx}{ds'}\right)^3\cdot\left[\left(1+\left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d\delta z'}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta\pi}{dx}+\frac{d_x d_m\pi}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)^2\right]$$
$$+\left(\frac{dx}{ds''}\right)^3\cdot\left[\left(1+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d\delta z''}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta\zeta}{dx}+\frac{d_x d_m\zeta}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)^2\right]\Big\}\cdot dx$$
$$=0$$

Man multiplicire diese Gleichung mit dem bereits angewendeten Factor $\mathfrak{N}$ (oder vielmehr mit m), addire dieses Product zu Gleichung 33, und reducire; so bleibt zuletzt

$$\text{XXXV)}\quad {}_{[(\delta_1)]^2}U=\int_a^\alpha\int_{\pi(x,m)}^{\zeta(x,m)}\left(\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right)\cdot dy\cdot dx$$
$$+m\cdot\int_a^\alpha\Big\{\left(\frac{dx}{ds'}\right)^3\cdot\left[\left(1+\left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d\delta z'}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta\pi}{dx}+\frac{d_x d_m\pi}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)^2\right]$$
$$+\left(\frac{dx}{ds''}\right)^3\cdot\left[\left(1+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d\delta z''}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\delta\zeta}{dx}+\frac{d_x d_m\zeta}{dx.dm}\cdot\vartheta m\right)^2\right]\Big\}\cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man noch ϑm zu eliminiren, was mittelst der Gleichung 39 geschieht. Doch diese Eliminatien ist nicht nöthig, man sieht gradezu, dass $_{[(\delta_1)]^2}U$ unter allen Umständen positiv bleibt, sobald m selbst positiv ist.

Zweiter Fall.

Die Fläche, auf welcher von einer gesuchten Curve mit vorgeschriebener Umfangsgrösse das kleinste Flächenstück eingeschlossen werden soll, sei eine gegebene Fläche.

Hier wird also die Function $z=\varphi(x,y)$ nicht mehr gesucht, sondern diese ist bestimmt vorgeschrieben. Es darf daher keine andere als die durch $z=\varphi(x,y)$ dargestellte Fläche hier in Betracht gezogen werden. Desshalb erleidet auch das z keine unmittelbare Mutation, d. h. bei jeder beliebigen Bedeutung des x und des y ist

$$\odot\qquad \delta z_{x,y}=0,\quad \delta^2 z_{x,y}=0,\quad \delta^3 z_{x,y}=0,\ \text{etc.}$$

Da diese Gleichungen nach x und nach y zugleich identisch sind, so sind auch folgende Gleichungen

Digitized by Google

$$\mathfrak{C} \begin{cases} \frac{d_x\delta z}{dx} = 0, \ \frac{d_y\delta z}{dy} = 0, \ \frac{d_x^2\delta z}{dx^2} = 0, \ \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} = 0, \text{ etc.} \\ \frac{d_x\delta^2 z}{dx} = 0, \ \frac{d_y\delta^2 z}{dy} = 0, \ \frac{d_x^2\delta^2 z}{dx^2} = 0, \ \frac{d_x d_y \delta^2 z}{dx \cdot dy} = 0, \text{ etc.} \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

nach x und nach y zugleich identisch.

Aus den allgemeinen Gleichungen ⊙ folgen auch noch folgende besondere:

$$\delta z_{x,\varkappa} = 0, \quad \delta z_{x,\zeta} = 0, \quad \delta z_{a,y} = 0, \quad \delta z_{\alpha,y} = 0,$$

$$\delta^2 z_{x,\varkappa} = 0, \quad \delta^2 z_{x,\zeta} = 0, \quad \delta^2 z_{a,y} = 0, \quad \delta^2 z_{\alpha,y} = 0,$$

etc. etc.

Aus den allgemeinen Gleichungen $\mathfrak{C}$ folgen ebenfalls folgende besondere

$$\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\varkappa} = 0, \quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta} = 0, \quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\varkappa} = 0, \quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta} = 0$$

etc. etc.

Die vier Gleichungen X, XI, XVIII, XIX reduciren sich also jetzt bezüglich auf

$$46) \quad {}_{[(\delta_1)]}z' = \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot \left(\delta\varkappa + \frac{d_m\varkappa}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$

$$47) \quad {}_{[(\delta_1)]^2}z' = \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)^2}\varkappa + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\varkappa} \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa^2$$

$$48) \quad {}_{[(\delta_1)]}z'' = \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \left(\delta\zeta + \frac{d_m\zeta}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$

$$49) \quad {}_{[(\delta_1)]^2}z'' = \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)^2}\zeta + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\zeta} \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta^2$$

Die Bedeutung der Ausdrücke ${}_{(\delta_1)}\varkappa$, ${}_{(\delta_1)^2}\varkappa$, ${}_{(\delta_1)}\zeta$, ${}_{(\delta_1)^2}\zeta$ ist durch die Gleichungen VII, VIII, XV, XVI gegeben.

Gleichung XXX reducirt sich also jetzt auf

$$\begin{aligned} \text{XXXVI)} \quad {}_{[(\delta_1)]}U = \int_a^\alpha \Bigg\{ \Bigg[& \left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \right) \cdot \frac{d_m\zeta}{dm} \\ & + \left(- V_{x,\varkappa} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \right) \cdot \frac{d_m\varkappa}{dm} \Bigg] \cdot \vartheta m \\ & + \left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \right) \cdot \delta\zeta \\ & + \left(- V_{x,\varkappa} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{d\varkappa}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{R}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \right) \cdot \delta\varkappa \Bigg\} \cdot dx \\ & + \mathfrak{R} \cdot \left[\frac{d\varkappa}{ds'} + \frac{dz'}{ds'} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \right]_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa_\alpha + \mathfrak{R} \cdot \left[\frac{d\zeta}{ds''} + \frac{dz''}{ds''} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \right]_\alpha \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta_\alpha \\ & - \mathfrak{R} \cdot \left[\frac{d\varkappa}{ds'} + \frac{dz'}{ds'} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa} \right]_a \cdot {}_{(\delta_1)}\varkappa_a - \mathfrak{R} \cdot \left[\frac{d\zeta}{ds''} + \frac{dz''}{ds''} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} \right]_a \cdot {}_{(\delta_1)}\zeta_a \end{aligned}$$

Dieser für ${}_{[(\delta_1)]}U$ hergestellte Ausdruck liefert nicht mehr und nicht weniger, als was man sucht, d. h. die auf der gegebenen Fläche gesuchte Curve mit vorgeschriebenem Umfange, von welcher das kleinste Flächenstück eingeschlossen wird.

Digitized by Google

Damit das abhängige ϑm zunächst unter dem Integralzeichen wegfalle, hat man folgende nach x identische Gleichung:

$$\text{XXXVII)}\quad \left(V_{x,\zeta} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right)\cdot\frac{d_m\zeta}{dm}$$

$$+\left(-V_{x,\pi} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\right)\cdot\frac{d_m\pi}{dm} = 0$$

Damit auch die mit $\delta\zeta$ und $\delta\pi$ versehenen Theilsätze unter dem Integralzeichen wegfallen, hat man noch folgende zwei nach x identische Gleichungen

$$\text{XXXVIII)}\quad V_{x,\zeta} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta} = 0$$

$$\text{XXXIX)}\quad -V_{x,\pi} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{d\pi}{ds'}\right)}{dx} - \mathfrak{N}\frac{d\left(\frac{dz'}{ds'}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi} = 0$$

Ausserdem hat man noch folgende nichtidentische Gleichung

$$\text{XL)}\quad \left[\frac{d\pi}{ds'} + \frac{dz'}{ds'}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\right]_\alpha\cdot(\delta_1\pi)_\alpha + \left[\frac{d\zeta}{ds''} + \frac{dz''}{ds''}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right]_\alpha\cdot(\delta_1\zeta)_\alpha$$

$$-\left[\frac{d\pi}{ds'} + \frac{dz'}{ds'}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\right]_a\cdot(\delta_1\pi)_a - \left[\frac{d\zeta}{ds''} + \frac{dz''}{ds''}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right]_a\cdot(\delta_1\zeta)_a = 0$$

Durch Integration der beiden Gleichungen XXXVIII und XXXIX geben sich die Functionen

$$y'' = \zeta(x, m) \quad\text{und}\quad y' = \pi(x, m)$$

und dadurch sind die in XY liegenden Projectionen der beiden gesuchten Curvenstücke dargestellt.

Man kann aber, ohne dass man diese beiden Gleichungen integrirt, schon Eigenschaften ausmitteln, welche allen Punkten zukommen, die irgend einer beliebigen Fläche und der auf ihr möglichen Curve mit vorgeschriebenem Umfange und mit dem kleinsten eingeschlossenen Flächeninhalte gemeinschaftlich sind. Man nehme zu diesem Ende Gleichung XXXVIII vor, und beachte, dass $\mathfrak{N}$ constant ist. Sie geht gradezu über in

$$50)\quad \frac{\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}}{V_{x,\zeta}} = \frac{1}{\mathfrak{N}}$$

Die Gleichung der zur gesuchten räumlichen Curve gehörigen Krümmungsebene, d. h. der Ebene, in welcher der Krümmungskreis liegt, ist im Allgemeinen folgende:

$$51)\quad \mathfrak{Z}\cdot(\mathfrak{z} - z) + \mathfrak{Y}\cdot(\mathfrak{y} - y) + \mathfrak{X}\cdot(\mathfrak{x} - x) = 0$$

Hier sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die zur Krümmungsebene gehörigen Coordinaten, dagegen x, y, z sind die Coordinaten des der gegebenen Fläche und der gesuchten Curve gemeinschaftlichen Punktes, wo man grade die Berührung wählt. Ferner ist bekanntlich

$$52)\quad \mathfrak{X} = dy\cdot d^2z - dz\cdot d^2y$$

$$53)\quad \mathfrak{Y} = dz\cdot d^2x - dx\cdot d^2z$$

$$54)\quad \mathfrak{Z} = dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x$$

wo man der Allgemeinheit wegen auch das Differential von x als veränderlich genommen hat.

Die Gleichung der zur gegebenen Fläche gehörigen Berührungsebene ist im Allgemeinen folgende:

$$55)\quad (\mathfrak{z}' - z) - q\cdot(\mathfrak{y}' - y) - p\cdot(\mathfrak{x}' - x) = 0$$

Digitized by Google

Hier sind $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ die zur Berührungsebene gehörigen Coordinaten; dagegen x, y, z sind die Coordinaten des der gegebenen Fläche und der gesuchten Curve gemeinschaftlichen Punktes, wo man grade die Berührung wählt.

Die Krümmungsebene und Berührungsebene bilden also miteinander einen Winkel ω, welcher gegeben ist durch

$$56)\quad \cos\omega = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{X}\cdot p - \mathfrak{Y}\cdot q}{(\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2})\,(\sqrt{1 + p^2 + q^2})}$$

Aber eben, weil hier nur solche Punkte der Fläche berücksichtigt werden dürfen, welche auch noch der gesuchten Curve zukommen; so muss hier y als Function von x behandelt werden, und man hat für die Punkte der Fläche, welche auch noch dem einen Zweige der gesuchten Curve gemeinschaftlich sind

$$57)\quad \cos\omega = \frac{\mathfrak{Z}_{x,\zeta} - \mathfrak{X}_{x,\zeta}\cdot p_{x,\zeta} - \mathfrak{Y}_{x,\zeta}\cdot q_{x,\zeta}}{(\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2})_{x,\zeta}\cdot(\sqrt{1 + p^2 + q^2})_{x,\zeta}}$$

während die drei Gleichungen 52, 53, 54 übergehen in

$$58)\quad \mathfrak{X}_{x,\zeta} = d\zeta\cdot d^2z'' - dz''\cdot d^2\zeta$$

$$59)\quad \mathfrak{Y}_{x,\zeta} = dz''\cdot d^2x - dx\cdot d^2z''$$

$$60)\quad \mathfrak{Z}_{x,\zeta} = dx\cdot d^2\zeta - d\zeta\cdot \delta^2x$$

Man hat desshalb auch

$$61)\quad \mathfrak{Z}_{x,\zeta} - \mathfrak{X}_{x,\zeta}\cdot p_{x,\zeta} - \mathfrak{Y}_{x,\zeta}\cdot q_{x,\zeta} = dx\cdot d^2\zeta - d\zeta\cdot d^2x$$
$$- (d\zeta\cdot d^2z'' - dz''\cdot d^2\zeta)\cdot p_{x,\zeta} - (dz''\cdot d^2x - dx\cdot d^2z'')\cdot q_{x,\zeta}$$

Aus der zur Fläche gehörigen Gleichung $z = \varphi(x, y)$ folgt der nach x genommene totale Differentialquotient

$$62)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{d_xz}{dx} + \frac{d_yz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

und wenn man $\zeta(x, m)$ an die Stelle des y setzt, und $\frac{d_xz}{dx}$ absondert; so bekommt man aus letzterer Gleichung

$$63)\quad p_{x,\zeta} = \frac{dz''}{dx} - q_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}$$

Wenn man jetzt $p_{x,\zeta}$ auf der rechten Seite der Gleichung 61 eliminirt, so bekommt man

$$64)\quad \mathfrak{Z}_{x,\zeta} - \mathfrak{X}_{x,\zeta}\cdot p_{x,\zeta} - \mathfrak{Y}_{x,\zeta}\cdot q_{x,\zeta} =$$
$$\frac{1}{dx}\cdot[(dx^2 + dz''^2)\cdot d^2\zeta - dx\cdot d\zeta\cdot d^2x - d\zeta\cdot dz''\cdot \delta^2z'']$$
$$+ \frac{q_{x,\zeta}}{dx}\cdot[(dx^2 + d\zeta^2)\cdot \delta^2z'' - dz''\cdot d\zeta\cdot d^2\zeta - dx\cdot dz''\cdot d^2x]$$

Diese Gleichung ist aber ganz gleichbedeutend mit

$$65)\quad \mathfrak{Z}_{x,\zeta} - \mathfrak{X}_{x,\zeta}\cdot p_{x,\zeta} - \mathfrak{Y}_{x,\zeta}\cdot q_{x,\zeta} = \left(\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot q_{x,\zeta}\right)\cdot ds''^3$$

Gleichung 57 geht also jetzt über in

$$66)\quad \cos\omega = \frac{ds''^3}{(\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2})_{x,\zeta}} \times \frac{\frac{d\left(\frac{d\zeta}{ds''}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dz''}{ds''}\right)}{dx}\cdot q_{x,\zeta}}{(\sqrt{1 + p^2 + q^2})_{x,\zeta}}$$

In Folge der Gleichung 50 geht aber 66 über in

Digitized by Google

$$67)\quad \cos\omega = \frac{1}{\mathfrak{R}} \times \frac{ds''^3}{(\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2})_{x,\zeta}}$$

Nun ist bekanntlich $\frac{ds''^3}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}}$ die Differentialformel für den Krümmungshalbmesser der räumlichen Curven; und wenn man diesen mit R bezeichnet, so geht Gleichung 67 über in

$$68)\quad \cos\omega = \frac{R}{\mathfrak{R}}$$

Durch diese Gleichung ist aber folgende Eigenschaft ausgesprochen, welche allen Punkten, die irgend einer Fläche und der auf ihr möglichen Curve mit vorgeschriebenem Umfange und mit dem kleinsten eingeschlossenen Flächenstücke gemeinschaftlich sind, zukommt:

„Der Cosinus des in irgend einem Punkte von der Berührungsebene der Fläche „und der Krümmungsebene der Curve gebildeten Winkels verhält sich jedes-„mal zum Cosinus des in irgend einem andern Punkte auf dieselbe Weise ge-„bildeten Winkels, wie die zu diesen beiden Punkten gehörigen Krümmungs-„halbmesser der Curve."

Für den Fall, dass man eine, in einer gegebenen Fläche liegende, Curve in eine Ebene abwickeln will, erinnere man sich an folgende Wahrheiten der analytischen Geometrie:

1) Wenn man in den auf irgend einer Fläche liegenden Punkt $\mathfrak{A}$ die Berührungsebene legt, und auch die Normallinie errichtet; so stehen Normallinie und Berührungsebene aufeinander senkrecht.

2) Wenn man durch denselben Punkt $\mathfrak{A}$ der Fläche eine mit allen ihren Punkten in die Fläche fallende Curve legt; so hat die zu diesem Punkte gehörige Krümmungsebene der Curve nicht nothwendig eine solche Lage, dass die Normallinie der Fläche in der Krümmungsebene der Curve liegt. (Dieses mag durch folgendes einfache Beispiel erläutert werden: Man lege gradezu in den Punkt $\mathfrak{A}$ der Fläche eine nicht in die Normallinie fallende Ebene, so wird dadurch die Fläche nach einer ebenen Curve geschnitten, welche in allen ihren Punkten diese schneidende Ebene zur Krümmungsebene hat. Und andere derartige Beispiele mehr.)

3) Weil in der (zur Curve gehörigen) Krümmungsebene der Krümmungskreis der Curve und dessen Halbmesser liegen; so müssen auch dieser Krümmungshalbmesser und die (zur Fläche gehörige) Normallinie, welche zu einem und demselben Punkte $\mathfrak{A}$ gehören, nicht nothwendig in eine und dieselbe grade Linie fallen.

4) Durch die (zur Fläche gehörige) Normallinie und durch den (zur Curve gehörigen) Krümmungshalbmesser, welche einem und demselben Punkte $\mathfrak{A}$ entsprechen, und sich in diesem Punkte schneiden, kann man eine Ebene $\mathfrak{E}$ legen; und diese Ebene steht senkrecht auf der zur Curve gehörigen Krümmungsebene. (Davon überzeugt man sich ganz allgemein dadurch, dass man die Gleichung der durch die Normallinie und durch den Krümmungshalbmesser gelegten Ebene $\mathfrak{E}$ herstellt. Diese Ebene $\mathfrak{E}$ und die Krümmungsebene bilden miteinander einen Winkel, für dessen Cosinus man den Ausdruck herstellen muss. In diesem Ausdrucke kommen die partiellen Differentialquotienten p und q vor. Im Zähler dieses Ausdruckes eliminire man p, was mittelst einer Gleichung, wie z. B. Gleichung 63 eine ist, geschieht. Dann kann man im Zähler einen gemeinschaftlichen Factor ausscheiden, welcher identisch Null ist. Der Zähler des Cosinus ist also Null, und somit steht die Ebene $\mathfrak{E}$ auf der Krümmungsebene senkrecht. Die Ausführung selbst ist leicht, und bleibt dem Leser überlassen.) Die Ebene $\mathfrak{E}$ steht aber, eben weil in ihr die Normallinie liegt, auch senkrecht auf der Berührungsebene. Daraus folgt:

5) Die Linie, nach welcher die Ebene $\mathfrak{E}$ und die Berührungsebene einander schneiden, und der Krümmungshalbmesser, als die Linie, nach welcher die Ebene $\mathfrak{E}$ und die Krümmungsebene einander schneiden, bestimmen den Winkel, welcher von Berührungsebene und Krümmungsebene gebildet wird.


Digitized by Google

6) Der Krümmungshalbmesser macht also mit der Berührungsebene ganz denselben Winkel ω, welcher von Berührungsebene und Krümmungsebene gebildet wird.

7) Aus Nr. 4 folgt, dass, wenn man aus dem Mittelpunkte des Krümmungskreises auf dessen Ebene ein Loth errichtet, dieses Loth die Normallinie in einem gewissen Punkte $\mathfrak{B}$ treffen muss; und daraus folgt weiter:

8) Wenn man vom Punkte $\mathfrak{B}$ als Mittelpunkte mit dem auf der Normallinie liegenden Stücke $\mathfrak{BA}$ eine Kugel beschreibt; so ist der zum Punkte $\mathfrak{A}$ gehörige Krümmungskreis, dessen Halbmesser bereits mit R bezeichnet ist, ein Parallelkreis dieser Kugel.

9) Diese Kugel hat mit der gegebenen Fläche im Punkte $\mathfrak{A}$ die Berührungsebene gemeinschaftlich.

10) Diejenige abwickelbare Fläche, von welcher diese Kugel nach der ganzen Ausdehnung des besagten Krümmungskreises berührt wird, ist also ein senkrechter Kegel, dessen Grundfläche der besagte Krümmungskreis, und dessen Seite, wenn man sie mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, durch folgende Gleichung

$$69)\quad \mathfrak{R} = \frac{R}{\cos\omega}$$

gegeben ist. Wickelt man nun diesen Krümmungskreis von der Kugel mittelst des angelegten Berührungskegels in eine Ebene ab; so geht der Krümmungskreis in einen Kreisbogen über, dessen Halbmesser die Seite $\mathfrak{R}$ des Kegels ist. Es findet also zwischen dem Krümmungskreise und seiner Abwickelung der Zusammenhang statt, welcher durch Gleichung 69 ausgesprochen ist.

Hiermit ist nun soviel Vorbereitung gegeben, dass man untersuchen kann, in welcher Beziehung der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes der auf einer gegebenen Fläche liegenden Curve zu dem Krümmungshalbmesser des entsprechenden Punktes der abgewickelten Curve steht. Man denke sich nemlich eine abwickelbare Fläche, von welcher die gegebene Fläche nach der ganzen Ausdehnung der in ihr liegenden Curve berührt wird, und mache dabei folgende Betrachtung:

Das Bogenelement der Curve in $\mathfrak{A}$ kann angesehen werden als dem Krümmungskreise der Curve selbst angehörig; und das diesem Bogenelemente entsprechende Element der abwickelbaren Berührungsfläche kann angesehen werden als ein Element des Kegels, welcher die Kugel vom Halbmesser $\mathfrak{BA}$ nach dem ganzen Krümmungskreise vom Halbmesser R berührt. Folglich gilt für dieses Element wiederum die Gleichung $\mathfrak{R} = \frac{R}{\cos\omega}$, wo $\mathfrak{R}$ zunächst die Seite des Kegels bedeutet, die aber nach vollbrachter Abwicklung in den Krümmungshalbmesser des betreffenden Punktes der abgewickelten Curve übergeht.

Schreitet man von dem bis jetzt betrachteten Punkte zu dem nächstgelegenen Punkte, der wiederum dieser Curve und der gegebenen Fläche gemeinschaftlich ist, vorwärts, so mögen die zu diesem Punkte gehörige Berührungsebene und Krümmungsebene einen Winkel ω' miteinander bilden, und der betreffende Krümmungshalbmesser mag R' sein. Der betreffende Krümmungshalbmesser $\mathfrak{R}'$ der abgewickelten Curve ist dann gegeben durch die Gleichung

$$70)\quad \mathfrak{R}' = \frac{R'}{\cos\omega'}$$

Und so wiederholt sich die Analogie des Ergebnisses für alle Punkte dieser Curve.

Die bis jetzt vorgenommene Untersuchung gilt für jede beliebige auf irgend einer Fläche mögliche Curve, wenn sie in eine Ebene abgewickelt wird. Beschränkt man aber diese Untersuchung, und betrachtet man nur die auf einer Fläche mögliche Curve, welche bei vorgeschriebenem Umfange das kleinste Flächenstück begränzt; so wird auch das Ergebniss ein specielleres.

Verbindet man zu diesem Ende Gleichung 68 und 69; so fällt R und cos ω von selbst hinweg, und es bleibt nur

$$71)\quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$$

Digitized by Google

Für den nächstgelegenen Punkt würde Gleichung 68 übergehen in $\cos\omega' = \frac{R'}{\mathfrak{R}}$ und wenn man diese Gleichung mit 70 verbindet, so gibt sich

$$72)\quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$$

und so für alle Punkte. Dadurch ist aber eine zweite Eigenschaft ausgesprochen, welche allen Punkten, die jeder beliebigen Fläche und der auf ihr möglichen Curve mit vorgeschriebenem Umfange und mit dem kleinsten eingeschlossenen Flächenstücke gemeinschaftlich sind, zukommt:

„Wird eine solche Curve mittelst einer angelegten abwickelbaren Berührungs-„fläche in eine Ebene abgewickelt, so ist der Krümmungshalbmesser der abge-„wickelten Curve unveränderlich. die abgewickelte Curve selbst ist also ein „Kreisbogen."

Zu ganz gleichen Ergebnissen würde man gelangen, wenn man jetzt auch noch Gleichung XXXIX vornehmen würde. Dieser Arbeit braucht man sich aber nicht zu unterziehen.

Es ist nun leicht, bestimmte Flächen vorzunehmen, und auf dieselben die hiesige (für jede Fläche giltige) Untersuchung anzuwenden.

Auch ist die Gränzengleichung XL noch zu erfüllen, zu welchem Ende man Gränzbedingungen aufstellen muss.

Der Herstellung des Prüfungsmittels steht keine Schwierigkeit mehr entgegen.

Diese Aufgabe ist besonders geeignet, die Wichtigkeit meiner Idee der zusammengesetzten Mutationen darzuthun; denn ohne dieselben würden in sehr vielen Ausdrücken und Gleichungen ganze Theilsätze fehlen. So z. B. würde (Seite 698) in jeder der beiden Gleichungen 5 und 6 der letzte Theilsatz fehlen.

Aufgabe 283.

Man sucht unter allen Flächen, welche, zwischen zwei festen parallelen Ebenen und zwischen zwei gegebenen Flächen erstreckt, einen gleichgrossen Flächeninhalt haben, diejenige heraus, die den grössten oder kleinsten Körper begränzt.

Einleitung.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man die Abscissenaxe X so nimmt, dass sie auf den beiden parallelen Gränzebenen senkrecht steht. Man nehme dann irgend einen Punkt dieser Axe zum Coordinatenanfange, wobei der ersten Gränzebene die feste Abscisse $x = a$, und der zweiten die feste Abscisse $x = \alpha$ entsprechen mag. Die auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Gleichungen der beiden Gränzflächen mögen dann sein

$$\text{I)}\quad c = f'(x, y), \qquad \text{und} \qquad \text{II)}\quad \gamma = f''(x, y)$$

Auch bedarf es nicht der Erinnerung, dass die Gleichung der noch zu suchenden Fläche ebenfalls auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogen werden muss.

Von der gesuchten Fläche werden die beiden Gränzebenen nach ebenen Curven, dagegen die beiden Gränzflächen nach räumlichen Curven geschnitten; und diese letzteren müssen gleichfalls noch aufgesucht werden.

Die hier vorgelegte Aufgabe verlangt also für z, für $\pi(x)$ und für $\zeta(x)$ solche Functionen, dass dabei das Integral

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} z \cdot dy \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während die für z gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, welche alle bei den für $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ gesuchten Functionen dem Integral

Digitized by Google

$$\text{IV)}\quad \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2} \right) \cdot dy \cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth beilegen.

A) Man nehme an, die gesuchte Fläche sei gefunden, und habe die Gleichung

$$\text{V)}\quad z = \varphi(x, y, m)$$

in welcher, wenn das bestimmte Integral IV einen vorgeschriebenen Werth bekommen soll, der willkürliche Constante m noch so eingerichtet werden kann, dass dieses Integral eben den Werth bekommt.

Die der gesuchten Fläche stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen sind also wegen der Werthänderungen des m nur durch unmittelbare gemischte Mutationen, d. h. durch folgende Reihe

$$\text{VI)}\quad z + {}_{(}\Delta_{1)}z = \varphi(x, y, m) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}\varphi(x, y, m) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2\varphi(x, y, m) + \ldots\ldots$$

oder kürzer durch

$$\text{VII)}\quad z + {}_{(}\Delta_{1)}z = \varphi(x, y, m) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{1)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{1)}^2 z + \ldots\ldots\ldots$$

darstellbar. Hier ist (man sehe Seite 611)

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{1)}z = \delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{1)}^2 z = \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_m \delta z}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 z}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

Auch ist zu beachten, dass man sich jetzt unter δz, $\delta^2 z$, etc. ganz beliebige Functionen von x. y, m zu denken hat. Aus VIII folgt

$$\text{X)}\quad \frac{d_x {}_{(}\delta_{1)}z}{dx} = \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_x d_m z}{dx \,.\, dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y {}_{(}\delta_{1)}z}{dy} = \frac{d_y \delta z}{dy} + \frac{d_y d_m z}{dy \,.\, dm} \cdot \vartheta m$$

B) Man nehme an, es seien auch die Functionen $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ gefunden; dann sind die ihnen stetsfort nächstanliegenden Nachbarfunctionen durch unmittelbare reine Mutationen, d. h. durch folgende Reihen

$$\text{XII)}\quad \zeta(x) + \varkappa \cdot \delta\zeta(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\zeta(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\zeta(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{XIII)}\quad \pi(x) + \varkappa \cdot \delta\pi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\pi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\pi(x) + \ldots\ldots\ldots$$

dargestellt.

Wenn man die beiden Gleichungen III und IV mutirt, so hat man an die Stelle des z die Reihe VII, dagegen an die Stelle von $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ hat man bezüglich die Reihen XII und XIII zu setzen; oder mit andern Worten: Das z erleidet eine unmittelbare gemischte Mutation, während $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ nur unmittelbare reine Mutationen erleiden.

Die beiden Gleichungen III und IV erleiden also zusammengesetzte gemischte Mutationen. Man mutire wirklich, und setze, so oft es bequem ist, ζ und π bezüglich statt $\zeta(x)$ und $\pi(x)$; so bekommt man aus III

$$\text{XIV)}\quad {}_{((}\delta_{1))}U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} {}_{(}\delta_{1)}z \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (z_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - z_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

und aus Gleichung IV bekommt man

Digitized by Google

$$\text{XV)} \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(P \cdot \frac{d_x({}_{\delta_1}) z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y({}_{\delta_1}) z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx = 0$$

Die Bedeutung von P, Q und V ist bereits (aus Aufg. 281) bekannt.

Man multiplicire letztere Gleichung mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) constanten Factor L, und addire dieses Product zu XIV; so wird dadurch ${}_{[(\delta_1)]}U$ nicht im Geringsten geändert. Man forme auch noch um, und setze für ${}_{(\delta_1)}z$ seinen Ausdruck ein; so bekommt man

$$\text{XVI)} \quad {}_{[(\delta_1)]}U =$$

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left[\left(1 - L\frac{d_x P}{dx} - L\frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z + \left(1 - L\frac{d_x P}{dx} - L\frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dy \cdot dx$$

$$+ L \cdot \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{\alpha,y} \cdot dy - L \cdot \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(z + LV)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta + L \cdot \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. - (z + LV)_{x,\pi} \cdot \delta\pi - L \cdot \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm} \cdot \vartheta m\right)_{x,\pi}\right] \cdot dx$$

Damit das abhängige ϑm zunächst unter dem doppelten Integralzeichen wegfalle, lasse man die nach x und y identische Gleichung

$$\text{XVII)} \quad 1 - L\frac{d_x P}{dx} - L\frac{d_y Q}{dy} = 0$$

stattfinden. Diese Gleichung ist also auch zugleich Hauptgleichung, und als Gränzengleichung hat man

$$\text{XVIII)} \quad L \cdot \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} P_{\alpha,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\vartheta m\right)_{\alpha,y} \cdot dy - L \cdot \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} P_{a,y} \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\vartheta m\right)_{a,y} \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \left[(z + LV)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta + L\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. - (z + LV)_{x,\pi} \cdot \delta\pi - L\left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\pi}\right] \cdot dx = 0$$

Die Hauptgleichung XVII ist dieselbe, wie Gleichung VII oder IX in der 262[sten] Aufgabe, wo b und β constant sind. Jene Aufgabe ist aber ein specieller Fall der hiesigen; denn wo hier $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ steht, steht dort b und β. Die hiesige Gleichung XVI reducirt sich auf die dortige VI, wenn man $\pi(x) = \pi(a) = \pi(\alpha) = b$ und $\zeta(x) = \zeta(a) = \zeta(\alpha) = \beta$ setzt; denn dabei ist $\frac{d\pi(x)}{dx} = 0$, $\frac{d\zeta(x)}{dx} = 0$, $\delta\pi(x) = 0$, $\delta\zeta(x) = 0$, etc. etc.

Man ist nun auf dem Punkte, verschiedene Gränzbedingungen aufzustellen, wie dieses in der 281[sten] Aufgabe geschehen ist.

Specieller Gränzfall.

Man sucht unter allen Flächen, welche den nemlichen Flächeninhalt haben, aber von jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind, diejenige, die zwischen den vorgeschriebenen Gränzen den grössten oder kleinsten Körper einschliesst.

Hier müssen zunächst folgende zwei nach y identische Gleichungen

$$P_{a,y} = 0 \quad \text{und} \quad P_{\alpha,y} = 0$$

stattfinden. Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich folgende zwei einfachere

$$1) \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} = 0, \quad \text{und} \quad 2) \quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} = 0$$

Digitized by Google

und man hat wieder (wie im ersten Falle der 281[sten] Aufg.) das Ergebniss, dass die gesuchte Fläche auf den beiden parallelen Gränzebenen senkrecht steht.

Wegen der beiden letzten Gleichungen reducirt sich nun die Gränzengleichung auf

$$\text{XIX)}\quad \int_a^\alpha \Big[(z + LV)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta + L\left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)\cdot\left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\zeta}$$

$$- (z + LV)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa - L\left(Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right)\cdot\left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\varkappa}\Big]\cdot dx = 0$$

Weil die gesuchte Fläche die beiden Gränzflächen schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittscurven folgende zwei Gleichungen

$$3)\quad z_{x,\varkappa} = f'(x, \varkappa(x)), \qquad \text{und} \qquad 4)\quad z_{x,\zeta} = f''(x, \zeta(x))$$

stattfinden. Beide sind identische Gleichungen, d. h. gelten bei jedem Werthe des x. Wenn man sie einer Mutation unterwirft, so hat man zu beachten, dass $c = f'(x, y)$ und $\gamma = f''(x, y)$ bestimmt gegebene Ausdrücke sind, welche nur eine einfache (und zwar mittelbar reine) Mutation erleiden können, dadurch dass die für $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ zu suchenden Functionen unmittelbar rein mutirt werden. Dagegen die beiden Ausdrücke $z_{x,\varkappa}$ und $z_{x,\zeta}$ erleiden zusammengesetzte gemischte Mutationen, indem z unmittelbar gemischt und zugleich $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ unmittelbar rein mutirt werden.

Zusatz. Zwischen der hiesigen und der vorigen Aufgabe besteht ein wesentlicher Unterschied.

α) Bei der hiesigen Aufgabe ist z schon ursprünglich eine Function von x, y, m, d. h. in der hiesigen Function z ist das m schon unmittelbar enthalten, während in den hier für $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ gesuchten Functionen kein m vorkommt. Dagegen

β) bei der vorigen Aufgabe war z ursprünglich nur eine Function von x und y, während erst in den daselbst für y gesuchten Functionen $\varkappa(x, m)$ und $\zeta(x, m)$ das m vorkam, so dass daselbst in den Ausdrücken $z_{x,\varkappa}$ und $z_{x,\zeta}$ das m erst mittelbar enthalten war. (Man vergleiche den Zusatz 1 in der vorigen Aufgabe.)

Sonach bekommt man aus Gleichung 3

$$5)\quad \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\varkappa} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa = \left(\frac{d_y f'(x, y)}{dy}\right)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa$$

und aus 4 bekommt man

$$6)\quad \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\zeta} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta = \left(\frac{d_y f''(x, y)}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta$$

Gebraucht man die schon früher (in Aufg. 281) angewendeten Abkürzungszeichen; so folgt aus diesen Gleichungen

$$7)\quad \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\varkappa} = (q' - q)_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa$$

und

$$8)\quad \left(\delta z + \frac{d_m z}{dm}\,\vartheta m\right)_{x,\zeta} = (q'' - q)_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta$$

Substituirt man diese beiden Ausdrücke in XIX, so bekommt man

$$\text{XX)}\quad \int_a^\alpha \Big\{\Big[z_{x,\zeta} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\zeta}}\cdot\Big((1+p^2+q\cdot q'')_{x,\zeta} - (p(q''-q))_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\Big)\Big]\cdot\delta\zeta$$

$$- \Big[z_{x,\varkappa} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\varkappa}}\cdot\Big((1+p^2+q\cdot q')_{x,\varkappa} - (p(q'-q))_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\Big)\Big]\cdot\delta\varkappa\Big\}\,.\,dx = 0$$

Weil aber $\delta\zeta$ und $\delta\varkappa$ zwei ganz willkürliche und untereinander unabhängige Functionen von x vorstellen; so zerlegt sich letztere Gleichung in folgende zwei einzelne:

$$9)\quad z_{x,\zeta} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\zeta}}\cdot\left((1 + p^2 + p\cdot q'')_{x,\zeta} - (p(q'' - q))_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right) = 0$$

und

Digitized by Google

$$10)\quad z_{x,\varkappa} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\varkappa}} \cdot \left((1 + p^2 + q \cdot q')_{x,\varkappa} - (p(q' - q))_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx}\right) = 0$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man die totalen Differentialquotienten $\frac{d\varkappa}{dx}$ und $\frac{d\zeta}{dx}$ entfernt. Weil nemlich, wie schon einmal bemerkt, die Gleichungen 3 und 4 identische sind; so kann man daraus (man vergleiche die Gleichungen 15 und 16 der 281[sten] Aufg.) bezüglich ableiten

$$11)\quad (p - p')_{x,\varkappa} = (q' - q)_{x,\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx}$$

und

$$12)\quad (p - p'')_{x,\zeta} = (q'' - q)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}$$

Eliminirt man jetzt $\frac{d\varkappa}{dx}$ und $\frac{d\zeta}{dx}$ aus den Gleichungen 9 und 10; so gehen diese über in

$$13)\quad z_{x,\zeta} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\zeta}} \cdot (1 + p \cdot p'' + q \cdot q'')_{x,\zeta} = 0$$

und

$$14)\quad z_{x,\varkappa} + \frac{L}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\varkappa}} \cdot (1 + p \cdot p' + q \cdot q')_{x,\varkappa} = 0$$

Die vier Gleichungen 1, 2, 3, 4 dienen dazu, um die zwei willkürlichen Functionen zu bestimmen, welche durch Integration der Hauptgleichung eingegangen sind. Hat man nun für z eine ganz bestimmte Function von x und y hergestellt; so führe man diese in die Gleichungen 13 und 14 ein, und ermittle die für $\varkappa(x)$ und $\zeta(x)$ gesuchten Functionen von x.

Hat man aber alle diese Stücke bestimmt, so wird immer noch wenigstens ein willkürlicher Constanter zurückbleiben; und man kann diesen, oder, wenn es vortheilhaft ist, einen aus diesem gebildeten Ausdruck mit m bezeichnen. In hiesiger Aufgabe wird es in der Regel genügen, m statt L zu setzen.

Nun ist vorgeschrieben, dass zwischen den Gränzen von a bis α und von $\varkappa(x)$ bis $\zeta(x)$ alle in Betracht zu ziehenden Flächen einen gleichgrossen Flächeninhalt haben müssen; und wenn diesem Flächeninhalte die bestimmte Grösse g^2 zukommen soll, so hat man die Gleichung

$$\text{XXI)}\quad \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx = g^2$$

welche dazu dient, den Constanten m zu bestimmen. Fehlt aber letztere Gleichung, so kann die gesuchte Fläche noch einer andern Bedingung unterworfen werden. (Man vergleiche den ersten Gränzfall der 217[ten] Aufg.)

Für das Prüfungsmittel bekommt man in diesem Gränzfalle

$$(\delta_1)^2 U = \int_a^\alpha \int_{\varkappa(x)}^{\zeta(x)} \frac{L}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(q\frac{d_x(\delta_1)z}{dx} - p\frac{d_y(\delta_1)z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x(\delta_1)z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y(\delta_1)z}{dy}\right)^2\right].dy.dx$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(L \cdot \left(P s'' + Q t'' - \frac{d_x P}{dx}(q'' - q) + \frac{d_y P}{dy}(p'' - p)\right)_{x,\zeta} + (2q'' - q)_{x,\zeta}\right) \cdot \delta\zeta^2\right.$$

$$\left. - \left(L \cdot \left(P s' + Q t' - \frac{d_x P}{dx}(q' - q) + \frac{d_y P}{dy}(p' - p)\right)_{x,\varkappa} + (2q' - q)_{x,\varkappa}\right) \cdot \delta\varkappa^2\right] \cdot dx$$

Unter dem doppelten Integralzeichen hätte man für $\frac{d_x(\delta_1)z}{dx}$ und $\frac{d_y(\delta_1)z}{dy}$ noch die entsprechenden Ausdrücke einzusetzen, und dann ϑm zu eliminiren. Dieser Weitläufigkeit braucht man sich jedoch nicht zu unterziehen, sondern man erkennt ohneweiters, dass es von L abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, d. h. wenn



re concave Seite gegen die Coordinatenebene XY wendet, so ist der er ein Maximum-stand; wenn aber die Fläche ihre convexe Seite enebene XY wendet, so ist der eingeschlossene Körper ein Mini-

(in Aufgabe 218) unter allen ebenen Curven, welche einerlei on jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind, diejenige suchte, egebenen Gränzcurven den grössten oder kleinsten Flächeninhalt nan (Seite 501) ein Prüfungsmittel, das dem hiesigen ganz analog h die Gleichungen 13 und 14, in welche hier die Gränzengleichung rtigen (Nr. 7 und 8 Seite 500) analog.
e kann man sich nach Belieben bilden.
die Schlussbemerkung zu Aufgabe 288.)

Aufgabe 284.

ler mit den Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ ge-
nd man sucht z als solche Function der beiden Veränderlichen x noch zwei solche Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ des einzigen Veränder-des Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$$

der Minimum-stand wird.
von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein Anfange der 277sten Aufg.) erläutert.
Gleichung I einer zusammengesetzten Mutation, und setze, so oft π bezüglich statt $\zeta(x)$ und $\pi(x)$; dann bekommt man (nach dem Aufg.) im Allgemeinen

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

nen Ausdruck ein, und gebraucht man dabei die schon früher (in ten Abkürzungszeichen; so geht Gleichung II über in

$$= \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left[\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + (Ix) \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + (Iy) \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{d_x^2 \delta z}{dx^2} + (IIxy) \cdot \frac{d_x d_y \delta z}{dx \cdot dy} + (IIy^2) \cdot \frac{d_y^2 \delta z}{dy^2} \right] \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

ekommt man zunächst

$$\text{IV)}\quad (\delta)U =$$

$$\frac{(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy} + \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2} \right] \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$\frac{) \cdot \delta z)}{dy} - \frac{d_y\left(\frac{d_x(IIxy)}{dx} \delta z\right)}{dy} - \frac{d_y\left(\frac{d_y(IIy^2)}{dy} \delta z\right)}{dy} + \frac{d_y\left((IIy^2) \frac{d_y \delta z}{dy}\right)}{dy}$$

$$) - \frac{d_x\left(\frac{d_x(IIx^2)}{dx} \delta z\right)}{dx} - \frac{d_x\left(\frac{d_y(IIxy)}{dy} \delta z\right)}{dx} + \frac{d_x\left((IIx^2) \frac{d_x \delta z}{dx}\right)}{dx}$$

$$\frac{xy) \cdot \delta z)}{\cdot dy} \right] \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

Digitized by Google

Nun gibt sich gradezu

$$\text{V)}\quad \int_a^\alpha\int_\pi^\zeta\left[\frac{d_y((Iy)\cdot\delta z)}{dy}-\frac{d_y\left(\frac{d_x(IIxy)}{dx}\,\delta z\right)}{dy}-\frac{d_y\left(\frac{d_y(IIy^2)}{dy}\,\delta z\right)}{dy}+\frac{d_y\left((IIy^2)\,\frac{d_y\delta z}{dy}\right)}{dy}\right].dy.dx$$

$$=\int_a^\alpha\left[\left((Iy)-\frac{d_x(IIxy)}{dx}-\frac{d_y(IIy^2)}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\delta z_{x,\zeta}+(IIy^2)_{x,\zeta}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right.$$

$$\left.-\left((Iy)-\frac{d_x(IIxy)}{dx}-\frac{d_y(IIy^2)}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot\delta z_{x,\pi}-(IIy^2)_{x,\pi}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi}\right]\cdot dx$$

Ferner ist nach der schon früher (Seite 674—676) gegebenen Anleitung

$$\text{VI)}\quad \int_a^\alpha\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)}\left[\frac{d_x((Ix)\cdot\delta z)}{dx}-\frac{d_x\left(\frac{d_x(IIx^2)}{dx}\,\delta z\right)}{dx}-\frac{d_x\left(\frac{d_y(IIxy)}{dy}\,\delta z\right)}{dx}\right]\cdot dy\cdot dx$$

$$=\int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)}\left((Ix)-\frac{d_x(IIx^2)}{dx}-\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y}\cdot dy$$

$$-\int_{\pi(a)}^{\zeta(a)}\left((Ix)-\frac{d_x(IIx^2)}{dx}-\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{a,y}\cdot\delta z_{a,y}\cdot dy$$

$$-\int_a^\alpha\left[\left((Ix)-\frac{d_x(IIx^2)}{dx}-\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\delta z_{x,\zeta}\right.$$

$$\left.-\left((Ix)-\frac{d_x(IIx^2)}{dx}-\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot\frac{d\pi}{dx}\cdot\delta z_{x,\pi}\right]\cdot dx$$

Auf gleiche Weise bekommt man

$$\text{VII)}\quad \int_a^\alpha\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)}\left(\frac{d_x\left((IIx^2)\,\frac{d_x\delta z}{dx}\right)}{dx}\right)\cdot dy\cdot dx=$$

$$\int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)}(IIx^2)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot dy-\int_{\pi(a)}^{\zeta(a)}(IIx^2)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y}\cdot dy$$

$$-\int_a^\alpha\left[(IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta}-(IIx^2)_{x,\pi}\cdot\frac{d\pi}{dx}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\pi}\right]\cdot dx$$

Da, wo nach x integrirt werden soll, darf der partielle Differentialquotient $\frac{d_x\delta z}{dx}$ nicht unter dem Integralzeichen bleiben. Man hat also letzteren Ausdruck noch weiter umzuformen; und zu diesem Ende setze man

$$\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\delta z_{x,\zeta}\right)}{dx}=\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx}\cdot\delta z_{x,\zeta}$$

$$+(IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\left(\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta}+\frac{d\zeta}{dx}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}\right)$$

Daraus folgt durch Uebertragen

$$\text{VIII)}\quad (IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\zeta}=\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\cdot\delta z_{x,\zeta}\right)}{dx}$$

$$-\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx}\cdot\delta z_{x,\zeta}-(IIx^2)_{x,\zeta}\cdot\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

Auf dieselbe Weise bekommt man

Digitized by Google

$$)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\pi} = \frac{d\left((IIx^2)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi}\right)}{dx}$$

$$\frac{x^2)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx})}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi} - (IIx^2)_{x,\pi} \cdot \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi}$$

etzten Ausdrücke in Gleichung VII ein, und wende auf die to-
nten die Integration an; so bekommt man

$$) \quad \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x\left((IIx^2) \cdot \frac{d_x\delta z}{dx}\right)}{dx}\right) \cdot dy \cdot dx =$$

$$)_{\alpha,y} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot dy - \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} (IIx^2)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{a,y} \cdot dy$$

$$\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta} + (IIx^2)_{x,\zeta} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

$$\frac{)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx})}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi} - (IIx^2)_{x,\pi} \cdot \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi}\Big] \cdot dx$$

$$_{,\zeta(\alpha)} \cdot \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} \cdot \delta z_{\alpha,\zeta(\alpha)} + (IIx^2)_{a,\zeta(a)} \cdot \frac{d\zeta(a)}{da} \cdot \delta z_{a,\zeta(a)}$$

$$_{,\pi(\alpha)} \cdot \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha} \cdot \delta z_{\alpha,\pi(\alpha)} - (IIx^2)_{a,\pi(a)} \cdot \frac{d\pi(a)}{da} \cdot \delta z_{a,\pi(a)}$$

$$XI) \quad \int_a^\alpha \int_\pi^\zeta \left(\frac{d_x d_y((IIxy) \cdot \delta z)}{dx \cdot dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

$$\left[\left(\frac{d_x((IIxy) \cdot \delta z)}{dx}\right)_{x,\zeta} - \left(\frac{d_x((IIxy) \cdot \delta z)}{dx}\right)_{x,\pi}\right] \cdot dx$$

nur der nach allem ausserhalb y befindlichen x genommene par-
nt, während auch y eine Function von x ist. Man kann also
zu nach x integriren, sondern muss ihn vorher noch umformen.
man sich folgende Gleichung

$$\frac{d\left((IIxy)_{x,\zeta} \cdot \delta z_{x,\zeta}\right)}{dx} = \left(\frac{d_x((IIxy) \cdot \delta z)}{dx}\right)_{x,\zeta}$$

$$\left(\frac{IIxy)}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta} + (IIxy)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

bertragen

$$I) \quad \left(\frac{d_x((IIxy) \cdot \delta z)}{dx}\right)_{x,\zeta} = \frac{d\left((IIxy)_{x,\zeta} \cdot \delta z_{x,\zeta}\right)}{dx}$$

$$\left(\frac{IIxy)}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \cdot \delta z_{x,\zeta} - (IIxy)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

kommt man

$$I) \quad \left(\frac{d_x((IIxy) \cdot \delta z)}{dx}\right)_{x,\pi} = \frac{d\left((IIxy)_{x,\pi} \cdot \delta z_{x,\pi}\right)}{dx}$$

$$\left(\frac{IIxy)}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} \cdot \delta z_{x,\pi} - (IIxy)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} \cdot \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\pi}$$


Digitized by Google

Man führe die zwei letzten Ausdrücke in Gleichung XI ein, und wende auf die totalen Differentialquotienten die Integration an; so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x d_y((IIxy)\cdot \delta z)}{dx \cdot dy}\right)\cdot dy \cdot dx =$$

$$(IIxy)_{\alpha,\zeta(\alpha)}\cdot \delta z_{\alpha,\zeta(\alpha)} - (IIxy)_{a,\zeta(a)}\cdot \delta z_{a,\zeta(a)} - (IIxy)_{\alpha,\pi(\alpha)}\cdot \delta z_{\alpha,\pi(\alpha)} + (IIxy)_{a,\pi(a)}\cdot \delta z_{a,\pi(a)}$$

$$-\int_a^\alpha \Bigg[\left(\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx}\cdot \delta z_{x,\zeta} + (IIxy)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx}\cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

$$-\left(\frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot \frac{d\pi}{dx}\cdot \delta z_{x,\pi} - (IIxy)_{x,\pi}\cdot \frac{d\pi}{dx}\cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\pi}\Bigg]\cdot dx$$

Man substituire jetzt diese (in V, VI, X, XIV befindlichen) Ausdrücke in III, so bekommt man

$$\text{XV)}\quad (\delta)U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \Bigg[\frac{d_z V}{dz} - \frac{d_x(Ix)}{dx} - \frac{d_y(Iy)}{dy}$$

$$+ \frac{d_x^2(IIx^2)}{dx^2} + \frac{d_x d_y(IIxy)}{dx\cdot dy} + \frac{d_y^2(IIy^2)}{dy^2}\Bigg]\cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} \Bigg[\left((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot \delta z_{\alpha,y} + (IIx^2)_{\alpha,y}\cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y}\Bigg]\cdot dy$$

$$- \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} \Bigg[\left((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx} - \frac{d_y(IIxy)}{dy}\right)_{a,y}\cdot \delta z_{a,y} + (IIx^2)_{a,y}\cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y}\Bigg]\cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Bigg\{ V_{x,\zeta}\cdot \delta\zeta + \Bigg[\left((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

$$- \left((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx}\right)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx}\Bigg]\cdot \delta z_{x,\zeta}$$

$$+ \left[(IIy^2)_{x,\zeta} - (IIxy)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx} + (IIx^2)_{x,\zeta}\cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right]\cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\zeta}$$

$$- V_{x,\pi}\cdot \delta\pi - \Bigg[\left((Iy) - \frac{d_x(IIxy)}{dx} - \frac{d_y(IIy^2)}{dy}\right)_{x,\pi}$$

$$- \left((Ix) - \frac{d_x(IIx^2)}{dx}\right)_{x,\pi}\cdot \frac{d\pi}{dx} + \frac{d\left((IIx^2)_{x,\pi}\cdot \frac{d\pi}{dx}\right)}{dx}\Bigg]\cdot \delta z_{x,\pi}$$

$$- \left[(IIy^2)_{x,\pi} - (IIxy)_{x,\pi}\cdot \frac{d\pi}{dx} + (IIx^2)_{x,\pi}\cdot \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2\right]\cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,\pi}\Bigg\}\cdot dx$$

$$+ \left((IIxy)_{\alpha,\zeta(\alpha)} - (IIx^2)_{\alpha,\zeta(\alpha)}\cdot \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha}\right)\delta z_{\alpha,\zeta(\alpha)} - \left((IIxy)_{a,\zeta(a)} - (IIx^2)_{a,\zeta(a)}\cdot \frac{d\zeta(a)}{da}\right)\delta z_{a,\zeta(a)}$$

$$- \left((IIxy)_{\alpha,\pi(\alpha)} - (IIx^2)_{\alpha,\pi(\alpha)}\cdot \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha}\right)\delta z_{\alpha,\pi(\alpha)} + \left((IIxy)_{a,\pi(a)} - (IIx^2)_{a,\pi(a)}\cdot \frac{d\pi(a)}{da}\right)\delta z_{a,\pi(a)}$$

Dieser Ausdruck ist nun soweit gebracht, dass kein Mutationscoefficient mehr nach einem Elemente differentiirt ist, nach welchem auch integrirt werden soll. Es lässt sich also keine fernere Transformation mehr anbringen.

Der totale Differentialquotient $\frac{d\left((IIx^2)_{x,\zeta}\cdot \frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx}$**, in seine Bestandtheile zerlegt, gibt**

Digitized by Google

$$\left(\frac{\ldots Ix^2)}{\ldots x}\right)_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} + \left(\frac{d_y(IIx^2)}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + (IIx^2)_{x,\zeta} \cdot \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

...rentialquotient $\frac{d\left((IIx^2)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right)}{dx}$, in seine Bestandtheile zerlegt, gibt

$$\left(\frac{\ldots Ix^2)}{\ldots x}\right)_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} + \left(\frac{d_y(IIx^2)}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \left(\frac{d\pi}{dx}\right)^2 + (IIx^2)_{x,\pi} \cdot \frac{d^2\pi}{dx^2}$$

...rücke muss man statt der betreffenden Abkürzungszeichen in Glei-...ren.

...tersuchung der ersten (in III aufgestellten) Form des $_{(}\delta_{)}$U. Diese ...che Untersuchung braucht hier nicht mehr auseinandergesetzt zu ... für z eine Function von x und y bekommen, welche von den Grän-...ig ist.

...ntersuchung der zweiten (in XV aufgestellten) Form des $_{(}\delta_{)}$U. ...hung, welche sich aus dieser Form ergibt, wird eine Partialdifferen-...erten Ordnung sein; und durch deren Integration werden vier will-...n eingehen.

...ngungen, wenn es nur nicht zuviele sind, werden jedesmal auf vier ... auf sechs nach x identische, und auf vier nichtidentische Gleichungen, ...uf vierzehn Gleichungen führen. Diese werden aber auf folgende ...

...ier nach y identischen und vier von den sechs nach x identischen ...ungen werden zur Bestimmung der vier durch die Integration einge-...nen willkürlichen Functionen benützt.

...wei noch übrigen nach x identischen Gleichungen dienen dann zur ...mung der Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$.

...er nichtidentischen Gleichungen werden dazu dienen, um willkürliche ...nten zu bestimmen.

...ränzbedingungen gegeben, so sind auch mehr Gleichungen vorhan-...mung der noch unbestimmten Stücke nöthig sind. Unter diesen Um-...ufgabe gewöhnlich eine überbestimmte sein. (Man vergleiche Seite ..., etc. Daselbst findet man Fälle, wo zuviele Gränzbedingungen ...

... den allgemeinen Ausdruck für das Prüfungsmittel herzustellen. Dieses ... unterbleiben; denn die allgemeinen Transformationen, welche dabei ... keine andern, als die, welche in hiesiger Aufgabe bereits durchge-...ber die in speciellen Fällen sich darbietenden Eigenthümlichkeiten ...nzu ist in den drei vorigen Aufgaben Anleitung genug gegeben. ...e die Schlussbemerkung zu Aufgabe 288.)

Aufgabe 285.

...t den Elementen x, y, z, $\frac{d_xz}{dx}$, $\frac{d_yz}{dy}$, $\frac{d_x^2z}{dx^2}$, $\frac{d_xd_yz}{dx \cdot dy}$, $\frac{d_y^2z}{dy^2}$, ...
... Man sucht für z eine solche Function von x und y, und zugleich ...che Werthe, dass dabei folgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^{\alpha}\int_b^{\beta} V \cdot dy \cdot dx$$

... Functionen des noch allgemeinen x sind, der Maximumwerth eines ...oder der Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

...nten Function $z = \varphi(x, y)$ bei jedem Werthe des x und des y stets-...den Nachbarfunctionen sind im Allgemeinen durch folgende Reihe


Digitized by Google

$$\text{II)}\quad \varphi(x, y) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

dargestellt, wo man sich unter δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, etc. Functionen von x und y denken muss.

Die den gesuchten Werthen a, α, b, β nächstanliegenden Nachbarwerthe sind bezüglich durch folgende Reihen

$$\text{III)}\quad a + \varkappa \cdot \vartheta a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 a + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad \alpha + \varkappa \cdot \vartheta \alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 \alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 \alpha + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{V)}\quad b + \varkappa \cdot \vartheta b + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 b + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 b + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{VI)}\quad \beta + \varkappa \cdot \vartheta \beta + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 \beta + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 \beta + \ldots\ldots\ldots$$

dargestellt. Warum man auch die Werthänderungen im Allgemeinen durch unaufhörliche Reihen darstellt, ist bereits (Bd. I. Seite 116 und 117) auseinandergesetzt; und die Nothwendigkeit dieses Verfahrens hat sich schon sehr oft (man sehe z. B. Zusatz 7 in Aufg. 160, Zusatz 3 in Aufg. 176, Zusatz 4 in Aufg. 178, etc.) bestätigt.

Wegen der Werthänderungen der Gränzelemente a, α, b, β erleidet U eine gemischte Mutation; und wenn man wirklich mutirt, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad (\delta)U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_b^\beta (V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - V_{a,y} \cdot \vartheta a) \cdot dy + \int_a^\alpha (V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - V_{x,b} \cdot \vartheta b) \cdot dx$$

und

$$\text{VIII)}\quad (\delta^2)U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^2 V \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Big[V_{\alpha,y} \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \delta V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - V_{a,y} \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \delta V_{a,y} \cdot \vartheta a \Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[V_{x,\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta^2 + 2 \cdot \delta V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - V_{x,b} \cdot \vartheta^2 b - \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b^2 - 2 \cdot \delta V_{x,b} \cdot \vartheta b \Big] \cdot dx$$

$$+ 2V_{\alpha,\beta} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta\beta - 2V_{\alpha,b} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta b - 2V_{a,\beta} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta\beta + 2V_{a,b} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta b$$

Weil die nach y auszuführende Integration ganz unabhängig ist von ϑa, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2\alpha$, etc., und weil ebenso die nach x auszuführende Integration ganz unabhängig ist von ϑb, $\vartheta\beta$, $\vartheta^2 b$, $\vartheta^2\beta$, etc.; so kann man diese Differenzcoefficienten, so oft es zweckmässig ist, auch ausserhalb des Integralzeichens setzen.

Ferner ist

$$\text{IX)}\quad \delta V = \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\text{X)}\quad \delta^2 V = \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy} + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz . dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Gleichung IX stehenden) Ausdruck für δV in VII einzusetzen, und doppelten Integralzeichen versehenen Theilsatz umzuformen. Da- zweite Form des ${}_{(}\delta_{)}U$.

den (in Gleichung X stehenden) Ausdruck für $\delta^2 V$ in Gleichung nd dann den mit dem doppelten Integralzeichen versehenen Theil- adurch ergibt sich die zweite Form des ${}_{(}\delta_{)}^2U$.

hren einzuleiten, nehme man an, es sei V ein aus den Elementen usammengesetzter Ausdruck. Man bekommt dann als erste Form

$$= \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}\right) \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \left(\int_b^\beta V_{\alpha,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta\alpha - \left(\int_b^\beta V_{a,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\int_a^\alpha V_{x,\beta} \cdot dx\right) \cdot \vartheta\beta - \left(\int_a^\alpha V_{x,b} \cdot dx\right) \cdot \vartheta b$$

Elemente ϑa, $\vartheta\alpha$, ϑb, $\vartheta\beta$ ausserhalb der Integralzeichen gesetzt, Gleichung VIII befindlichen Bemerkung geschehen kann. so bekommt man als zweite Form

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \left[\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right)\right] \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$\ldots_{,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - V_{a,y} \cdot \vartheta a\Big] \cdot dy$$

$$\ldots_{\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - V_{x,b} \cdot \vartheta b\Big] \cdot dx$$

Elemente ϑa, $\vartheta\alpha$, ϑb, $\vartheta\beta$ unter das Integralzeichen gesetzt, was jene Gränzfälle, wo zwischen den Elementen $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{a,y}$, $\vartheta\alpha$, ϑa, ementen $\delta z_{x,\beta}$, $\delta z_{x,b}$, ϑb, $\vartheta\beta$ eine Abhängigkeit stattfindet.

rsuchung der ersten (in XI aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$. Das Sy- gen, welche man aus den drei Ausdrücken

$$\frac{d_z V}{dz}, \quad \frac{d_p V}{dp}, \quad \frac{d_q V}{dq}$$

mmen, was z für eine Function von x und y ist. Jede dieser drei öchstens von der ersten Ordnung sein. Wie aber eine Function en Veränderlichen aufgefunden wird, welche dreien Gleichungen, differentialgleichungen sein können, zugleich genügt; dafür stehen —153 die verschiedenen Methoden. Man bekommt also eine ganz ür z, und zwar dieselbe, wie wenn die Gränzelemente a, α, b, β man erkennt, dass letztere gar keinen Einfluss auf die gesuchte

welche man aus den mit den einfachen Integralzeichen versehenen , dienen zur Bestimmung der Werthe von a, α, b, β.

ersuchung der zweiten (in XII aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{)}U$.

erst zu, ob die Hauptgleichung

$$\text{D)} \quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{1}{dy} \cdot d_y\left(\frac{d_q V}{dq}\right) = 0$$


Digitized by Google

möglich ist. Sie ist genau dieselbe, wie wenn a, α, b, β unveränderlich wären. Sie wird gewöhnlich von der zweiten Ordnung, also ihr allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen versehen sein.

Jetzt haben, wie man sieht, die Gränzen Einfluss auf die gesuchte Function z von x und y.

Gränzfall.

Von den verschiedenen Gränzfällen, welche möglich sind, mag nur der hier näher betrachtet werden, wo gar keine Gränzbedingung vorgeschrieben ist.

Dabei sind die acht Elemente $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{a,y}$, $\delta z_{x,\beta}$, $\delta z_{x,b}$, ϑa, $\vartheta \alpha$, ϑb, $\vartheta \beta$ ganz unabhängig untereinander; und so finden folgende zwei nach y identische

$$\text{XIV)}\quad \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{\alpha,y} = 0, \qquad \text{XV)}\quad \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_{a,y} = 0$$

und folgende zwei nach x identische

$$\text{XVI)}\quad \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,\beta} = 0, \qquad \text{XVII)}\quad \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_{x,b} = 0$$

und folgende vier nichtidentische Gleichungen

$$\text{XVIII)}\quad \int_b^\beta V_{\alpha,y}\cdot dy = 0, \qquad \text{XIX)}\quad \int_b^\beta V_{a,y}\cdot dy = 0$$

$$\text{XX)}\quad \int_a^\alpha V_{x,\beta}\cdot dx = 0, \qquad \text{XXI)}\quad \int_a^\alpha V_{x,b}\cdot dx = 0$$

statt. Die vier ersten Gleichungen (Nr. XIV—XVII) dienen zur Bestimmung der beiden (durch die Integration eingegangenen) willkürlichen Functionen. Dann hat man für z eine ganz bestimmte Function von x und y.

Hierauf substituire man z in die vier letzten Gleichungen (Nr. XVIII—XXI), so ergeben sich für a, α, b, β bestimmte Werthe.

Wie die Gleichung VIII behandelt werden muss, um das Prüfungsmittel herzustellen; das braucht hier nicht mehr auseinandergesetzt zu werden.

Andere Gränzfälle, wo zwischen den Elementen $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{a,y}$, $\delta z_{x,\beta}$, $\delta z_{x,b}$, ϑa, $\vartheta \alpha$, ϑb, $\vartheta \beta$ Abhängigkeiten stattfinden, werden in der nächsten Aufgabe vorkommen.

B) Hat man diese Untersuchung durchgeführt, so schaue man wieder auf Gleichung XII zurück, und sehe zu, ob man dem bei δz befindlichen Factor

$$\frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_pV}{dp}\right) - \frac{1}{dy}\cdot d_y\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$$

die Form $\frac{3}{0}$ beilegen kann.

Und so fort.

(Man vergleiche die Schlussbemerkung zu Aufgabe 288.)

Aufgabe 286.

Man sucht zwischen vier gegebenen Flächen die kleinste Oberfläche unter allen denen, von welchen jene (die vier gegebenen nemlich) nach Curven geschnitten werden, die in zwei Paar parallelen und aufeinander senkrechten Ebenen liegen.

Einleitung.

Die von der gesuchten und den vier gegebenen Flächen erzeugten vier Gränzcurven sollen sich in Ebenen befinden, für deren Lage weiter nichts vorgeschrieben ist, als dass je zwei, die einander gegenüberliegen, auch miteinander parallel sind, und dass jede der gegenüberliegenden auf den beiden anliegenden senkrecht steht. Alles Uebrige, was diese Ebenen betrifft, wird noch gesucht.

Digitized by Google

llgemeinheit der Aufgabe nicht, aber ihre Durchführung wird
n die Abscissenaxe X so nimmt, dass sie auf dem einen Paar
senkrecht steht. Der einen dieser zwei Ebenen und der in ihr
nag die Abscisse $x = a$, dagegen der andern dieser zwei Ebenen
en Gränzcurve mag die Abscisse $x = \alpha$ entsprechen.
sig ist, nur das rechtwinkelige Coordinatensystem anzuwenden;
cissenaxe Y so nehmen, dass sie auf dem andern Paar der ge-
echt steht. Der einen dieser zwei Ebenen und der in ihr lie-
g die Abscisse $y = b$, dagegen der andern dieser zwei Ebenen
n Gränzcurve mag die Abscisse $y = \beta$ entsprechen.
lächen, in welchen die den Abscissen $x = a$ und $x = \alpha$ ent-
en liegen, mögen bezüglich durch die Gleichungen

$$c' = f'(x, y), \quad \text{und} \quad \text{II)}\ \gamma' = f'(x, y)$$

lächen, in welchen die den Abscissen $y = b$ und $y = \beta$ ent-
en liegen, mögen bezüglich durch die Gleichungen

$$'' = f''(x, y), \quad \text{und} \quad \text{IV)}\ \gamma'' = f''(x, y)$$

cht der Erinnerung, dass sowohl die vier gegebenen als auch
ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen werden müssen.
Aufgabe sucht sonach eine von vier noch zu ermittelnden ebenen
uch in einer Gränzfläche liegt, begränzte Fläche, welcher eine
nkommt, als bei jeder andern, der gesuchten Fläche stetsfort
entweder durch die noch zu ermittelnden oder durch die ihnen
ens nur in den Gränzflächen befindlichen Nachbarcurven be-
der Fall sein kann. Man verlangt also für z eine solche Func-
lerlichen x und y, und zugleich für a, α, b, β solche Werthe,

$$\cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2}\right) \cdot dy \cdot dx$$

s Minimum-standes wird.
nderungen der Gränzelemente a, α, b, β erleidet U eine ge-
nd wenn man wirklich mutirt, so bekommt man für die erste

$$\int_b^\beta \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_b^\beta (V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - V_{a,y} \cdot \vartheta a) \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha (V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - V_{x,b} \cdot \vartheta b) \cdot dx$$

. 251 begründete) Umformung ausführt, und die (schon in Aufg.
rzungszeichen P und Q anwenden; so bekommt man für die

$$(\delta)U = -\int_a^\alpha \int_b^\beta \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$\cdot \delta z_{\alpha,y} + V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - V_{a,y} \cdot \vartheta a\Big) \cdot dy$$

$$\cdot \delta z_{x,\beta} + V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - Q_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - V_{x,b} \cdot \vartheta b\Big) \cdot dx$$

VI abermals, und forme um; so gibt sich

Digitized by Google

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{,}^{2}U = \int_a^\alpha \int_b^\beta \Bigg\{\left(-\frac{d_xP}{dx} - \frac{d_yQ}{dy}\right)\cdot \delta^2 z$$

$$+ \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q\frac{d_x\delta z}{dx} - p\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\Bigg\} \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_b^\beta \Big[P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} + V_{\alpha,y} \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{d_xV}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\cdot\delta V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha$$

$$- P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} - V_{a,y} \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{d_xV}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2 - 2\cdot \delta V_{a,y} \cdot \vartheta a\Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[Q_{x,\beta} \cdot \delta^2 z_{x,\beta} + V_{x,\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \left(\frac{d_yV}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta^2 + 2\cdot\delta V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta$$

$$- Q_{x,b} \cdot \delta^2 z_{x,b} - V_{x,b} \cdot \vartheta^2 b - \left(\frac{d_yV}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b^2 - 2\cdot\delta V_{x,b} \cdot \vartheta b\Big] \cdot dx$$

$$+ 2V_{\alpha,\beta} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta\beta - 2V_{\alpha,b} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta b - 2V_{a,\beta} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta\beta + 2V_{a,b} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta b$$

Hier in dieser Aufgabe ist

$$\text{IX)}\quad \delta V = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(p\frac{d_x\delta z}{dx} + q\frac{d_y\delta z}{dy}\right) = P\cdot\frac{d_x\delta z}{dx} + Q\cdot\frac{d_y\delta z}{dy}$$

$$\text{X)}\quad \frac{d_xV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(p\frac{d_x^2z}{dx^2} + q\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right) = P\cdot\frac{d_x^2z}{dx^2} + Q\cdot\frac{d_xd_yz}{dx.dy}$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_yV}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(p\frac{d_xd_yz}{dx.dy} + q\frac{d_y^2z}{dy^2}\right) = P\cdot\frac{d_xd_yz}{dx.dy} + Q\cdot\frac{d_y^2z}{dy^2}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in VI aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{,}U$. In dieser Form kommen die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten nicht vor. Da aber die Aufgabe vorschreibt, dass die gesuchte Fläche von den gegebenen Gränzflächen begränzt werden soll, also die Gränzordinaten der gesuchten Fläche auch zugleich Ordinaten der gegebenen Gränzflächen sein müssen; so müssen durchaus die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten verglichen werden mit den Aenderungen der zu den gegebenen Gränzflächen gehörigen Ordinaten. Dazu bietet aber die erste Form des ${}_{(}\delta_{,}U$ nicht die Mittel, sie kann also nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in VIII aufgestellten) Form des ${}_{(}\delta_{,}U$. Diese zerlegt sich zunächst in die Hauptgleichung

$$\text{XII)}\quad \frac{d_xP}{dx} + \frac{d_yQ}{dy} = 0$$

welche bekanntlich gleichbedeutend ist mit folgender

$$\text{XIII)}\quad (1+q^2)\cdot r - 2pq\cdot s + (1+p^2)\cdot t = 0$$

Ausserdem hat man noch die Gränzengleichung

$$\text{XIV)}\quad \int_b^\beta \Big[P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y} + V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y} - V_{a,y} \cdot \vartheta a\Big] \cdot dy$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[Q_{x,\beta} \cdot \delta z_{x,\beta} + V_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - Q_{x,b} \cdot \delta z_{x,b} - V_{x,b} \cdot \vartheta b\Big] \cdot dx = 0$$

Die Hauptgleichung XIII ist dieselbe, wie Gleichung VIII oder IX in der 261sten Aufgabe, wo a, α, b, β constant sind.

Nun ist man soweit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden können.

Digitized by Google

Erster Fall.

nste aus allen jenen Oberflächen, von denen die vier gegebenen rven geschnitten werden, welche nur der einzigen Bedingung, parallelen und aufeinander senkrechten Ebene liegen, genügen r von jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind.

Fläche die vier Gränzflächen schneidet, so sind im Bereiche e die Ordinaten der gesuchten Fläche gleich den Ordinaten jener lie fragliche Durchschnittscurve angehört, d. h. es ist

$$1)\quad z_{a,y} = c'_{a,y}, \qquad 2)\quad z_{\alpha,y} = \gamma'_{\alpha,y}$$

$$3)\quad z_{x,b} = c''_{x,b}, \qquad 4)\quad z_{x,\beta} = \gamma''_{x,\beta}$$

en kann man bezüglich setzen

$$5)\quad z_{a,y} = f'(a, y) \qquad 6)\quad z_{\alpha,y} = f'(\alpha, y)$$

$$7)\quad z_{x,b} = f''(x, b), \qquad 8)\quad z_{x,\beta} = f''(x, \beta)$$

bestimmte constante Werthe gesucht. Desshalb ist sowohl die als auch die Gleichung 2 (oder 6) nur nach y identisch: und rentiirt, so bekommt man

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y} = \left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{a,y}, \quad 10)\quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y} = \left(\frac{d_y \gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y}$$

$$\left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{a,y} = \left(\frac{d_y^2 c'}{dy^2}\right)_{a,y}, \quad 12)\quad \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{\alpha,y} = \left(\frac{d_y^2 \gamma'}{dy^2}\right)_{\alpha,y}$$

etc.

leichfalls bestimmte constante Werthe gesucht. Desshalb ist so-ler 7) als auch Gleichung 4 (oder 8) nur nach x identisch; und rentiirt, so bekommt man

$$\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,b} = \left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b}, \quad 14)\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\beta} = \left(\frac{d_x \gamma''}{dx}\right)_{x,\beta}$$

$$\left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{x,b} = \left(\frac{d_x^2 c''}{dx^2}\right)_{x,b}, \quad 16)\quad \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{x,\beta} = \left(\frac{d_x^2 \gamma''}{dx^2}\right)_{x,\beta}$$

etc.

e von a, α, b, β andere als die gesuchten Werthe in die Glei-bstituiren; so muss man bei diesen vier Gleichungen auch an andere als die gesuchte Function setzen. Die vier Ausdrücke erleiden also gemischte Mutationen wegen der Werthänderungen Desshalb folgt aus Gleichung 1 (oder 5)

$$17)\quad \delta z_{a,y} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a = \left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a$$

$$2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2$$

$$= \left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d_x^2 c'}{dx^2}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2$$

ationsgleichungen bekommt man aus Gleichung 2 (oder 6). eichung 3 (oder 7) einer gemischten Mutation, so gibt sich

$$19)\quad \delta z_{x,b} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b = \left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b$$



$$20)\quad \delta^2 z_{x,b} + 2\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta^2 b + \left(\frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b^2$$
$$= \left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta^2 b + \left(\frac{d_y^2 c''}{dy^2}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b^2$$

Ganz ebenmässige Mutationsgleichungen bekommt man aus Gleichung 4 (oder 8).
Man nehme $\delta z_{a,y}$, $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{x,b}$, $\delta z_{x,\beta}$ als abhängig, so bekommt man

$$21)\quad \delta z_{a,y} = \left(\frac{d_x c'}{dx} - \frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\vartheta a$$

$$22)\quad \delta z_{\alpha,y} = \left(\frac{d_x\gamma'}{dx} - \frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha$$

$$23)\quad \delta z_{x,b} = \left(\frac{d_y c''}{dy} - \frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b$$

$$24)\quad \delta z_{x,\beta} = \left(\frac{d_y\gamma''}{dy} - \frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}\cdot\vartheta\beta$$

Man eliminire $\delta z_{a,y}$, $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{x,b}$, $\delta z_{x,\beta}$ aus XIV; so bekommt man

$$25)\quad \int_b^\beta\left\{\frac{1}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{\alpha,y}}\cdot\left[1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\gamma'}{dx}\right)_{\alpha,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\alpha,y}\right]\cdot\vartheta\alpha\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{a,y}}\cdot\left[1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{a,y}\right]\cdot\vartheta a\right\}\cdot dy$$
$$+\int_a^\alpha\left\{\frac{1}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,\beta}}\cdot\left[1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,\beta}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\gamma''}{dy}\right)_{x,\beta}\right]\cdot\vartheta\beta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(\sqrt{1+p^2+q^2})_{x,b}}\cdot\left[1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,b}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b}\right]\cdot\vartheta b\right\}\cdot dx = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich ohneweiters in folgende vier einzelne

$$26)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\gamma'}{dx}\right)_{\alpha,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\alpha,y} = 0$$

$$27)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{a,y} = 0$$

$$28)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,\beta}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\gamma''}{dy}\right)_{x,\beta} = 0$$

$$29)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,b}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b} = 0$$

Weil aber die Gleichungen 9, 10, 13, 14 stattfinden, so kann man statt der Quadrate

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{\alpha,y},\quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2_{a,y},\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,\beta},\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2_{x,b}$$

bezüglich die Producte

$$\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_y\gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y},\quad \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{a,y},\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\gamma''}{dx}\right)_{x,\beta},\quad \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b}$$

setzen; und so gehen die vier letzten Gleichungen (Nr. 26–29) über in

$$30)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\gamma'}{dx}\right)_{\alpha,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_y\gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y} = 0$$

$$31)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{a,y} = 0$$

Digitized by Google

$$+ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\beta} \cdot \left(\frac{d_x \gamma''}{dx}\right)_{x,\beta} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \left(\frac{d_y \gamma''}{dy}\right)_{x,\beta} = 0$$

$$+ \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,b} \cdot \left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b} \cdot \left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b} = 0$$

sen vier Gleichungen so, wie früher (Seite 586 und 587) gesche-
man zu der Erkenntniss, dass die gesuchte Fläche auf den vier
ht steht.

ht Gleichungen (Nr. 5—8, und Nr. 26—29). Vier davon werden
ch darum handelt, die zwei willkürlichen Functionen zu bestim-
ntegration der Gleichung XIII eingegangen sind. Die vier andern
et, um zu suchen, was a, α, b, β für feste Werthe haben müs-
er für a und α kein von dem allgemeinen y unabhängiger, und
r b und β kein von dem allgemeinen x unabhängiger Werth; so
erste Fall unmöglich.

β in Gleichung 5 ein, so bekommt man bezüglich

$z_{a,b} = f'(a, b)$, und 35) $z_{a,\beta} = f'(a, \beta)$

n Gleichung 6 ein, so bekommt man bezüglich

$z_{\alpha,b} = f'(\alpha, b)$, und 37) $z_{\alpha,\beta} = f'(\alpha, \beta)$

n Gleichung 7 ein, so bekommt man bezüglich

$z_{a,b} = f''(a, b)$, und 39) $z_{\alpha,b} = f''(\alpha, b)$

n Gleichung 8 ein, so bekommt man bezüglich

$z_{a,\beta} = f''(a, \beta)$, und 41) $z_{\alpha,\beta} = f''(\alpha, \beta)$

42) $f'(a, b) = f''(a, b)$

43) $f'(a, \beta) = f''(a, \beta)$

44) $f'(\alpha, b) = f''(\alpha, b)$

45) $f'(\alpha, \beta) = f''(\alpha, \beta)$

Gleichungen (Nr. 42—45) erfüllt werden, ist ein Ergebniss, wel-
der hier vorgelegten Aufgabe entspricht; denn die vier in den
issen a, α, b, β senkrechten Ebenen schneiden sich in vier graden
r dieser vier Graden liegt ein Punkt, welcher zweien der in den
nen liegenden Gränzcurven gemeinschaftlich sein muss, weil man
e Gränzcurven) keine Fläche begränzen könnte. Man hat also hier
, wie die Erscheinungen des Calculs jedesmal mit den Eigenthüm-
nterworfenen Gegenstandes übereinstimmen. (Man vergleiche den
Aufg. 255 als auch in Aufg. 267.)

smittel herzustellen, muss man aus Gleichung VIII zunächst die
$z_{\alpha,y}$, $\delta^2 z_{x,b}$, $\delta^2 z_{x,\beta}$ eliminiren.

3 folgt

$$' - \frac{d_x z}{dx}\Big)_{a,y} \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d_x^2 c'}{dx^2} - \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a$$

bekommt man

$$- \frac{d_x z}{dx}\Big)_{\alpha,y} \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d_x^2 \gamma'}{dx^2} - \frac{d_x^2 z}{dx^2}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta \alpha^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta z}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta \alpha$$

gt

$$' - \frac{d_y z}{dy}\Big)_{x,b} \cdot \vartheta^2 b + \left(\frac{d_y^2 c''}{dy^2} - \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b^2 - 2 \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b$$

Digitized by Google

Auf ähnliche Weise bekommt man

$$49)\quad \delta^2 z_{x,\beta} = \left(\frac{d_y\gamma''}{dy} - \frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta^2\beta + \left(\frac{d_y^2\gamma''}{dy^2} - \frac{d_y^2 z}{dy^2}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta^2 - 2\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta$$

Eliminirt man wirklich diese vier Stücke aus Gleichung VIII, und beachtet man die fünf Gleichungen XII und 26—29; so gibt sich zunächst

$$50)\quad (\delta)^2 U =$$

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\left(p\frac{d_x\delta z}{dx} - q\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right)\cdot dy\cdot dx$$

$$+\int_b^\beta\Big[\left(P\frac{d_x^2\gamma'}{dx^2} + Q\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha^2 + 2\cdot Q_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha$$

$$-\left(P\frac{d_x^2c'}{dx^2} + Q\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{a,y}\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot Q_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,y}\cdot\vartheta a\Big]\cdot dy$$

$$+\int_a^\alpha\Big[\left(Q\frac{d_y^2\gamma''}{dy^2} + P\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{x,\beta}\cdot\vartheta\beta^2 + 2\cdot P_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\beta}\cdot\vartheta\beta$$

$$-\left(Q\frac{d_y^2c''}{dy^2} + P\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b^2 - 2\cdot P_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b\Big]\cdot dx$$

$$+ 2V_{\alpha,\beta}\cdot\vartheta\alpha\cdot\vartheta\beta - 2V_{\alpha,b}\cdot\vartheta\alpha\cdot\vartheta b - 2V_{a,\beta}\cdot\vartheta a\cdot\vartheta\beta + 2V_{a,b}\cdot\vartheta a\cdot\vartheta b$$

Weil die beiden Gleichungen 21 und 22 nach y identisch sind, so kann man sie nach y differentiiren; und es gibt sich

$$51)\quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{a,y} = \left(\frac{d_xd_yc'}{dx.dy} - \frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{a,y}\cdot\vartheta a$$

und

$$52)\quad \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)_{\alpha,y} = \left(\frac{d_xd_y\gamma'}{dx.dy} - \frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha$$

Weil ferner die beiden Gleichungen 23 und 24 nach x identisch sind, so kann man sie nach x differentiiren; und es gibt sich bezüglich

$$53)\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,b} = \left(\frac{d_xd_yc''}{dx\cdot dy} - \frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{x,b}\cdot\vartheta b$$

und

$$54)\quad \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)_{x,\beta} = \left(\frac{d_xd_y\gamma''}{dx\cdot dy} - \frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{x,\beta}\cdot\vartheta\beta$$

Eliminirt man diese vier Ausdrücke aus 50, so bekommt

$$55)\quad (\delta)^2 U =$$

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(p\frac{d_x\delta z}{dx} - q\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$

$$+\left[\int_b^\beta\left(P\cdot\frac{d_x^2\gamma'}{dx^2} + 2Q\cdot\frac{d_xd_y\gamma'}{dx\,.\,dy} - Q\cdot\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{\alpha,y}\cdot dy\right]\cdot\vartheta\alpha^2$$

$$+\left[-\int_b^\beta\left(P\cdot\frac{d_x^2c'}{dx^2} + 2Q\cdot\frac{d_xd_yc'}{dx.dy} - Q\cdot\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{a,y}\cdot dy\right]\cdot\vartheta a^2$$

$$+\left[\int_a^\alpha\left(Q\cdot\frac{d_y^2\gamma''}{dy^2} + 2P\cdot\frac{d_xd_y\gamma''}{dx\cdot dy} - P\cdot\frac{d_xd_yz}{dx.dy}\right)_{x,\beta}\cdot dx\right]\cdot\vartheta\beta^2 +$$

Digitized by Google

$$\ldots \Big(Q \cdot \frac{d_y^2 c''}{dy^2} + 2P \cdot \frac{d_x d_y c''}{dx \cdot dy} - P \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}\Big)_{x,b} \cdot dx\Big] \cdot \vartheta b^2$$

$$\ldots \cdot \vartheta\beta - 2V_{\alpha,b} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta b - 2V_{a,\beta} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta\beta + 2V_{a,b} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta b$$

…ck ist zweierlei zu bemerken:

…n doppelten Integralzeichen versehene Theilsatz ist unter allen Um- … aber

…it den Differenzcoefficienten versehene Aggregat positiv sei, kann …len, wenn bestimmte Gränzflächen gegeben sind. Uebrigens kann … wenn jeder der vier zu ϑa^2, $\vartheta\alpha^2$, ϑb^2, $\vartheta\beta^2$ gehörigen Factoren für … Bedingung, deren Nothwendigkeit nicht noch bewiesen zu werden …

…uem zeigen zu können, wie die betreffende Untersuchung geführt …n besagten Aggregate folgende abgekürzte Form:

$$A \cdot \vartheta\alpha^2 + C \cdot \vartheta a^2 + F \cdot \vartheta\beta^2 + L \cdot \vartheta b^2$$
$$\ldots D \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta\beta + 2G \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta b + 2E \cdot \vartheta a \cdot \vartheta\beta + 2H \cdot \vartheta a \cdot \vartheta b$$

…nn man ohneweiters auf folgende Form bringen:

$$\ldots - \mathfrak{A} \cdot \vartheta a + \mathfrak{B} \cdot \vartheta\beta + \mathfrak{C} \cdot \vartheta b)^2 + \mathfrak{E}(\vartheta a + \mathfrak{G} \cdot \vartheta\beta + \mathfrak{H} \cdot \vartheta b)^2$$
$$+ \mathfrak{K}(\vartheta\beta + \mathfrak{L} \cdot \vartheta b)^2 + \mathfrak{M} \cdot \vartheta b^2$$

… Form unter allen Umständen positiv bleibt, müssen A, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ …ein.

… die Form ⊙ mit der Form ☾, so gibt sich

$$\ldots = 0, \quad \mathfrak{B} = \frac{D}{A}, \quad \mathfrak{C} = \frac{G}{A}, \quad \mathfrak{E} = C, \quad \mathfrak{G} = \frac{E}{C}$$

Zweiter Fall.

…kleinste aus allen jenen Oberflächen, von denen die vier gegebenen … Curven geschnitten werden, welchen folgende zwei Eigenschaften …d:

…chnittscurven sollen in zwei Paar parallelen und aufeinander senk- …en, und

… Abscissendifferenzen $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ sollen bezüglich die … K und $\mathfrak{K}$ haben.

…langt also, dass man unter allen jenen Flächen, für welche die …

$$\ldots = f'(a, y), \quad 57)\ z_{\alpha,y} = f'(\alpha, y), \quad 58)\ \alpha - a = K$$
$$\ldots = f''(x, b), \quad 60)\ z_{x,\beta} = f''(x, \beta), \quad 61)\ \beta - b - \mathfrak{K}$$

… suche, die zwischen den vier gegebenen Gränzflächen möglich ist. …ungen 58 und 61 folgt:

$$\ldots \vartheta\alpha, \quad \vartheta b = \vartheta\beta, \quad \vartheta^2 a = \vartheta^2\alpha, \quad \vartheta^2 b = \vartheta^2\beta, \text{ etc. etc.}$$

… dieses, so zerlegt sich die Gränzengleichung jetzt nur in folgende …

$$\ldots\Big)_{\alpha,y} \cdot \Big(\frac{d_x\gamma'}{dx}\Big)_{\alpha,y} + \Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{\alpha,y} \cdot \Big(\frac{d_y\gamma'}{dy}\Big)_{\alpha,y}\Big) \cdot (\sqrt{1 + p^2 + q^2})_{\alpha,y}$$

$$\ldots\Big)_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_x c'}{dx}\Big)_{a,y} + \Big(\frac{d_y z}{dy}\Big)_{a,y} \cdot \Big(\frac{d_y c'}{dy}\Big)_{a,y}\Big) \cdot (\sqrt{1 + p^2 + q^2})_{a,y}$$


Digitized by Google

$$63)\quad \left(1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_x\gamma''}{dx}\right)_{x,\beta}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta}\cdot\left(\frac{d_y\gamma''}{dy}\right)_{x,\beta}\right)\cdot\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{x,b}$$
$$=\left(1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b}\cdot\left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b}\right)\cdot\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{x,\beta}$$

Man hat nun die acht Gleichungen (Nr. 56—63). Vier davon werden benützt, wenn es sich darum handelt, die zwei willkürlichen Functionen zu bestimmen, welche durch Integration der Gleichung XIII eingegangen sind. Die vier andern werden dazu verwendet, um zu suchen, was a, α, b, β für feste Werthe haben müssen. Ergibt sich aber für a und α kein von dem noch allgemeinen y unabhängiger, und ergibt sich ebenso für b und β kein von dem noch allgemeinen x unabhängiger Werth; so ist dieser zweite Fall unmöglich.

Auch hier müssen die vier Gleichungen (Nr. 42—45) gelten; und man hat die hinter Gleichung 45 stehende Bemerkung zu vergleichen.

Wenn man die Differenzcoefficienten ϑa, ϑb, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2 b$, etc. als abhängig nimmt; so bekommt man für das Prüfungsmittel folgenden Ausdruck:

$$64)\quad {}_{\vartheta}\delta^2 U =$$
$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(q\frac{d_x\delta z}{dx}-p\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2+\left(\frac{d_x\delta z}{dx}\right)^2+\left(\frac{d_y\delta z}{dy}\right)^2\right]\cdot dy\cdot dx$$
$$+\left\{\int_b^\beta\left(\left(P\cdot\frac{d_x^2\gamma'}{dx^2}+2Q\cdot\frac{d_x d_y\gamma'}{dx.dy}-Q\cdot\frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{\alpha,y}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(P\cdot\frac{d_x^2 c'}{dx^2}+2Q\cdot\frac{d_x d_y c'}{dx.dy}-Q\cdot\frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{a,y}\right)\cdot dy\right\}\cdot\vartheta\alpha^2$$
$$+\left\{\int_a^\alpha\left(\left(Q\cdot\frac{d_y^2\gamma''}{dy^2}+2P\cdot\frac{d_x d_y\gamma''}{dx\cdot dy}-P\cdot\frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{x,\beta}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(Q\cdot\frac{d_y^2 c''}{dy^2}+2P\cdot\frac{d_x d_y c''}{dx\cdot dy}-P\cdot\frac{d_x d_y z}{dx.dy}\right)_{x,b}\right)\cdot dx\right\}\cdot\vartheta\beta^2$$
$$+2\cdot(V_{\alpha,\beta}-V_{\alpha,b}-V_{a,\beta}+V_{a,b})\cdot\vartheta\alpha\cdot\vartheta\beta$$

Der Theilsatz mit dem doppelten Integrälzeichen ist unter allen Umständen positiv. Ob aber die Summe der übrigen Theilsätze auch positiv ist, kann erst entschieden werden, wenn specielle Gränzflächen gegeben sind.

Dritter Fall.

Man sucht die kleinste aus allen jenen Oberflächen, von denen die vier gegebenen Gränzflächen nach Curven geschnitten werden, welchen folgende zwei Eigenschaften gemeinschaftlich sind:

1) Die Durchschnittscurven sollen in zwei Paar parallelen und aufeinander senkrechten Ebenen liegen, und

2) Die Differenzen der Ordinaten, welche den einander gegenüberliegenden Curven angehören, sollen die constanten Werthe K und $\mathfrak{K}$ haben.

Dieser Fall verlangt also, dass man unter allen jenen Flächen, für welche die sechs Gleichungen

$$65)\quad z_{a,y}=f'(a,y),\qquad 66)\quad z_{\alpha,y}=f'(\alpha,y),\qquad 67)\quad z_{\alpha,y}-z_{a,y}=K$$
$$68)\quad z_{x,b}=f''(x,b),\qquad 69)\quad z_{x,\beta}=f''(x,\beta),\qquad 70)\quad z_{x,\beta}-z_{x,b}=\mathfrak{K}$$

gelten, die kleinste suche, die zwischen den vier gegebenen Gränzflächen möglich ist.

Aus 67 folgt durch gemischtes Mutiren

Digitized by Google

$${}_{,y} + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha - \delta z_{\alpha,y} - \left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y} \cdot \vartheta a = 0$$

$${}_{,\beta} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \vartheta\beta - \delta z_{x,b} - \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b} \cdot \vartheta b = 0$$

hs Gleichungen (Nr. 21—24, und 71 und 72). Wenn man jetzt ., $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{x,b}$, $\delta z_{x,\beta}$, ϑa, ϑb als abhängig, dagegen die zwei ls unabhängig nimmt, und dann die abhängigen Stücke aus der V eliminirt; so zerlegt sich dieselbe in folgende zwei einzelne:

$$\cdot \left(\frac{d_x\gamma'}{dx}\right)_{\alpha,y} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y} \cdot \left(\frac{d_y\gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y}\Bigg) \cdot \left(\frac{d_y c'}{dy} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{a,y}$$

$$\left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y} \cdot \left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{a,y}\Bigg) \cdot \left(\frac{d_y\gamma'}{dy} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{\alpha,y}$$

$$\cdot \left(\frac{d_x\gamma''}{dx}\right)_{x,\beta} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\beta} \cdot \left(\frac{d_y\gamma''}{dy}\right)_{x,\beta}\Bigg) \cdot \left(\frac{d_x c''}{dx} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{x,b}$$

$$\left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,b} + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,b} \cdot \left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,b}\Bigg) \cdot \left(\frac{d_x\gamma''}{dx} \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}\right)_{x,\beta}$$

acht Gleichungen (Nr. 65—70, und Nr. 73 und 74). Vier davon n es sich darum handelt, die zwei willkürlichen Functionen zu urch Integration der Gleichung XIII eingegangen sind. Die vier erwendet, um zu suchen, was a, α, b, β für feste Werthe ha- sich aber für a und α kein von dem allgemeinen y unabhängiger, in von dem allgemeinen x unabhängiger Werth; so ist der hier möglich.

n die vier Gleichungen (Nr. 42—45) gelten; und man hat die ehende Bemerkung zu vergleichen.

l ist noch herzustellen.

e kann man sich nach Belieben aufstellen.

die Schlussbemerkung zu Aufg. 288.)

Aufgabe 287.

en Elementen x, y, z, $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$, ... Man sucht für z eine solche Function von x und y, für $\zeta(x)$ und des einzigen Veränderlichen x, und zugleich für a und α solche lgendes Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$$

eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-

n Function $z = \varphi(x, y)$ bei jeder Bedeutung des x und des y enden Nachbarfunctionen sind im Allgemeinen durch folgende

$$+ \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.2} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

dargestellt, wo man sich unter δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, etc. Functionen von x und y denken muss.

Die den Functionen $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen sind im Allgemeinen durch folgende Reihen

$$\text{III)}\quad \zeta(x) + \varkappa \cdot \delta\zeta(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\zeta(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\zeta(x) + \dots\dots\dots$$

$$\text{IV)}\quad \pi(x) + \varkappa \cdot \delta\pi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\pi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\pi(x) + \dots\dots\dots$$

dargestellt.

Die den gesuchten Werthen a und α nächstanliegenden Nachbarwerthe sind durch folgende Reihen

$$\text{V)}\quad a + \varkappa \cdot \vartheta a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 a + \dots\dots\dots$$

$$\text{VI)}\quad \alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \dots\dots\dots$$

dargestellt. Warum man auch die Werthänderungen im Allgemeinen durch unaufhörliche Reihen darstellt, ist bereits (Bd. I. Seite 116 und 117) auseinandergesetzt; und die Nothwendigkeit dieses Verfahrens hat sich schon sehr oft (man sehe z. B. Zusatz 7 in Aufg. 160, Zusatz 3 in Aufg. 176, und Zusatz 4 in Aufg. 178, etc.) bestätigt.

Wegen der Mutationen des $\zeta(x)$ und des $\pi(x)$ und wegen der gleichzeitigen Werthänderungen des a und des α erleidet das U eine zusammengesetzte gemischte Mutation.

Wenn man wirklich mutirt, und, so oft es bequem ist, π und ζ bezüglich statt $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ setzt; so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VII)}\quad {}_{[(\delta)]}U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$
$$+ \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_a \cdot \vartheta a$$

und

$$\text{VIII)}\quad {}_{[(\delta)]}^2U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta^2 V \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta^2\zeta + \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2 + 2 \cdot \delta V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta\right.$$
$$\left. - V_{x,\pi} \cdot \delta^2\pi - \left(\frac{d_y V}{dy}\right)_{x,\pi} \cdot \delta\pi^2 - 2 \cdot \delta V_{x,\pi} \cdot \delta\pi\right] \cdot dx$$
$$+ 2 \cdot V_{\alpha,\zeta(\alpha)} \cdot \delta\zeta(\alpha) \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot V_{\alpha,\pi(\alpha)} \cdot \delta\pi(\alpha) \cdot \vartheta\alpha$$
$$- 2 \cdot V_{a,\zeta(a)} \cdot \delta\zeta(a) \cdot \vartheta a + 2 \cdot V_{a,\pi(a)} \cdot \delta\pi(a) \cdot \vartheta a$$

Da, wo nur nach y integrirt werden soll, ist es einerlei, ob α an die Stelle des ausserhalb y vorkommenden x erst nach der Integration oder schon vor derselben gesetzt wird. Es ist also

Digitized by Google

$$\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_\alpha = \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V_{\alpha,y} \cdot dy\right)_\alpha$$

die rechte Seite dieser Gleichung, so erkennt man:
on x befreiten Ausdruck $V_{\alpha,y}$ nach y integriren, dieses Integral
$= \zeta(x)$ erstrecken, und dann α an die Stelle des hierdurch einge-

che wird erreicht, wenn man den von x befreiten Ausdruck $V_{\alpha,y}$
d dann das Integral von $y = \pi(\alpha)$ bis $y = \zeta(\alpha)$ erstreckt. Sonach

$$\text{IX)} \quad \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)_\alpha = \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} V_{\alpha,y} : dy$$

ekommt man

$$\text{X)} \quad \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V_{a,y} \cdot dy\right)_a = \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} V_{a,y} \cdot dy$$

beiden letzten Ausdrücke in VII, so gibt sich

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dy + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi) \cdot dx$$

$$\left(\int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} V_{\alpha,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta\alpha - \left(\int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} V_{a,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta a$$

$$= \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta z}{dy} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{\delta_p V}{dp} \cdot \frac{d_x \delta^2 z}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d_y \delta^2 z}{dy} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_z d_p V}{dz \cdot dp} \cdot \delta z \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

leichung XII stehenden) Ausdruck für δV in XI einzusetzen, und
doppelten Integralzeichen versehenen Theilsatz noch umzuformen.
die zweite Form des $_{[(\delta)]}U$.
man, wie die vorgeschriebenen Gränzbedingungen verlangen.
eise, wie man Gleichung IX hergestellt hat, bekommt man auch

$$\text{XIV)} \quad \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy\right)_\alpha = \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} \delta V_{\alpha,y} \cdot dy$$

$$\text{XV)} \quad \left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy\right)_a = \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} \delta V_{a,y} \cdot dy$$

e Gleichung V. Seite 675) im Allgemeinen

$$\text{XVI)} \quad \frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx} =$$

$$\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \frac{d_x V}{dx} \cdot dy + V_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta(x)}{dx} - V_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi(x)}{dx}$$

sondern Werthe $x = \alpha$

Digitized by Google

$$\text{XVII)} \quad \left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_\alpha = \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot dy$$

$$+ V_{\alpha,\zeta(\alpha)} \cdot \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} - V_{\alpha,\pi(\alpha)} \cdot \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha}$$

und bei dem besondern Werthe $x = a$ ist

$$\text{XVIII)} \quad \left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_a = \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{a,y} \cdot dy$$

$$+ V_{a,\zeta(a)} \cdot \frac{d\zeta(a)}{da} - V_{a,\pi(a)} \cdot \frac{d\pi(a)}{da}$$

Man hat nun die sieben in IX, X, XIII, XIV, XV, XVII, XVIII stehenden Ausdrücke in Gleichung VIII zu substituiren, und dann den mit dem doppelten Integralzeichen versehenen Theilsatz umzuformen. Dadurch ergibt sich die zweite Form des $_{(t}\delta_{t)}^2 U$. (Man sehe Gleichung VIII in der folgenden Aufgabe.)

Zusatz. Die Aufg. 285 ist als specieller Fall in der hiesigen enthalten. Setzt man nemlich statt der Functionen $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ bezüglich die von dem noch allgemeinen x unabhängigen Werthelemente β und b, so bekommt man

$$\zeta(x) = \zeta(a) = \zeta(\alpha) = \beta$$

und

$$\pi(x) = \pi(a) = \pi(\alpha) = b$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt bezüglich

$$\frac{d\zeta(x)}{dx} = \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad \text{also auch } \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} = 0 \text{ und } \frac{d\zeta(a)}{da} = 0$$

und

$$\frac{d\pi(x)}{dx} = \frac{db}{dx} = 0, \quad \text{also auch } \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha} = 0 \text{ und } \frac{d\pi(a)}{da} = 0$$

Ferner gehen die Mutationscoefficienten

$$\delta\zeta(x), \quad \delta\pi(x), \quad \delta^2\zeta(x), \quad \delta^2\pi(x), \text{ etc.}$$

bezüglich über in die Differenzcoefficienten

$$\vartheta\beta, \quad \vartheta b, \quad \vartheta^2\beta, \quad \vartheta^2 b, \text{ etc.}$$

Weil nun hier $\frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} = 0$ und $\frac{d\zeta(a)}{da} = 0$ ist, so fallen in Gleichung XVII die zwei letzten Theilsätze weg; und sie reducirt sich auf

$$\left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_\alpha = \int_b^\beta \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{\alpha,y} \cdot dy$$

Weil hier ebenso $\frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha} = 0$ und $\frac{d\pi(a)}{da} = 0$, so fallen auch in Gleichung XVIII die zwei letzten Theilsätze weg; und sie reducirt sich auf

$$\left(\frac{d\left(\int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy\right)}{dx}\right)_a = \int_b^\beta \left(\frac{d_x V}{dx}\right)_{a,y} \cdot dy$$

Somit erkennt man, dass die hiesigen Gleichungen VII und VIII bezüglich in die VII und VIII der 285sten Aufgabe übergehen, sobald man statt der Functionen $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ bezüglich die von dem noch allgemeinen x unabhängigen Werthelemente b und β setzt.

(Man vergleiche die Schlussbemerkung hinter Aufg. 288.)



Aufgabe 288.

leinste Oberfläche zwischen vier gegebenen Flächen.

Einleitung.

läche wird von vier in den gegebenen Flächen liegenden Curven zwei einander gegenüber liegen, und von den beiden andern ge-

enen Flächen, in welchen sich das eine Paar der einander gegen-curven befindet, mögen dargestellt sein durch folgende Gleichungen

$$) \quad c' = f'(x, y), \qquad \text{und} \qquad II) \quad \gamma' = f'(x, y)$$

n der gegebenen Flächen, in welchen sich das andere Paar der iegenden Gränzcurven befindet, mögen dargestellt sein durch die

$$c'' = f''(x, y), \qquad \text{und} \qquad IV) \quad \gamma'' = f''(x, y)$$

t der Erinnerung, dass sowohl die vier gegebenen als auch die ge-n und dasselbe Coordinatensystem bezogen werden müssen.

egte Aufgabe sucht eine von vier noch zu ermittelnden Curven, n einer Gränzfläche liegt, begränzte Fläche, welcher eine kleinere nt, als bei jeder andern, der gesuchten Fläche stetsfort nächstan-weder durch die noch zu ermittelnden oder durch die ihnen nächst-nur in den Gränzflächen befindlichen Nachbarcurven begränzten) Fall sein kann. Man verlangt also für z eine solche Function der en x und y, für $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ solche Functionen des einzigen Ver-zugleich für a und α solche Werthe, dass der Ausdruck

$$\ldots^{(x)}_{(x)} V \cdot dy \cdot dx = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d_x z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d_y z}{dy}\right)^2} \right) \cdot dy \cdot dx$$

eines Minimum-standes wird.

oft es bequem ist, ζ und π bezüglich statt $\zeta(x)$ und $\pi(x)$; und Aenderungen, welchen man die gesuchten Functionen $\zeta(x)$ und $\pi(x)$ nmittelbare reine Mutationen, und dass die Aenderungen, welchen a und α unterwerfen muss, nur Werthänderungen sind. Dadurch h voriger Aufgabe) durch zusammengesetztes gemischtes Mutiren

$$\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \delta V \cdot dy \cdot dx + \int_a^\alpha (V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) - V_{x,\pi} \cdot \delta\pi(x)) \cdot dx$$

$$\left(\int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} V_{\alpha,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta\alpha - \left(\int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} V_{a,y} \cdot dy\right) \cdot \vartheta a$$

Aufg. 277 begründete) Umformung aus, und gebrauche die (schon endeten) Abkürzungszeichen P und Q. Ferner beachte man, dass rende Integration ganz unabhängig ist von ϑa, $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2\alpha$, etc., ist, ob man dort, wo nur nach y integrirt werden soll, die Elemente tc. unterhalb oder ausserhalb des Integralzeichens setzt. Somit be-zweite Form

$$) \quad {}_{(\delta)}U = -\int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy}\right) \cdot \delta z \cdot dy \cdot dx$$

$$\ldots^\alpha \left[V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta(x) + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\zeta} - \right.$$



Digitized by Google

$$- V_{x,\pi} \cdot \delta\pi(x) - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx}\right) \cdot \delta z_{x,\pi} \Big] \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} (V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha + P_{\alpha,y} \cdot \delta z_{\alpha,y}) \cdot dy$$

$$- \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} (V_{a,y} \cdot \vartheta a + P_{a,y} \cdot \delta z_{a,y}) \cdot dy$$

Man mutire Gleichung VI abermals, und forme um, so gibt sich

$$\text{VIII)} \quad {}_{[}\delta_{]}^2 U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} \Big\{ \left(- \frac{d_x P}{dx} - \frac{d_y Q}{dy} \right) \cdot \delta^2 z$$

$$+ \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(q \frac{d_x \delta z}{dx} - p \frac{d_y \delta z}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d_x \delta z}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \right)^2 \right] \Big\} \cdot dy \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \Big[V_{x,\zeta} \cdot \delta^2\zeta + 2 \cdot \delta V_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta + \left(\frac{d_y V}{dy} \right)_{x,\zeta} \cdot \delta\zeta^2 + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right) \cdot \delta^2 z_{x,\zeta}$$

$$- V_{x,\pi} \cdot \delta^2\pi - 2 \cdot \delta V_{x,\pi} \cdot \delta\pi - \left(\frac{d_y V}{dy} \right)_{x,\pi} \cdot \delta\pi^2 - \left(Q_{x,\pi} - P_{x,\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} \right) \cdot \delta^2 z_{x,\pi} \Big] \cdot dx$$

$$+ \int_{\pi(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} \Big[V_{\alpha,y} \cdot \vartheta^2\alpha + 2 \cdot \delta V_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{d_x V}{dx} \right)_{\alpha,y} \cdot \vartheta\alpha^2 + P_{\alpha,y} \cdot \delta^2 z_{\alpha,y} \Big] \cdot dy$$

$$- \int_{\pi(a)}^{\zeta(a)} \Big[V_{a,y} \cdot \vartheta^2 a + 2 \cdot \delta V_{a,y} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_x V}{dx} \right)_{a,y} \cdot \vartheta a^2 + P_{a,y} \cdot \delta^2 z_{a,y} \Big] \cdot dy$$

$$+ V_{\alpha,\zeta(\alpha)} \cdot \frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot V_{\alpha,\zeta(\alpha)} \cdot \delta\zeta(\alpha) \cdot \vartheta\alpha$$

$$- V_{\alpha,\pi(\alpha)} \cdot \frac{d\pi(\alpha)}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha^2 - 2 \cdot V_{\alpha,\pi(\alpha)} \cdot \delta\pi(\alpha) \cdot \vartheta\alpha$$

$$- V_{a,\zeta(a)} \cdot \frac{d\zeta(a)}{da} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot V_{a,\zeta(a)} \cdot \delta\zeta(a) \cdot \vartheta a$$

$$+ V_{a,\pi(a)} \cdot \frac{d\pi(a)}{da} \cdot \vartheta a^2 + 2 \cdot V_{a,\pi(a)} \cdot \delta\pi(a) \cdot \vartheta a$$

Hier in dieser Aufgabe ist

$$\text{IX)} \quad \delta V = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \frac{d_x \delta z}{dx} + q \frac{d_y \delta z}{dy} \right) = P \cdot \frac{d_x \delta z}{dx} + Q \cdot \frac{d_y \delta z}{dy}$$

$$\text{X)} \quad \frac{d_x V}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \frac{d_x^2 z}{dx^2} + q \frac{d_x d_y z}{dx . dy} \right) = P \cdot \frac{d_x^2 z}{dx^2} + Q \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy}$$

und

$$\text{XI)} \quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \left(p \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + q \frac{d_y^2 z}{dy^2} \right) = P \cdot \frac{d_x d_y z}{dx . dy} + Q \cdot \frac{d_y^2 z}{dy^2}$$

Erstens. Untersuchung der ersten (in VI aufgestellten) Form des ${}_{[}\delta_{]}U$. In dieser Form kommen die Mutationen der zur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten nicht vor. Da aber die Aufgabe vorschreibt, dass die gesuchte Fläche von den gegebenen Gränzflächen begränzt werden soll, also die Gränzordinaten der gesuchten Fläche

Digitized by Google

ten der gegebenen Gränzflächen sein müssen; so müssen durchaus ur gesuchten Fläche gehörigen Gränzordinaten verglichen werden der zu den gegebenen Gränzflächen gehörigen Ordinaten. Dazu Form des $_{[(}\delta_{)]}U$ nicht die Mittel, sie kann also nicht weiter beach-

tersuchung der zweiten (in VII aufgestellten) Form $_{[(}\delta_{)]}U$. Diese in die Hauptgleichung

$$\text{XII)}\quad \frac{d_x P}{dx} + \frac{d_y Q}{dy} = 0$$

leichbedeutend ist mit folgender

$$\text{I)}\quad (1 + q^2)\cdot r - 2pq\cdot s + (1 + p^2)\cdot t = 0$$

noch die Gränzengleichung

$$)\quad \int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta}\cdot\delta z + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. V_{x,\varkappa}\cdot\delta\varkappa - \left(Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\varkappa}\right]\cdot dx$$

$$+ \int_{\varkappa(\alpha)}^{\zeta(\alpha)} (V_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha + P_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y})\cdot dy$$

$$- \int_{\varkappa(a)}^{\zeta(a)} (V_{a,y}\cdot\vartheta a + P_{a,y}\cdot\delta z_{a,y})\cdot dy = 0$$

XIII ist dieselbe, wie Gleichung VIII oder IX in der 261sten Auf- constant sind.

veit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden

Specieller Gränzfall.

bsolut kleinste Oberfläche, welche zwischen den vier gegebenen ist.

die Gränzengleichung zunächst in folgende drei

$$1)\quad V_{\alpha,y}\cdot\vartheta\alpha + P_{\alpha,y}\cdot\delta z_{\alpha,y} = 0$$

$$2)\quad V_{a,y}\cdot\vartheta a + P_{a,y}\cdot\delta z_{a,y} = 0$$

$$\int_a^\alpha \left[V_{x,\zeta}\cdot\delta\zeta + \left(Q_{x,\zeta} - P_{x,\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\zeta}\right.$$

$$\left. {}_\varkappa\cdot\delta\varkappa - \left(Q_{x,\varkappa} - P_{x,\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx}\right)\cdot\delta z_{x,\varkappa}\right]\cdot dx = 0$$

läche die vier Gränzflächen schneidet, so bekommt man vier und für letztere müssen folgende vier Gleichungen stattfinden:

$$4)\quad z_{a,y} = f'(a, y),\qquad 5)\quad z_{\alpha,y} = f'(\alpha, y)$$

$$z_{x,\varkappa} = f''(x, \varkappa(x)),\qquad 7)\quad z_{x,\zeta} = f'''(x, \zeta(x))$$

1, 2, 4, 5 werden behandelt wie im ersten Gränzfalle der 286sten ommt man folgende zwei neue Gleichungen:


Digitized by Google

$$8)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_x\gamma'}{dx}\right)_{\alpha,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{\alpha,y}\cdot\left(\frac{d_y\gamma'}{dy}\right)_{\alpha,y}=0$$

$$9)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_x c'}{dx}\right)_{a,y}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{a,y}\cdot\left(\frac{d_y c'}{dy}\right)_{a,y}=0$$

Die drei Gleichungen 3, 6, 7 werden behandelt, wie im ersten Gränzfalle der 281sten Aufgabe; und so bekommt man folgende zwei neue Gleichungen

$$10)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\zeta}\cdot\left(\frac{d_x\gamma''}{dx}\right)_{x,\zeta}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\zeta}\cdot\left(\frac{d_y\gamma''}{dy}\right)_{x,\zeta}=0$$

$$11)\quad 1+\left(\frac{d_x z}{dx}\right)_{x,\pi}\cdot\left(\frac{d_x c''}{dx}\right)_{x,\pi}+\left(\frac{d_y z}{dy}\right)_{x,\pi}\cdot\left(\frac{d_y c''}{dy}\right)_{x,\pi}=0$$

Aus den vier letzten Gleichungen erkennt man, dass die gesuchte Fläche auf den vier gegebenen Gränzflächen senkrecht steht.

Man hat nun acht Gleichungen (Nr. 4—11). Vier davon werden benützt, wenn es sich darum handelt, die zwei willkürlichen Functionen zu bestimmen, welche durch Integration der Gleichung XIII eingegangen sind. Zwei werden dazu verwendet, um zu suchen, was $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ für Functionen von x sind. Die zwei noch übrigen endlich werden dazu verwendet, um zu suchen, was a und α für feste Werthe haben müssen.

Weil die Abscissen a und α feste Werthe haben, so erkennt man, dass die in den beiden Flächen $c' = f'(x, y)$ und $\gamma' = f'(x, y)$ liegenden Gränzcurven ebene Curven sind; denn sie liegen in, auf der Abscissenaxe X senkrechten, also auch parallelen Ebenen.

Setzt man $\pi(a)$ und $\zeta(a)$ an die Stelle des y in Gleichung 4, so gibt sich bezüglich

$$12)\quad z_{a,\pi(a)} = f'(a,\pi(a)),\qquad\text{und}\qquad 13)\quad z_{a,\zeta(a)} = f'(a,\zeta(a))$$

Setzt man $\pi(\alpha)$ und $\zeta(\alpha)$ an die Stelle des y in Gleichung 5, so gibt sich bezüglich

$$14)\quad z_{\alpha,\pi(\alpha)} = f'(\alpha,\pi(\alpha)),\qquad\text{und}\qquad 15)\quad z_{\alpha,\zeta(\alpha)} = f'(\alpha,\zeta(\alpha))$$

Setzt man a und α an die Stelle des x in Gleichung 6, so gibt sich bezüglich

$$16)\quad z_{a,\pi(a)} = f''(a,\pi(a)),\qquad\text{und}\qquad 17)\quad z_{\alpha,\pi(\alpha)} = f''(\alpha,\pi(\alpha))$$

Setzt man a und α an die Stelle des x in Gleichung 7, so gibt sich bezüglich

$$18)\quad z_{a,\zeta(a)} = f''(a,\zeta(a)),\qquad\text{und}\qquad 19)\quad z_{\alpha,\zeta(\alpha)} = f''(\alpha,\zeta(\alpha))$$

Aus 12 und 16 folgt

$$20)\quad f'(a,\pi(a)) = f''(a,\pi(a))$$

Aus 13 und 18 folgt

$$21)\quad f'(a,\zeta(a)) = f''(a,\zeta(a))$$

Aus 14 und 17 folgt

$$22)\quad f'(\alpha,\pi(\alpha)) = f''(\alpha,\pi(\alpha))$$

Aus 15 und 19 folgt

$$23)\quad f'(\alpha,\zeta(\alpha)) = f''(\alpha,\zeta(\alpha))$$

Dass die vier letzten Gleichungen (Nr. 20—23) erfüllt werden, ist ein Ergebniss, welches ganz der Natur der hier vorgelegten Aufgabe entspricht. Es müssen nemlich (wie schon am Eingange dieser Aufgabe bemerkt) von den vier Gränzcurven immer je zwei einander gegenüber liegen, und von den beiden andern geschnitten werden, weil man sonst durch sie keine Fläche begränzen könnte. Man hat also hier abermals ein Beispiel, wie die Erscheinungen des Calculs jedesmal mit den Eigenthümlichkeiten des ihm unterworfenen Gegenstandes übereinstimmen. (Man vergleiche den ersten Fall in den Aufgaben 255, 267 und 286.)

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen. Zu diesem Ende hat man Gleichung VIII so zu specialisiren, wie es die Eigenheiten des hiesigen Gränzfalles mit sich bringen. Die Ausführung mag aber (in Folge der Aufgaben 281 und 286) unterbleiben.

Andere Gränzfälle kann man sich nach Belieben bilden.

Digitized by Google

rkung. Zur Vervollständigung der letzten (Seite 633 und 634 be-
emerkung komme ich wieder auf die beiden dort genannten Abhand-

en Titel:

e sur le calcul des variations. Par M. Poisson. Lu à l'académie le
mbre 1831 —

dem (im Jahre 1833 gedruckten) XII^{ten} Bande der Pariser Memoiren.
den Titel:

e sur le calcul des variations des intégrales multiples. Par M. Ostro-
. Lu à l'académie impériale des sciences de St. Petersburg, le 24
1834 —

den Petersburger Memoiren. Serie VI. Tom. III.

te 228 und 229 des genannten XII^{ten} Bandes):

um das Maximum oder Minimum eines einfachen Integrals handelt, so
thode nichts zu wünschen übrig, sei es hinsichtlich der allgemeinen
welche die gesuchten Functionen hergestellt werden, oder sei es hin-
nderen Gleichungen, welche sich auf die Gränzen beziehen. Das all-
des Variationscalcul's schmiegt sich auch ohneweiters dem Falle an,
oder mehrfaches Integral mit fest vorgeschriebenen Gränzen gegeben
ber verhält es sich, wenn die Gränzen des Doppelintegrals unbekannt
nd. Nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft kennt man weder
noch selbst die Anzahl der Gleichungen, welche sich auf jede der
und zu deren Bestimmung dienen. Diese Lücke in der Wissenschaft
rksamkeit der Mathematiker; und desshalb habe ich es versucht, die-

ser Abhandlung zerfällt in zwei Abtheilungen. In der ersten (Seite
ich eine Untersuchung, welche sich mit Integralen beschäftigt, wo nur
nabhängiger Veränderlicher vorkommt. Diese Untersuchung ist, wie
selbst ausgesprochen hat, durch Lagrange's Methode bereits voll-
d somit dem Zwecke der Abhandlung fremd. In der zweiten Abthei-
) befindet sich die Untersuchung, welche sich mit Integralen beschäf-
verschiedenen Veränderlichen integrirt wird; und diese Untersuchung
weck der Abhandlung.

aubt, er müsse, um (für die Fälle, wo auch die Gränzen des Doppel-
sind) den Formeln die gehörige Allgemeinheit zu geben, dem Calcul
terlegen; und zu diesem Ende hat er an die Stelle der beiden Ver-
, nach welchen integrirt werden soll, zwei Functionen zweier andern
l v gesetzt, etc. etc. Zuletzt hat er wieder die beiden Veränderlichen
rt.

lches Verfahren hat er die ohnehin nicht sehr einfache Untersuchung
ickelt, und mit unnöthigen Schwierigkeiten überhäuft.

nde hat Ostrogradsky seine Abhandlung geschrieben, und gezeigt,
der beiden neuen Veränderlichen unnöthig ist, und dass bei der bis-
ler Variationscalcul jede nur wünschenswerthe Allgemeinheit mit der
vereinigen kann.

uf die neun letzten Aufgaben (nemlich 280—288), so er-
es in der That unnöthig ist, zwei neue Veränderliche

andlungen müssen folgende vier Bemerkungen gemacht werden:

en Abtheilung von Poisson's Abhandlung (Seite 286, etc.), sowie in
ng von Ostrogradsky sind bei den bestimmten Integralen die Grän-
tegralzeichen angesetzt; und dieser Mangel ist natürlich von grossem

sten Mutationscoefficient hat Poisson (Seite 295) folgende Formel

$$\delta U = \Gamma + \iint H \cdot \omega \cdot dy \cdot dx$$

r das Abkürzungszeichen H mitgetheilte Ausdruck ist vollständig. Er
te, welcher die Hauptgleichung liefert.

Γ mitgetheilte Ausdruck leidet an folgenden drei Gebrechen:

bestimmten Integralen sind, wie bereits erwähnt, die Gränzen nicht
zt.

en alle jene Theilsätze, welche kein Integralzeichen mehr enthalten.

Digitized by Google

3) Die vorhandenen Theilsätze sind weder gehörig entwickelt, noch ist irgend eine Anleitung zu dieser Entwickelung gegeben; und doch sind die dazu nöthigen Transformationen von so eigenthümlicher Art, dass sie eine Anleitung durchaus erfordern.

Dieser unvollkommene Zustand von Poisson's Formel macht, dass man nicht so leicht überschauen kann, wie sie in den verschiedenen speciellen Fällen behandelt werden muss. Davon überzeugt man sich ohneweiters, wenn man sie mit den meinigen vergleicht. (Man sehe Nr. XIII in Aufg. 280; ebenso Nr. XV in Aufg. 284, und Nr. VII in Aufg. 288.)

Ostrogradsky hat für die Herstellung der Form des ersten Mutationscoefficienten noch viel weniger gethan, und sich begnügt, am Schlusse seiner Abhandlung folgende Erklärung hinzusetzen:

„Nous n'avons fait qu'indiquer les transformations qu'on doit faire subir à la partie „$\int DU \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ . . . . de la variation δV; parce que ces transformations, se „réduisant à l'intégration par parties, appartiennent plutôt au calcul intégral, qu'à la „méthode des variations. A la vérité, un des principes fondamentaux de cette dernière „méthode consiste à faire disparaître, autant que possible, les différentielles des variations „qui se trouvent sous un signe intégral; mais le calcul des variations ne fait qu'indiquer „cette opération et en laisse l'exécution au calcul intégral."

Mit dieser Erklärung Ostrogradsky's

„Es ist unnöthig, in einer Abhandlung über Variationscalcul solche nur auf Integration sich beziehenden Transformationen auszuführen"

wird derjenige nicht so leicht einverstanden sein, welcher auf die in den Aufgaben 277, 281, 284, 287 befindlichen Transformationen zurückschaut; denn sie sind, wie bereits gemeldet, von so eigenthümlicher Art, dass jedenfalls eine Anleitung zu ihrer Ausführung gegeben werden muss. Da nun auch das vollständigste Lehrbuch über Integralcalcul keinen Anlass findet, sich mit dergleichen zu befassen, warum sollten sie nicht ausgeführt werden in einer Abhandlung, wo sie sich von selbst darbieten?

III) In beiden Abhandlungen kommt bloss allgemeine Theorie vor, und keine einzige specielle Aufgabe, womit die ohnehin so schwierige Untersuchung in ihren Einzelheiten hätte beleuchtet werden können. Poisson hat zwar (Seite 320 seiner Abhandlung) versprochen, specielle Aufgaben in einem spätern Mémoire nachzuliefern; allein dieses ist nicht erschienen.

Dass die Erledigung der Einzelheiten, welche sich in dergleichen speciellen Fällen darbieten, oft sehr instructiv ist; davon kann man sich überzeugen, wenn man auf die betreffenden Aufgaben (Nr. 249 bis 288) zurückschaut. (Man vergleiche z. B. Aufg. 281 und 282.)

IV) In keiner der beiden Abhandlungen ist der für das Prüfungsmittel sich ergebende Ausdruck hergestellt und untersucht, obgleich auch in dieser Beziehung noch eine Lücke auszufüllen war. Und so haben beide Abhandlungen, während sie jede praktische Anwendung unberücksichtigt liessen, auch in theoretischer Beziehung nur die Hälfte dessen auszuführen versucht, was sie übernommen hatten.

Hinsichtlich des Prüfungsmittels bei Doppelintegralen vergleiche man z. B. die letzten Zeilen von §. 242; auch die Aufgaben 251—256; sodann Seite 631, 635, 661, 663, 665; besonders Seite 688.

Aus diesen Bemerkungen erkennt man hinlänglich, dass auch nach den besagten zwei Abhandlungen noch Vieles, was sich auf Doppelintegrale bezieht, nachzuholen und zu erledigen war.

Alle Aufgaben, in welchen das Maximum oder Minimum eines Doppelintegrals gesucht wird, lassen sich auf folgende Weise classificiren.

Erste Klasse. Es soll $U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während die vier Elemente a, α, b, β constante (gegebene oder nichtgegebene) Werthe haben. (Hierher gehören die Aufgaben 249—275.)

Zweite Klasse. Es soll $U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\xi(x)} V \cdot dy \cdot dx$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, während $\pi(x)$ und $\xi(x)$ gegebene Functionen von x sind, und die beiden Elemente a und α constante (gegebene oder nichtgegebene) Werthe haben. (Hierher gehören die Aufgaben 277—279).

In dieser zweiten Klasse sind alle Aufgaben der ersten Klasse als specielle Fälle enthalten, wie Seite 676 auseinandergesetzt ist.

Digitized by Google

. Es soll $U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$ ein Maximum-stand oder Mini- während die Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ noch zu suchen sind, dagegen a und α constante (gegebene oder nichtgegebene) Werthe haben. Da- hten Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ unmittelbaren Mutationen unterworfen. Aufgaben 280 — 284.)

Klasse sind alle Aufgaben der zweiten, folglich auch alle Aufgaben specielle Fälle enthalten, wie Seite 682 auseinandergesetzt ist.

Es soll $U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$ der Maximumwerth eines Maxi- r Minimumwerth eines Minimum-standes werden, während b und β noch allgemeinen x sind. Man sucht also bestimmte Werthe für a, werden diese vier Elemente nur Werthänderungen unterworfen. (Hier- gaben 285 und 286.)

Klasse sind alle jene Aufgaben, bei welchen eines oder einige der b, β constant sind, als specielle Fälle enthalten. Ebenso gehören alle Klasse als specielle Fälle hierher.

. Es soll $U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$ der Maximumwerth eines Maxi- r Minimumwerth eines Minimum-standes werden, während $\pi(x)$ und nen von x sind. Man sucht also bestimmte Werthe für a und α; und eiden Elemente nur Werthänderungen unterworfen.

Klasse sind alle Aufgaben der zweiten und ersten Klasse als specielle

se. Es soll $U = \int_a^\alpha \int_{\pi(x)}^{\zeta(x)} V \cdot dy \cdot dx$ der Maximumwerth eines Ma- der Minimumwerth eines Minimum-standes werden, während sowohl n $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ als auch die Werthe der beiden Elemente a und α Dabei werden die Functionen $\pi(x)$ und $\zeta(x)$ unmittelbaren Mutationen, e a und α werden nur Werthänderungen unterworfen. (Hierher ge- 287 und 288.)

en Klasse sind alle Aufgaben der vorhergehenden fünf Klassen als en. (Man vergleiche Seite 732.)

loge Classification findet bei solchen Aufgaben statt, rücke führen, wo nach mehr als zwei Veränderlichen

---

dem Begriffe einer Mutation und dem einer blossen Werthänderung rschied besteht, ebenso ist auch die Behandlungsweise beider wesent- e Verschiedenheit der Behandlungsweise vor die Anschauung zu füh- eiden letzten Aufgaben (Nr. 287 und 288) vorzüglich geeignet.

hier noch einmal, dass es allen meinen Vorgängern entgangen ist, nd Werthänderung zu unterscheiden. Dieselben sind also auch nicht n, neben der für die Mutationen bereits eingeführten Bezeichnung ir die Werthänderungen geltende einzuführen. Wenn ihnen nun ein dessen Lösung die Vereinigung beider Begriffe nöthig ist; so haben en angewendet, wo Werthänderungen hätten angewendet werden sol- auch da das Zeichen der Mutationen gesetzt, wo ich das der Werth-

welcher die gehörige Vergleichung anstellt, sich leicht überzeugen, fahren (indem ich nemlich die Begriffe von Mutation und Werthände- eide, und dazu auch eine eigenthümliche Bezeichnung eingeführt habe) , Leichtigkeit und Eleganz gewonnen worden ist. In dieser Beziehung lein auf die beiden letzten Aufgaben (Nr. 287 und 288), sondern viel- re, z. B. auf Aufg. 160, 161, 178, 179, etc.


Digitized by Google

Erster theoretischer Nachtrag,

betreffend

die beiden von Euler und Lagrange mitgetheilten Methoden für die Auflösung der (von Euler) sogenannten relativen Grössten und Kleinsten.

Erste Abtheilung.

Die Begriffsbestimmungen, welche Euler von den absoluten Grössten und Kleinsten und von den relativen Grössten und Kleinsten aufgestellt hat.

I) Absolute, d. h. unbedingte Grösste und Kleinste nennt Euler die Fälle folgender Art:

A) Es sei V ein aus den Elementen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

gebildeter Ausdruck, und man sucht y als solche Function von x, dass dabei folgendes bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

B) Es sei V ein aus den Elementen

$$x,\ y,\ z,\ v\ \ldots\ldots,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dv}{dx},\ \ldots\ldots,\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2v}{dx^2},\ \ldots\ldots$$

gebildeter Ausdruck; und man sucht für die unter sich ganz unabhängigen Elemente y, z, v . . . . . solche Functionen von x, dass dabei folgendes bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

C) Es sei V ein aus den Elementen

$$x,\ y,\ z,\ \frac{d_xz}{dx},\ \frac{d_yz}{dy},\ \frac{d_x^2z}{dx^2},\ \frac{d_xd_yz}{dx.dy},\ \frac{d_y^2z}{dy^2}\ \ldots\ldots\ldots$$

gebildeter Ausdruck, und man sucht z als solche Function von x und y, dass dabei folgendes bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

ein Grösstes oder kleinstes wird.

Und so fort.

Digitized by Google

. h. bedingte Grösste und Kleinste nennt Euler die Fälle folgen-

und W Ausdrücke, die mit den Elementen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\ldots$$

an sucht aus allen jenen Functionen y von x, welche dem bestimm-

$$\int_a^\alpha W \cdot dx$$

n, diejenige Function heraus, wobei das bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

leinstes wird.

W′, W″, W‴, etc. Ausdrücke, die mit den Elementen

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\ldots,$$

man sucht aus allen jenen Functionen y von x, welche den be-

$$W' \cdot dx,\ \int_a^\alpha W'' \cdot dx,\ \int_a^\alpha W''' \cdot dx,\ \text{etc. etc.}$$

Werthe lassen, diejenige Function heraus, bei welcher das be-

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

einstes wird.

und W Ausdrücke, die mit den Elementen

$$\ldots,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dv}{dx},\ \ldots\ldots\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2v}{dx^2},\ \ldots\ldots$$

an sucht aus allen jenen Functionen y, z, v, . . . von x, welche
zusammen stehen, dass dabei das bestimmte Integral

$$\int_a^\alpha W \cdot dx$$

h behält, diejenigen Functionen heraus, bei denen das bestimmte

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

leinstes wird.

W′, W″, W‴, etc. Ausdrücke, die mit den Elementen

$$\ldots,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dv}{dx},\ \ldots\ldots,\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2v}{dx^2}\ \ldots\ldots$$

an sucht aus allen jenen Functionen y, z, v . . . . von x, welche
zusammenstehen, dass dabei den bestimmten Integralen

$$W' \cdot dx,\ \int_a^\alpha W'' \cdot dx,\ \int_a^\alpha W''' \cdot dx,\ \text{etc. etc.}$$

selben Werthe bleiben, diejenigen Functionen heraus, bei denen
ral



Digitized by Google

$$U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

E) Es seien V und W Ausdrücke, die mit den Elementen

$$x, y, z, \frac{d_x z}{dx}, \frac{d_y z}{dy}, \ldots\ldots$$

gebildet sind; und man sucht aus allen jenen Functionen z von x und y, welche dem bestimmten Integrale

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta W \cdot dy \cdot dx$$

einerlei Werth lassen, diejenige Function heraus, wobei das bestimmte Integral

$$U = \int_a^\alpha \int_b^\beta V \cdot dy \cdot dx$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Und so fort.

Zweite Abtheilung.

Beurtheilung dieser von Euler aufgestellten Begriffsbestimmungen.

Euler befasst sich, wie so eben gezeigt, nur mit solchen Ausdrücken, die aus bestimmten Integralen bestehen; und die Ausdrücke, welche aus blossen Urfunctionen bestehen, oder welche auch noch mit Differentialen versehen sind, lässt er unberücksichtigt.

Erstens. Gegen die Euler'sche Begriffsbestimmung der absoluten Grössten und Kleinsten lässt sich nichts einwenden; denn sie kann gradezu auch ausgedehnt werden auf Ausdrücke, welche aus blossen Urfunctionen bestehen, oder welche auch noch mit Differentialen versehen sind.

Zweitens. Aber die Euler'sche Begriffsbestimmung der relativen Grössten und Kleinsten ist viel zu enge; denn sie begreift alle jene Fälle nicht in sich, wo die Nebenbedingungen sich nur auf die Gränzen beziehen, oder durch Urgleichungen oder Differentialgleichungen gegeben sind.

A) Die Euler'sche Begriffsbestimmung enthält z. B. folgenden Fall in sich: „Man „sucht die kürzeste Linie unter allen denen, welche zwischen zwei (zu $x = a$ „und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten erstreckt sind, und mit „ihren Gränzordinaten und der Abscissenaxe den nemlichen Flächeninhalt einschlies-„sen." Die absolut kürzeste Entfernung zwischen zwei vorgeschriebenen Punkten in einer Ebene ist bekanntlich die grade Linie; aber die kürzeste Linie zwischen den nemlichen zwei Punkten, wenn sie noch einen bestimmten Flächeninhalt einschliessen soll, ist der Kreis. (Man sehe Aufg. 158, erster Fall, Seite 222; und Aufg. 214.)

B) Dagegen enthält die Euler'sche Begriffsbestimmung z. B. folgende drei Fälle nicht in sich:

1) Man sucht die kürzeste Entfernung zwischen zwei rechtwinkeligen Gränzordinaten, unter der Bedingung, dass das Product der Gränzordinaten einen vorgeschriebenen Werth habe. (Man sehe: sechster Fall, Seite 226.)

2) Man sucht die kürzeste Entfernung zwischen zwei ebenen Curven, unter der Bedingung, dass die Differenz der Gränzordinaten einen vorgeschriebenen Werth habe. (Man sehe: dritter Fall, Seite 256.)


Digitized by Google

af einer Kugelfläche die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.
ste Entfernung zwischen zwei Punkten im Raume ist bekanntlich
zwischen den nemlichen zwei Punkten ist die kürzeste Entfernung,
ugelfläche liegen soll, der Bogen eines grössten Kreises. (Man
36.)

, die in der von Euler gegebenen Begriffsbestimmung der relati-
insten nicht enthalten sind, gibt es in diesem Werke eine grosse

---

Dritte Abtheilung.

Methoden, welche Euler und Lagrange für die relativen Grössten und Kleinsten aufgestellt haben.

kmässigsten sein, specielle Beispiele vorzulegen, und an ihnen
und wie Lagrange verfahren ist.

l. Man sucht unter allen ebenen Curven, welche zwischen den
und α gehörigen) rechtwinkeligen Gränzordinaten einerlei Flächen-
iejenige, bei welcher der Schwerpunkt dieser Fläche am höchsten
zontal genommenen Abscissenaxe so nahe oder ferne als möglich)
g. 233.)

be verlangt also für y eine solche Function von x, dass der Quo-

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

instes wird, während eben diese für y gesuchte Function nur aus
erausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

enen oder nichtgegebenen) Werth bekommt.

erfährt dabei auf folgende Weise: Er multiplicirt den Ausdruck
noch unbekannten, aber im Laufe der Untersuchung sich bestim-
'actor, und addirt dieses Product zu I. Er setzt also

$$\text{III)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx} + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

nige Function y von x auf, welche den Ausdruck III zu einem
en macht.

wäre allerdings gerechtfertigt, wenn der Ausdruck II selbst Null
ohl ein abhängig mutables als auch ein unabhängig mutables Ele-
; denn dann wäre der Ausdruck III dem Ausdrucke I vollkommen
or L würde dazu dienen, die Mutationen des abhängig mutablen
en. Allein da das bestimmte Integral II nicht Null ist, so ist das
ganz anderes, als das in I stehende U; und es fragt sich:

zu, dass diejenige Function y von x, welche den Ausdruck III



Digitized by Google

zu einem Grössten oder Kleinsten macht, auch den Ausdruck I zu einem Grössten oder Kleinsten machen kann?

B) Woher weiss man, dass die gefundene Function y von x nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt ist, welche alle für das bestimmte Integral II den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth liefern?

Ein Versuch, diese zwei Fragen theoretisch zu beantworten, wird immer ein Versuch bleiben; und es ist nöthig, statt der Euler'schen Methode eine andere aufzustellen, welche nicht an diesen Mängeln leidet.

Zweitens. Desshalb schlägt Lagrange, dem diese Mängel der Euler'schen Methode nicht entgangen sein können, ein anderes Verfahren vor; er setzt nemlich statt des Ausdruckes II die identische Gleichung

$$\text{IV)}\quad z_x - z_a = \int_a^x y \cdot dx$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{V)}\quad \frac{dz}{dx} = y$$

Da nun der Flächeninhalt entweder vorgeschrieben oder auch nach Willkür gewählt werden kann; so ist z das unabhängig mutable und y ist das abhängig mutable Element. Man eliminire also y aus I, so gibt sich

$$\text{VI)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot dx}$$

Lagrange selbst hat niemals direct eliminirt, sondern jedesmal indirect mittelst eines Multiplicators. Zu diesem Ende verwandelt er Gleichung V in folgende:

$$\text{VII)}\quad y - \frac{dz}{dx} = 0$$

Diese multiplicirt er dann mit einer (vorerst noch unbekannten, sich aber im Laufe der Untersuchung bestimmenden) nichtmutablen Function M von x. Dann ist auch noch das Product

$$\text{VIII)}\quad M \cdot \left(y - \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

eine identische Gleichung. Mutirt man, so ist auch noch

$$\text{IX)}\quad M \cdot \left(\delta y - \frac{d\delta z}{dx}\right) = 0$$

eine identische Gleichung. Weil nun Gleichung VIII eine identische ist, so ist auch

$$\text{X)}\quad \int_a^\alpha M \cdot \left(y - \frac{dz}{dx}\right) \cdot dx = 0$$

Man kann also das Integral X zu I addiren, ohne dass dadurch das U im Mindesten geändert wird, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XI)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx} + \int_a^\alpha M \cdot \left(y - \frac{dz}{dx}\right) \cdot dx$$

Ueber die Lagrange'sche Methode gelten folgende zwei Bemerkungen:

A) So lange nur eine einzige Nebenbedingung gegeben ist, wie beim hiesigen Beispiele; ist das Lagrange'sche Verfahren vollkommen einleuchtend.

Digitized by Google

wei und noch mehr Nebenbedingungen gegeben, so ist das La-
n ein durchaus unbegreifliches; und dieser Ausspruch soll an dem
n Beispiele noch näher begründet werden.
iel. Es soll

$$\text{XII)} \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

instes werden, während y nur aus der Zahl derjenigen Functionen
n darf, bei denen allen das bestimmte Integral

$$\text{XIII)} \quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

n oder nichtgegebenen) Werth behält, und bei denen allen auch
al

$$\text{XIV)} \int_a^\alpha y \cdot x \cdot dx$$

nen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält.
verfährt hier, wie bei dem einfacheren Beispiele. Er multiplicirt
nit einem (vorerst noch unbekannten, aber im Laufe der Unter-
nenden) constanten Factor K; ebenso multiplicirt er den Ausdruck
erst noch unbekannten, aber im Laufe der Untersuchung sich be-
ten Factor M. Dann addirt er diese beiden Producte zu XII, und

$$= \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx} + K \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx + M \cdot \int_a^\alpha xy \cdot dx$$

ge Function y von x auf, welche diesen Ausdruck XV zu einem
ten macht.
aber dieselben Fragen und Bemerkungen wiederholen, welche schon
gegen die Euler'sche Methode gemacht worden sind.
ige dehnt natürlich sein beim einfacheren Falle angewendetes Ver-
en zusammengesetzteren aus. Statt der Ausdrücke XIII und XIV
atische Gleichungen:

$$\text{XVI)} \quad z_x - z_a = \int_a^x y \cdot dx$$

$$\text{XVII)} \quad v_x - v_a = \int_a^x x \cdot y \cdot dx$$

ifferentiation

$$\text{XVIII)} \quad \frac{dz}{dx} = y$$

$$\text{XIX)} \quad \frac{dv}{dx} = x \cdot y$$

eines jeden der Integrale $\int_a^\alpha y \cdot dx$ und $\int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$ entweder
ach Willkür gewählt werden kann, so muss, wenn das Lagrange'sche
sein soll, sowohl z als auch v eine unabhängig mutable Function
es wird aus Nachfolgendem einleuchtend.

Digitized by Google

𝔄) Wäre y unabhängig mutabel, so wären z und v abhängig mutabel, wie aus den Gleichungen XVIII und XIX erhellt; und z und v hätten keinen Einfluss auf U, so dass sich dasselbe Resultat ergeben würde, wie wenn keine einzige Nebenbedingung gegeben wäre. Es kann also y nicht unabhängig mutabel sein.

𝔅) Wäre z allein unabhängig mutabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch Gleichung XVIII ergeben, und zugleich würde Gleichung XIX übergehen in $\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{dz}{dx}$, d. h. v wäre von z abhängig. Der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in

$$U = \frac{\int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot dx}$$

so dass U nur von z abhinge, und z keinen Einfluss auf U hätte, eben so wenig, als (unter der hiesigen Voraussetzung) das v Einfluss auf y hat, da im Gegentheil v von y, und wiederum y von z abhängt. Wenn also z allein unabhängig mutabel ist, so ist es grade so, wie wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^\alpha y \cdot dx$ soll immer denselben Werth behalten" gemacht wäre.

ℭ) Wäre v allein unabhängig mutabel, so würde sich die Abhängigkeit des y durch Gleichung XIX ergeben; und zugleich würde Gleichung XVIII übergehen in $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dv}{dx}$, d. h. z wäre von v abhängig, und der für U aufgestellte Ausdruck ginge über in

$$U = \frac{\int_a^\alpha \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dv}{dx}\right)^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dv}{dx}\right) \cdot dx}$$

so dass U von v allein abhinge, und z keinen Einfluss auf U hätte, eben so wenig, als (unter der hiesigen Voraussetzung) z Einfluss auf y hat, da im Gegentheil z von y, und wiederum y von v abhängig ist. Wenn also v allein unabhängig mutabel ist, so ist es grade so, wie wenn nur die einzige Nebenbedingung „das bestimmte Integral $\int_a^\alpha x \cdot y \cdot dx$ soll immer denselben Werth behalten" gemacht wäre.

Daraus ist evident erwiesen, dass, wenn das Lagrange'sche Verfahren anwendbar sein soll, sowohl z als auch v eine für sich unabhängig mutable Function sein muss. Da nun durchaus kein Eliminationsprocess möglich ist, oder auch nur in der Idee gedacht werden kann, durch welchen y von z und v zugleich abhängig wird (wobei dann auch U von v und z zugleich abhängig wird); so muss auch die Lagrange'sche Methode verworfen werden. Was aber hier nothwendig ist, wo nur zwei Nebenbedingungen gegeben sind, das ist um so mehr nothwendig, wenn drei und noch mehr Nebenbedingungen gegeben sind.

Lagrange hat freilich in seiner Theorie der relativen Grössten und Kleinsten von dem directen Eliminationsprocesse nichts gesprochen, und doch ist nur durch diesen der Weg vorgezeigt, welcher sicher zu den richtigen Resultaten führt; sondern Lagrange hat auch hier die indirecte Elimination mittelst Multiplicatoren angewendet, indem er die beiden identischen Gleichungen $y - \frac{dz}{dx} = 0$ und $x \cdot y - \frac{dv}{dx} = 0$ bezüglich mit den nichtmutablen (vorerst aber noch unbekannten) Functionen 𝔎 und 𝔐 multiplicirt, und dann

Digitized by Google

$$\cdot dx \quad + \int_a^\alpha \mathfrak{K}\left(y - \frac{dz}{dx}\right) \cdot dx + \int_a^\alpha \mathfrak{M}\left(zy - \frac{dv}{dx}\right) \cdot dx$$
$$\cdot dx$$

st nichts gewonnen; denn der indirecte Eliminationsprocess soll
tzen, um bequemer zum Ziele zu gelangen; und ehe man den
hat man sich zu überzeugen, ob y von z und v zugleich abhän-
o durch y auch U von z und v zugleich abhängig wird.

Methode hat also den Fehler, dass sie keiner Ausdehnung vom
mmengesetzten Fall fähig ist; die Euler'sche Methode dagegen hat
bei ihr schon im einfachsten Falle nicht weiss, was man so ei-
mit kann bei ihr auch im zusammengesetzten Falle von keiner
e sein.

Thatsache ist, dass sowohl durch die Euler'sche als auch durch
hode der relativen Grössten und Kleinsten jedesmal die richtige
nden wird; ist es auch Thatsache, dass man bei der Euler'schen
fachsten Falle, und dass man bei der Lagrange'schen Methode in
zwei oder noch mehr Nebenbedingungen gegeben sind, in der
man bei jedem bloss empirischen Verfahren sich befindet; und
rund genug, für dergleichen Probleme eine andere streng ein-
fzustellen.

Vierte Abtheilung.

*der dritten Abtheilung aufgestellte Beispiel sowohl nach der
ch nach der Lagrange'schen Methode durchgeführt werden.*

ler Euler'schen Methode setze man

$$1) \quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx} + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

les auf einen Nenner, und setze dann im Nenner zur Abkürzung

bekommt man

$$U = \frac{1}{2 \cdot A^2} \cdot \Big[2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx$$

$$\times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx + 2L \cdot \left(\int_a^\alpha y \cdot dx\right)^2 \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \Big]$$

§. 233)

$$3) \quad \int_a^\alpha y^2 \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

$\cdot dx = A \cdot C$, so geht Gleichung 2 über in

$$\delta U = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^\alpha (2y - C + 2AL) \cdot \delta y \cdot dx$$

Digitized by Google

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$5)\quad 2y - C + 2AL = 0$$

und eine Gränzengleichung gibt es nicht.

Man hat also die mit der Abscissenaxe parallele Grade.

Bei Bestimmung der Constanten muss Gleichung 3 mitbenützt werden; und diese geht jetzt über in

$$6)\quad \left(\frac{C - 2AL}{2}\right)^2 \cdot (\alpha - a) = C \cdot \frac{C - 2AL}{2} \cdot (\alpha - a)$$

Diese Gleichung enthält keinen Widerspruch in sich selbst, sondern liefert $2AL = -C$; und wenn man AL aus 5 eliminirt, so gibt sich

$$7)\quad y = C$$

als Gleichung der gesuchten Graden, wo C ein noch zu bestimmender Constanter ist, der, wenn z. B. vorgeschrieben ist, dass der in Rede stehende Flächeninhalt den bestimmten Werth g^2 habe, durch die Gleichung

$$\int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

bestimmt wird; denn diese Gleichung, wenn man C statt y setzt, und integrirt, geht über in $C \cdot (\alpha - a) = g^2$, und daraus folgt $C = \frac{g^2}{\alpha - a}$.

Um zu entscheiden, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man in Gleichung 2 nur den Zähler zu mutiren; und wenn man dieses thut, und dann wieder A statt $\int_a^\alpha y \cdot dx$, und $A \cdot C$ statt $\int_a^\alpha y^2 \cdot dx$ setzt; so kann man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor A gegeneinander aufheben, und man bekommt zunächst

$$8)\quad \delta^2 U = \frac{1}{2A} \cdot \left[\int_a^\alpha (2y - C + 2AL) \cdot \delta^2 y \cdot dx + 2 \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx + 4L \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2\right]$$

Diese Gleichung reducirt sich wegen Gleichung 5 auf

$$9)\quad \delta^2 U = \frac{1}{A} \cdot \left[\int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx + 2L \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2\right]$$

Nun ist $A = \int_a^\alpha y \cdot dx = C \cdot (\alpha - a)$, also $L = -\frac{C}{2A} = -\frac{1}{2 \cdot (\alpha - a)}$; und somit hat man

$$10)\quad \delta^2 U = \frac{1}{C \cdot (\alpha - a)} \cdot \left[\int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx - \frac{1}{\alpha - a} \cdot \left(\int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right)^2\right]$$

Man erkennt aber gradezu, dass das innerhalb der Haken stehende Aggregat weder als positiv noch als negativ gelten kann, so dass es das Ansehen hat, als fände weder ein Grösstes noch Kleinstes statt, während es ja schon aus den Elementen der Statik bekannt ist, dass bei den hier gestellten Bedingungen das Rechteck in der That seinen Schwerpunkt am tiefsten hat. Zu den (in der dritten Abtheilung dieses Nachtrages) bei der Euler'schen Methode gestellten Fragen gesellt sich also noch folgende neue:

Wie geht es zu, dass, wenn man das Product $L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$ zu $U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$ addirt, und dann diese Summe mutirt, sich die richtige Function y von x ergibt, während doch der für $\delta^2 U$ sich ergebende Ausdruck ein ganz unrichtiges Criterium liefern kann?

Digitized by Google

den Versuch machen, das Product $L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$ zu dem Zähler des
en Bruches zu addiren, so würde man

$$11)\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

Bruch ist aber gleichbedeutend mit folgendem Ausdrucke

$$12)\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx} + \frac{L}{2}$$

abel ist, so gibt sich für δU derselbe Ausdruck, wie in Aufgabe
hung IV). Man würde also hier ein Resultat erlangen, wie wenn
ngung gestellt wäre.

nand den Versuch machen, das besagte Product im Nenner zu ad-
n

$$13)\quad U = \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx + L \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx}$$

Ausdruck ist gleichbedeutend mit

$$14)\quad U = \frac{1}{2+L} \times \frac{\int_a^\alpha y^2 \cdot dx}{\int_a^\alpha y \cdot dx}$$

der ein Resultat erlangen, wie wenn gar keine Nebenbedingung ge-

ch der Lagrange'schen Methode setze man

$$15)\quad z_x - z_a = \int_a^x y \cdot dx$$

Differentiation

$$16)\quad \frac{dz}{dx} = y$$

rst direct, was zwar von Lagrange nie geschehen ist; und der Aus-

$\cdot\, dx$

——, welcher ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, geht über in

$y \cdot dx$

$$17)\quad U = \frac{\int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot dx}{2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot dx}$$



Man mutire, bringe Alles auf einen Nenner, und setze dann zur Abkürzung im Nenner B anstatt $\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot dx$; so bekommt man

$$18)\quad \delta U=\frac{1}{2\cdot B^2}\cdot\left[2\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx\times\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot dx\right.$$
$$\left.-\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\cdot dx\times\int_a^\alpha\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx\right]$$

Nun setze man (nach §. 233)

$$19)\quad \int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\cdot dx=H\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot dx$$

d. h. man setze $\int_a^\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\cdot dx=B\cdot H$, so geht Gleichung 18 über in

$$20)\quad \delta U=\frac{1}{2B}\cdot\int_a^\alpha\left(2\cdot\frac{dz}{dx}-H\right)\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx$$

Wenn man jetzt die gehörige Umformung ausführt, so gibt sich

$$21)\quad \delta U=\frac{1}{2\cdot B}\cdot\left[\left(2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha-H\right)\cdot\delta z_\alpha-\left(2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)_a-H\right)\cdot\delta z_a\right.$$
$$\left.-2\cdot\int_a^\alpha\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\cdot\delta z\cdot dx\right].$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die Hauptgleichung

$$22)\quad \frac{d^2z}{dx^2}=0$$

und in die Gränzengleichung

$$23)\quad \left(2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha-H\right)\cdot\delta z_\alpha-\left(2\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)_a-H\right)\cdot\delta z_a=0$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so bekommt man

$$24)\quad z=C\cdot x+E$$

Es ist also $\left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha=\left(\frac{dz}{dx}\right)_a=C$, und die Gränzengleichung geht über in

$$25)\quad (2C-H)\cdot(\delta z_\alpha-\delta z_a)=0$$

Allein eben weil die gesuchte Curve nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei denen allen das bestimmte Integral $z_\alpha-z_a=\int_a^\alpha y\cdot dx$ denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält; so ist (nach §. 89) jetzt

$$26)\quad \delta z_\alpha-\delta z_a=0$$
$$27)\quad \delta^2 z_\alpha-\delta^2 z_a=0$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung fällt also von selbst weg, so dass aus ihr zur Bestimmung der Constanten C und E nichts gewonnen werden kann. Weil aber $y=\frac{dz}{dx}$, so ist der gesuchten Curve Gleichung

$$28)\quad y=C$$

d. h. man hat wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade. Der Constante C wird.

Digitized by Google

· dx den gegebenen Werth g^2 haben soll, durch die Gleichung

mmt.

, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man jetzt bei
Zähler zu mutiren; und wenn man dieses thut, und hierauf die
ubstitutionen und Reductionen wieder anwendet, so gibt sich

$$\frac{1}{B} \cdot \int_a^\alpha \left(2\frac{dz}{dx} - H\right)\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right) dx + \frac{1}{B}\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

lann C statt $\frac{dz}{dx}$ ein, und beachte die Hauptgleichung 22 sowie
eibt nur

$$30)\quad \delta^2 U = \frac{1}{B}\int_a^\alpha \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

eweis, dass ein Kleinstes stattfindet.

n der von Lagrange angewendeten Multiplicatorenmethode diese
verden. Man nehme also die Gleichung XI vor, mutire sie,
Nenner, und setze dann zur Abkürzung im Nenner A statt

man

$$\left[\int_a^\alpha 2y \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha y \cdot dx - \int_a^\alpha y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha \delta y \cdot dx\right.$$

$$\left. \cdot \left(\int_a^\alpha y \cdot dx\right)^2 \times \int_a^\alpha M\left(\delta y - \frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx\right]$$

) abermals

$$32)\quad \int_a^\alpha y^2 \cdot dx = C \cdot \int_a^\alpha y \cdot dx$$

· dx = A · C, und reducire soviel als möglich; so bekommt man

$$\frac{1}{2A}\int_a^\alpha \left[(2y - C + 2AM) \cdot \delta y - 2AM\frac{d\delta z}{dx}\right] \cdot dx$$

mmt man

$$34)\quad \delta U = - M_\alpha \cdot \delta z_\alpha + M_a \cdot \delta z_a$$

$$\left[(2y - C + 2A \cdot M) \cdot \delta y + 2A \cdot \frac{dM}{dx} \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

unter dem Integralzeichen wegfalle, setze man zunächst

$$35)\quad 2y - C + 2A \cdot M = 0$$

ch also auf

$$= - M_\alpha \cdot \delta z_\alpha + M_a \cdot \delta z_a + \int_a^\alpha \left(\frac{dM}{dx}\right) \cdot \delta z \cdot dx$$

in die Hauptgleichung

$$37)\quad \frac{dM}{dx} = 0$$



Digitized by Google

und in die Gränzengleichung

$$38) \quad - M_\alpha \cdot \delta z_\alpha + M_a \cdot \delta z_a = 0$$

Aus Gleichung 37 folgt, dass M constant; und somit geht Gleichung 38 über in

$$39) \quad M \cdot (\delta z_\alpha - \delta z_a) = 0$$

Diese Gleichung fällt aber von selbst weg, wie aus Gleichung 26 erhellt. Da M constant ist, so geht jetzt Gleichung 32 über in

$$40) \quad \left(\frac{C - 2A \cdot M}{2}\right)^2 \cdot (\alpha - a) = C \cdot \frac{C - 2A \cdot M}{2} \cdot (\alpha - a)$$

Diese Gleichung enthält keinen Widerspruch in sich selbst, sondern liefert $C = -2A \cdot M$; und Gleichung 35 geht jetzt über in

$$41) \quad y = C$$

d. h. man hat wieder die mit der Abscissenaxe parallele Grade.

Um zu entscheiden, ob ein Grösstes oder Kleinstes stattfinde, hat man in Gleichung 31 nur den Zähler zu mutiren; und wenn man dieses thut, und dann die bisher angewendeten Substitutionen und Reductionen wieder anwendet, so gibt sich zunächst

$$42) \quad \delta^2 U = \frac{1}{2A}\left[\int_a^\alpha (2y - C + 2AM) \cdot \delta^2 y \cdot dx - 2A\int_a^\alpha M\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right) \cdot dx \right.$$
$$\left. + 2\int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx + 4 \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha M\left(\delta y - \frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx\right]$$

Nun ist $\delta y - \frac{d\delta z}{dx} = 0$ eine identische Gleichung (man sehe Nr. IX der dritten Abtheilung); ferner ist $2y - C + 2AM = 0$. Gleichung 42 reducirt sich also auf

$$43) \quad \delta^2 U = -\int_a^\alpha \left(M \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}\right) \cdot dx + \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$$

Man forme um, und beachte, dass M constant und $\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a = 0$ ist; so bleibt nur

$$44) \quad \delta^2 U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man δy zu eliminiren. Aus $\delta y - \frac{d\delta z}{dx} = 0$ folgt $\delta y = \frac{d\delta z}{dx}$, und Gleichung 44 geht über in

$$45) \quad \delta U = \frac{1}{A} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

In hiesigem Falle war jedoch diese Elimination nicht nöthig; denn bei Gleichung 44 war gradezu zu erkennen, dass $\int_a^\alpha \delta y^2 \cdot dx$ immer positiv bleibt, man mag für δz einen Ausdruck substituiren, welchen man will.

Fünfte Abtheilung.

Wenn Lagrange eine ein relatives Grösstes oder Kleinstes fordernde Aufgabe, wo auch die Gränzelemente veränderlish sind, gestellt, und mittelst seiner Methode gelöst hätte; so hätte er dieselben Resultate erlangt, welche sich durch meine Methode ergeben.

Man sucht zwischen den beiden, durch die Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen Curven die kürzeste unter allen Linien, welche mit der Abscissenaxe

Digitized by Google

n Gränzordinaten den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebe-
schliessen.

e verlangt also: man soll (wie in Aufg. 215) für y eine solche
α solche Werthe suchen, dass dabei das bestimmte Integral

$$46)\quad U = \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2}) \cdot dx$$

s Minimum-standes wird, während die für y gesuchte Function
herausgewählt werden darf, welche alle bei den für a und α
dem bestimmten Integral

$$47)\quad \int_a^\alpha y \cdot dx$$

nen oder nichtgegebenen) Werth beilegen.

lt entweder vorgeschrieben ist, oder nach Willkür gewählt wer-
las unmittelbar mutable, und die Ordinate der gesuchten Curve
Element. Man stelle nun den bei x = a anfangenden und bis
erstreckten Flächeninhalt $\int_a^x y \cdot dx$ dar durch

$$48)\quad z_x - z_a$$

de identische Gleichung

$$49)\quad \int_a^x y \cdot dx = z_x - z_a$$

o gibt sich

$$50)\quad y = \frac{dz}{dx}$$

$$51)\quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

unmittelbar mutable und y das mittelbar mutable Element ist;
ng 46 eliminirt werden, was hier auf directem Wege geschehen
51 geht also 46 über in

$$52)\quad U = \int_a^\alpha \left(\sqrt{1+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}\right) \cdot dx$$

man einer gemischten Mutation unterwerfen, indem a und α
len. Mutirt man wirklich, und führt man hierauf zur Abkürzung
von $\frac{d^2z}{dx^2}$ zurück; so bekommt man zunächst

$$+ p^2)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) \cdot dx$$

$$_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$\frac{p}{+ p^2} \cdot \frac{d^2\delta^2 z}{dx^2} + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)^2 \Big] \cdot dx$$

Digitized by Google

Man forme um, so bekommt man

$$55)\quad \delta_1 U = (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta z \cdot dx$$

und

$$56)\quad \delta_1^2 U = (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$+ \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_\alpha \cdot \delta^2 z_\alpha$$

$$- (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta^2 a - \left(\frac{d\sqrt{1+p^2}}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$- \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_a + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_a \cdot \delta^2 z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) \cdot \delta^2 z + \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$

Die (in 53 aufgestellte) erste Form des $\delta_1 U$ kann aus Gründen, welche schon früher (Seite 234) auseinandergesetzt sind, nicht weiter beachtet werden.

Aus der (in 55 aufgestellten) zweiten Form des $\delta_1 U$ gibt sich die Hauptgleichung

$$57)\quad \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$58)\quad (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha - \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)_a \cdot \delta z_a = 0$$

Integrirt man die Hauptgleichung, so gibt sich

$$59)\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = L$$

und daraus folgt (nach Seite 481) durch fortgesetztes Integriren

$$60)\quad (y - C)^2 + \left(x + \frac{B}{L}\right)^2 = \frac{1}{L^2}$$

Dieses ist die Gleichung des Kreises mit dem Halbmesser $\frac{1}{L}$.

Wegen Gleichung 59 geht 58 über in

$$61)\quad (\sqrt{1+p^2})_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha - L\,(\delta z_\alpha - \delta z_a)$$

$$- (\sqrt{1+p^2})_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a = 0$$

Wegen der Gleichungen 57 und 59 reducirt sich 56 auf

Digitized by Google

$$\ldots^{2})_{\alpha} \cdot \vartheta^{2}\alpha + \left(\frac{d\sqrt{1+p^{2}}}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2} + 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{\alpha} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha$$

$$\ldots^{2})_{a} \cdot \vartheta^{2}a - \left(\frac{d\sqrt{1+p^{2}}}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2} - 2\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{a} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)_{a} \cdot \vartheta a$$

$$\ldots\overline{p^{2}}\Big)_{\alpha} \cdot \left(\frac{d\delta^{2}z}{dx}\right)_{\alpha} - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{a} \cdot \left(\frac{d\delta^{2}z}{dx}\right)_{a} - L \cdot (\delta^{2}z_{\alpha} - \delta^{2}z_{a})$$

$$\ldots\frac{1}{\ldots + p^{2})^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)^{2} \cdot dx$$

n von $x = a$ bis $x = \alpha$ geht der Ausdruck 48 über in

$$63)\quad z_{\alpha} - z_{a}$$

Curve nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, welche hstanliegen, und bei welchen zugleich der Ausdruck 63 den nem- er nichtgegebenen) Werth behält; so werden sich daraus folgende leichungen ergeben

$$\delta z_{\alpha} - \delta z_{a} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - \left(\frac{dz}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a = 0$$

$$\delta^{2}z_{\alpha} - \delta^{2}z_{a} + 2\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - 2\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a$$

$$\cdot \vartheta^{2}\alpha - \left(\frac{dz}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta^{2}a + \left(\frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2} - \left(\frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2} = 0$$

sdruck $(\delta z_{\alpha} - \delta z_{a})$ aus Gleichung 61, was mittelst 64 geschieht;

$$\left(\sqrt{1+p^{2}} + L \cdot \frac{dz}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{\alpha} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{\alpha}$$

$$\ldots\overline{+p^{2}} + L \cdot \frac{dz}{dx}\Big)_{a} \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{a} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{a} = 0$$

den Ausdruck $(\delta^{2}z_{\alpha} - \delta^{2}z_{a})$ aus Gleichung 62, was mittelst 65 nt man

$$\ldots^{2} + L\,\frac{dz}{dx}\Big)_{\alpha} \cdot \vartheta^{2}\alpha + \left(\frac{d\sqrt{1+p^{2}}}{dx} + L\,\frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2}$$

$$\ldots p^{2} + L\,\frac{dz}{dx}\Big)_{a} \cdot \vartheta^{2}a - \left(\frac{d\sqrt{1+p^{2}}}{dx} + L\,\frac{d^{2}z}{dx^{2}}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2}$$

$$\ldots\overline{+p^{2}}\Big)_{\alpha} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha + 2L\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{\alpha} \cdot \left(\frac{d\delta^{2}z}{dx}\right)_{\alpha}$$

$$\ldots\overline{+p^{2}}\Big)_{a} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)_{a} \cdot \vartheta a - 2L\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a - \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^{2}}}\right)_{a} \cdot \left(\frac{d\delta^{2}z}{dx}\right)_{a}$$

$$\ldots\frac{1}{\ldots + p^{2})^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d^{2}\delta z}{dx^{2}}\right)^{2} \cdot dx$$

weit gekommen, dass verschiedene Gränzfälle aufgestellt werden

änzfall. Man sucht unter allen Linien, die den nemlichen (ge- gebenen) Flächeninhalt einschliessen, aber von jeder andern Ne- d, diejenige, welche zwischen den vorgeschriebenen Gränzcurven


Digitized by Google

Da die gesuchte Linie die beiden Gränzcurven schneidet, so müssen bei diesen Durchschnittspunkten folgende zwei Gleichungen

$$68)\quad y_a = b, \qquad \text{und} \qquad 69)\quad y_\alpha = \beta$$

stattfinden. Daraus folgt (man sehe die vier Gleichungen 7—10 auf Seite 247 und 248)

$$70)\quad \delta y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta a$$

$$71)\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha$$

$$72)\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2b}{da^2} - q_a\right) \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$73)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - q_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

Nun folgt aus den Gleichungen 50 und 51

$$74)\quad \delta y = \frac{d\delta z}{dx}, \qquad \text{und} \qquad 75)\quad \delta^2 y = \frac{d\delta^2 z}{dx}$$

und wenn man diese Gleichungen differentiirt, so gibt sich

$$76)\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d^2\delta z}{dx^2}, \qquad \text{und} \qquad 77)\quad \frac{d\delta^2 y}{dx} = \frac{d^2\delta^2 z}{dx^2}$$

die vier Gleichungen (70—73) gehen also bezüglich über in

$$78)\quad \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta a$$

$$79)\quad \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha$$

$$80)\quad \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2b}{da^2} - q_a\right) \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$81)\quad \left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} - q_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha^2 - 2\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

Man eliminire $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$ aus 66, so gibt sich

$$82)\quad \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + L \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha\right] \cdot \vartheta \alpha$$
$$- \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + L \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)_a\right] \cdot \vartheta a = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich aber ohneweiters in folgende zwei

$$83)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + L \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha = 0$$

und

$$84)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + L \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)_a = 0$$

Nach Gleichung 50 darf man y an die Stelle des $\frac{dz}{dx}$ setzen; und wenn man den Halbmesser durch m anstatt durch $\frac{1}{L}$ darstellt; so gehen die beiden letzten Gleichungen über in

$$85)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + \frac{y_\alpha}{m} = 0$$

Digitized by Google

$$86)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + \frac{y_a}{m} = 0$$

chungen sind aber genau dieselben, wie die zwei (Nr. 14 und 15), 489 befinden.

n die vier Stücke $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta^2 z}{dx}\right)_\alpha$ aus der

t Nr. 78—81), und setze wieder m statt $\frac{1}{L}$; so bekommt man

$$^2U = \left(\frac{p_\alpha}{\sqrt{1+p_\alpha^2}} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{1}{m} \cdot p_\alpha\right) \cdot \vartheta\alpha^2$$

$$- \left(\frac{p_a}{\sqrt{1+p_a^2}} \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \frac{2}{m} \cdot \frac{db}{da} - \frac{1}{m} \cdot p_a\right) \cdot \vartheta a^2$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

mt mit Nr. XV auf Seite 490 vollkommen überein.

eichung 60 ebenfalls m statt $\frac{1}{L}$ setzt; so geht sie an den Gränzen

$$88)\quad (b - C)^2 + (a + m \cdot B)^2 = m^2$$

$$89)\quad (\beta - C)^2 + (\alpha + m \cdot B)^2 = m^2$$

86, 88, 89 verbunden mit $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta) = 0$ reichen e a, α, b, β, B, C durch das siebente m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ auszudrücken. von der gesuchten Kreislinie und den Gränzordinaten eingeschlosen gegebenen Werth g^2 haben soll; so wird die Gleichung

$$90)\quad \int_a^\alpha y \cdot dx = g^2$$

och das siebente Stück m $\left(\text{oder } \frac{1}{L}\right)$ zu bestimmen. Ist aber die-Verth nicht gegeben, sondern nur gesagt, dass er bei allen in Be-Curven der nemliche sein soll; so bleibt das siebente Stück m nt, wenn die gesuchte Kreislinie nicht noch einer weitern Nebenn wird, wie dieses im zweiten Falle der 214ten Aufgabe gesche-

le kann man sich nach Belieben (wie z. B. in der 161sten Aufg.) Durchführung hat man aber genau auf die hier aufgestellten Muta-nd 65 zu achten; denn durch sie ist die Hauptbedingung ausge-

Zweites Beispiel.

hen den beiden durch die Gleichungen $f'(a, b) = 0$ und $f''(\alpha, \beta)$ zcurven unter allen gleichlangen Linien diejenige heraus, welche igen Gränzordinaten und mit der Abscissenaxe den grössten oder alt einschliesst.

abe verlangt also: man soll (wie in Aufg. 218) für y eine solche nd α solche Werthe suchen, dass dabei das bestimmte Integral

$$91)\quad U = \int_a^\alpha y \cdot dx$$


Digitized by Google

entweder ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird, während die für y gesuchte Function nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, welche alle bei den für a und α zu suchenden Werthen dem bestimmten Integral

$$92)\quad \int_a^\alpha (\sqrt{1+p^2})\cdot dx$$

den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth beilegen.

Da die Bogenlänge entweder vorgeschrieben ist, oder nach Willkür gewählt werden kann; so ist sie das unmittelbar mutable, und die Ordinate der gesuchten Curve das mittelbar mutable Element. Man stelle nun die bei $x = a$ anfangende und bis zu jedem beliebigen x erstreckte Bogenlänge $\int_a^x (\sqrt{1+p^2})\cdot dx$ dar durch

$$93)\quad w_x - w_a$$

so bekommt man folgende identische Gleichung

$$94)\quad \int_a^x (\sqrt{1+p^2})\cdot dx = w_x - w_a$$

Differentiirt man sie, so gibt sich

$$95)\quad \sqrt{1+p^2} = \frac{dw}{dx}$$

Da, wie gesagt, w das unmittelbar mutable und y das mittelbar mutable Element ist; so muss y aus Gleichung 91 eliminirt werden, was hier auf indirectem Wege (mittelst eines Multiplicators) geschehen soll. Man verwandle Gleichung 95 nun in

$$96)\quad \sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx} = 0$$

Diese Gleichung gilt bei jedem Werthe des x; und wenn man sie mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function L von x multiplicirt, so ist auch das Product $L\cdot\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)$ noch identisch Null, und kann zu 91 unter das Integralzeichen addirt werden, ohne dass U sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$97)\quad U = \int_a^\alpha \left(y + L\cdot\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right)\cdot dx\,.$$

Diesen Ausdruck muss man einer gemischten Mutation unterwerfen, indem a und α Werthänderungen erleiden; und wenn man wirklich mutirt, so gibt sich

$$98)\quad \delta_\prime U = \left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]_\alpha\cdot\vartheta\alpha - \left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]_a\cdot\vartheta a$$
$$+ \int_a^\alpha \left(\delta y + \frac{L\cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - L\cdot\frac{d\delta w}{dx}\right)\cdot dx$$

und

$$99)\quad \delta_\prime^2 U = \left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]_\alpha\cdot\vartheta^2\alpha - \left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]_a\cdot\vartheta^2 a$$
$$+ \left(\frac{d\left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2 - \left(\frac{d\left[y + L\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)\right]}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a^2$$
$$+ 2\left[\delta y + L\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta w}{dx}\right)\right]_\alpha\cdot\vartheta\alpha -$$

Digitized by Google

$$2\left[\delta y + L\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta w}{dx}\right)\right]_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\delta^2 y}{dx} - L\frac{d\delta^2 w}{dx} + \frac{L\cdot p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

erst noch folgende Nebenuntersuchung.

ung 96 einer gemischten Mutation unterwirft, so bekommt man

$$\frac{p}{+p^2}\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta w}{dx} + \frac{d\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)}{dx}\cdot\vartheta x = 0$$

olche zusammengehörige Functionen sein, dass dadurch der Glei-
nügt wird. Es ist also auch

$$101)\quad \frac{d\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{dw}{dx}\right)}{dx} = 0$$

sich daher auf

$$102)\quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\delta w}{dx} = 0$$

ebenuntersuchungen, welche Seite 366 und 367 ausgeführt wor-

wieder zur Hauptaufgabe zurück.

ungen 96, 101 und 102 bei jedem Werthe des x gelten, so gel-
a und bei $x = \alpha$; und somit ziehen die Gleichungen 98 und 99

$$\cdot\vartheta\alpha - y_a\cdot\vartheta a + \int_a^\alpha\left(\delta y + \frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\delta y}{dx} - L\frac{d\delta w}{dx}\right)\cdot dx$$

$$- y_a\cdot\vartheta^2 a + p_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2 - p_a\cdot\vartheta a^2 + 2\cdot\delta y_\alpha\cdot\vartheta\alpha - 2\cdot\delta y_a\cdot\vartheta a$$

$$+ \frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\delta^2 y}{dx} - L\frac{d\delta^2 w}{dx} + \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

t sich aus den beiden letzten Gleichungen bezüglich

$$U = y_\alpha\cdot\vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - L_\alpha\cdot\delta w_\alpha$$

$$- y_a\cdot\vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta y_a + L_a\cdot\delta w_a$$

$$+ \int_a^\alpha\left[\left(1 - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\cdot\delta y + \frac{dL}{dx}\cdot\delta w\right]\cdot dx$$

$$+ p_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2 + 2\cdot\delta y_\alpha\cdot\vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha\cdot\delta^2 y_\alpha - L_\alpha\cdot\delta^2 w_\alpha$$

$$p_a\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot\delta y_a\cdot\vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a\cdot\delta^2 y_a + L_a\cdot\delta^2 w_a$$

$$\cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right)\delta^2 y + \frac{dL}{dx}\delta^2 w + \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$



Die (in 103 aufgestellte) erste Form des $_{(}\delta_{)}U$ kann aus Gründen, welche schon früher (Seite 234) auseinandergesetzt sind, nicht weiter beachtet werden.

Man untersuche also ohneweiters die (in 105 aufgestellte) zweite Form des $_{(}\delta_{)}U$. Damit das (unter dem Integralzeichen stehende) mittelbare δy wegfalle, denke man sich unter L eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$107)\quad 1 - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

stattfindet. Gleichung 105 reducirt sich also auf

$$108)\quad _{(}\delta_{)}U = y_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - L_\alpha \cdot \delta w_\alpha$$

$$- y_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + L_a \cdot \delta w_a$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{dL}{dx} \cdot \delta w \cdot dx$$

Man hat somit die Hauptgleichung

$$109)\quad \frac{dL}{dx} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$110)\quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - L_\alpha \cdot \delta w_\alpha$$

$$- y_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a + L_a \cdot \delta w_a = 0$$

Integrirt man 109, so gibt sich

$$111)\quad L = \text{constant}$$

und somit geht Gleichung 110 über in

$$112)\quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha$$

$$- y_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - L \cdot (\delta w_\alpha - \delta w_a) = 0$$

Integrirt man auch 107, so bekommt man

$$113)\quad (y - C)^2 + (x + B)^2 = L^2$$

Dieses ist die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser L.

Zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ geht der Ausdruck 93 über in

$$114)\quad w_\alpha - w_a$$

und weil die gesuchte Curve nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, welche einander stetsfort nächstanliegen, und bei welchen zugleich der Ausdruck 114 den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält; so werden sich daraus folgende gemischte Mutationsgleichungen ergeben

$$115)\quad \delta w_\alpha - \delta w_a + \left(\frac{dw}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \left(\frac{dw}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a = 0$$

$$116)\quad \delta^2 w_\alpha - \delta^2 w_a + 2\left(\frac{d\delta w}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha - 2\left(\frac{d\delta w}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\frac{dw}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha - \left(\frac{dw}{dx}\right)_a \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{d^2w}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a^2 = 0$$

etc. etc.

Digitized by Google

Eliminirt man den Ausdruck $(\delta w_\alpha - \delta w_a)$ aus Gleichung 112, was mittelst 115 geschieht; so bekommt man

$$117)\quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + L \cdot \left(\frac{dw}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- y_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{L \cdot p}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - L \cdot \left(\frac{dw}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a = 0$$

Man eliminire ebenso den Ausdruck $(\delta^2 w_\alpha - \delta^2 w_a)$ aus Gleichung 106, was mittelst 116 geschieht; und wenn man dabei noch die Gleichungen 107 und 109 beachtet, so bekommt man

$$118)\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \left(y + L\frac{dw}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(p + L\frac{d^2w}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\left(\delta y + L\frac{d\delta w}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- \left(y + L\frac{dw}{dx}\right)_a \cdot \vartheta^2 a - \left(p + L\frac{d^2w}{dx^2}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\delta y + L\frac{d\delta w}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{L}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Aus Gleichung 95 folgt

$$119)\quad \frac{dw}{dx} = \sqrt{1+p^2}$$

und wenn man diese Gleichung nach allem mit x differentiirt, so gibt sich

$$120)\quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{p \cdot q}{\sqrt{1+p^2}}$$

Aus Gleichung 102 folgt

$$121)\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p} \cdot \frac{d\delta w}{dx}$$

Man eliminire $\frac{dw}{dx}$ aus 117, so bekommt man

$$122)\quad y_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + L\left(\sqrt{1+p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- y_a \cdot \vartheta a - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta y_a - L\left(\sqrt{1+p^2}\right)_a \cdot \vartheta a = 0$$

Man eliminire auch $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}$ und $\frac{d\delta y}{dx}$ aus 118, so gibt sich

$$123)\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U =$$

$$\left(y + L\sqrt{1+p^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2\alpha + \left(p + \frac{Lpq}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha^2 + 2\left(\delta y + L\frac{d\delta w}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$$

$$- \left(y + L\sqrt{1+p^2}\right)_a \cdot \vartheta^2 a - \left(p + \frac{Lpq}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\delta y + L\frac{d\delta w}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{Lp}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \frac{L}{p^2\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{d\delta w}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Aus den beiden letzten Gleichungen hat man aber noch die mittelbaren Elemente δy_a, δy_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$ zu eliminiren, was jedoch für die einzelnen Gränzfälle aufgespart werden soll.

Specieller Gränzfall. Man sucht unter allen Linien, welche die nemliche Länge haben, aber von jeder andern Nebenbedingung unabhängig sind, diejenige, die zwischen den gegebenen Gränzcurven den grössten oder kleinsten Flächeninhalt einschliesst.

Digitized by Google

Man hat also hier wieder die Gleichungen (68—73) des vorigen Beispiels; und wenn man noch $\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} \cdot \frac{d\delta w}{dx}$ statt $\frac{d\delta y}{dx}$ setzt, so gehen 72 und 73 über in

$$124)\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta^2 a + \left(\frac{d^2 b}{da^2} - q_a\right) \cdot \vartheta a^2 - 2\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta w}{dx}\right)_a \cdot \vartheta a$$

$$125)\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta^2 \alpha + \left(\frac{d^2 \beta}{d\alpha^2} - q_\alpha\right) \cdot \vartheta \alpha^2 - 2\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta w}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta \alpha$$

Eliminirt man δy_a und δy_α aus 122, so bekommt man

$$126)\quad \left[\left(\frac{L}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + y_\alpha\right] \cdot \vartheta\alpha - \left[\left(\frac{L}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + y_a\right] \cdot \vartheta a = 0$$

Diese Gleichung zerfällt aber ohneweiters in folgende zwei einzelne

$$127)\quad \left(\frac{L}{\sqrt{1+p^2}}\right)_\alpha \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + y_\alpha = 0$$

$$128)\quad \left(\frac{L}{\sqrt{1+p^2}}\right)_a \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + y_a = 0$$

Wenn man Alles mit L dividirt, so bekommt man

$$129)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_\alpha^2}} \cdot \left(1 + p_\alpha \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right) + \frac{y_\alpha}{L} = 0$$

$$130)\quad \frac{1}{\sqrt{1+p_a^2}} \cdot \left(1 + p_a \cdot \frac{db}{da}\right) + \frac{y_a}{L} = 0$$

Die zwei letzten Gleichungen sind aber genau dieselben, wie die zwei (Nr. 3 und 4), welche sich auf Seite 500 befinden.

Nun eliminire man die vier Stücke δy_a, δy_α, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, wozu aber jetzt die vier Gleichungen 70, 71, 124 und 125 genommen werden müssen; so gibt sich

$$131)\quad \delta^2 U = \left(\frac{L \cdot p_\alpha}{\sqrt{1+p_\alpha^2}} \cdot \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} + 2 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} - p_\alpha\right) \cdot \vartheta\alpha^2 - \left(\frac{L \cdot p_a}{\sqrt{1+p_a^2}} \cdot \frac{d^2 b}{da^2} + 2 \cdot \frac{db}{da} - p_a\right) \cdot \vartheta a^2 + \int_a^\alpha \frac{L}{p^2 \cdot \sqrt{1+p^2}} \cdot \left(\frac{d\delta w}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Dieser Ausdruck stimmt mit Nr. X auf Seite 501 vollkommen überein; und man erkennt auch hier:

1) Ist L positiv, d. h. wendet die Kreislinie ihre convexe Seite gegen die Abscissenaxe, so ist der gefundene Flächeninhalt ein Minimum-stand; und wenn das mit den beiden Differenzcoefficienten ϑa^2 und $\vartheta\alpha^2$ versehene Aggregat gleichfalls positiv ist, so hat der Minimum-stand auch einen Minimumwerth.

2) Ist L negativ, d. h. wendet die Kreislinie ihre concave Seite gegen die Abscissenaxe, so ist der gefundene Flächeninhalt ein Maximum-stand; und wenn das mit den beiden Differenzcoefficienten ϑa^2 und $\vartheta\alpha^2$ versehene Aggregat gleichfalls negativ ist, so hat der Maximum-stand auch einen Maximumwerth.

Gleichung 113 geht an den Gränzen über in

$$132)\quad (b - C)^2 + (a + B)^2 = L^2$$

$$133)\quad (\beta - C)^2 + (\alpha + B)^2 = L^2$$

Digitized by Google

9, 130, 132 und 133, in Verbindung mit $f'(a, b) = 0$ und mit
en hin, die sechs Stücke a, α, b, β, B, C durch das siebente L

e den gesuchten Abscissen a und α entsprechende Bogenlänge den
haben soll, so wird die Gleichung

$$134)\quad \int_a^\alpha \left(\sqrt{1+p^2}\right)\cdot dx = g$$

noch das siebente Stück L zu bestimmen. Ist aber der Werth die-
t vorgeschrieben, sondern nur gesagt, dass er bei allen in Betracht
n der nemliche sein soll; so bleibt das siebente Stück L willkürlich,
Kreislinie nicht noch einer weitern Bedingung unterworfen wird, wie
alle der 217ten Aufgabe geschehen ist.
lle kann man sich nach Belieben (wie z. B. in der 161sten Aufg.)
Durchführung hat man aber genau auf die hier aufgestellten Muta-
und 116 zu achten; denn durch sie ist die Hauptbedingung ausge-

Schluss dieses theoretischen Nachtrages.

esonders in der dritten und vierten Abtheilung) die Gebrechen so-
n als auch der Lagrange'schen Methode mitgetheilt; und damit ist
eine andere aufgestellt werden muss.
et man von mir aufgestellt in den §§. 265—269; und die darnach
n sind Nr. 214—228, 233—235, 237, 239, 241, 246, 247, 261, 262,

htenswerth sind Nr. 282 und 283. Ebenso auch Nr. 215 und 218,
te noch Werthänderungen erleiden.


Digitized by Google

Zweiter theoretischer Nachtrag,

enthaltend

die Auflösung einiger Aufgaben, bei welcher man für die unmittelbaren Mutationen ganz unbestimmte Reihenformen nimmt.

In der zweiten Bemerkung des 61sten §. steht: „Aufgaben, welche sich durch die bestimmte Reihenform

$$\varphi(x) + x \cdot P + \frac{x^2}{1.2} \cdot Q + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot R + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

auflösen lassen, lassen sich allerdings auch durch die unbestimmte Reihenform

$$\varphi(x) + x^p \cdot P + x^q \cdot Q + x^r \cdot R + \ldots\ldots\ldots$$

auflösen, etc."

Der dort befindliche Ausspruch mag nun an folgenden fünf Beispielen bethätigt werden:

Erstes Beispiel.

Man nehme Aufgabe 1 vor, wo es heisst: „Man soll für y eine solche Function von x suchen, dass dabei

$$1)\quad U = y \cdot (x - y)$$

ein Maximum-stand wird." Man setze

$$2)\quad y + x^p \cdot P + x^q \cdot Q + x^r \cdot R + \ldots\ldots\ldots$$

oder schlechthin $y + \Delta y$ an die Stelle des y in Gleichung 1 ein; so bekommt man

$$3)\quad U + \Delta U = x \cdot y - y^2 + (x - 2y) \cdot \Delta y - \Delta y^2$$

Lässt man den zu Δy gehörigen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung $x - 2y = 0$, woraus $y = \frac{x}{2}$ folgt. Gleichung 3 geht nun über in

$$4)\quad U' + \Delta U = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \Delta y^2$$

oder vielmehr in

$$5)\quad U' + \Delta U = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (x^p)^2 \cdot (P + x^{q-p} \cdot Q + x^{r-p} \cdot R + \ldots\ldots)^2$$

Es findet also ein Maximum-stand statt, während den Exponenten p, $q > p$, $r > q$, etc. was immer für ein positiver (ganzer oder gebrochener) Zahlenwerth beigelegt werden mag.

Man erkennt, dass man sich hier in diesem Beispiele durch die unbestimmte Reihenform nicht viel mehr Weitläufigkeiten gemacht hat, als durch die (in Aufgabe 1 angewendete) bestimmte Reihenform.

Digitized by Google

Zweites Beispiel.

ersten Fall der 158sten Aufgabe, wo verlangt wird: „Man soll zwi-
kten (a, b) und (α, β) die kürzeste Entfernung suchen.“ Hier

$$6) \quad U = \int_a^\alpha \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] \cdot dx$$

erden. Man setze

$$y + x^p \cdot P + x^q \cdot Q + x^r \cdot R + \ldots\ldots$$

y an die Stelle des y; und wenn man diese Reihe nach allem x
mmt man

$$x^p \cdot \frac{dP}{dx} + x^q \cdot \frac{dQ}{dx} + x^r \cdot \frac{dR}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

eihe oder kurzweg $\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung 6
n

$$U + \Delta U = \int_a^\alpha \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}\right)^2}\right] \cdot dx$$

$$\left[\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) + \left(2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx}\right) \cdot \frac{d\Delta y}{dx}}\right] \cdot dx$$

zung p statt $\frac{dy}{dx}$, und entwickle mittelst des binonischen Satzes;

$$= \int_a^\alpha \left[\sqrt{1 + p^2} + \frac{1}{2}(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(2p + \frac{d\Delta y}{dx}\right) \cdot \frac{d\Delta y}{dx}\right.$$

$$- \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot (1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(2p + \frac{d\Delta y}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot (1 + p^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \left(2p + \frac{d\Delta y}{dx}\right)^3 \cdot \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^3$$

$$\left. - + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right] \cdot dx$$

esetz dieser Reihe ist augenscheinlich; und wenn man jetzt nach
dnet, so bekommt man

$$U + \Delta U = \int_a^\alpha \left[\sqrt{1 + p^2} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{d\Delta y}{dx}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot (1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2 \ldots\ldots \right] \cdot dx$$

ekommt man

$$10) \quad U + \Delta U = \int_a^\alpha (\sqrt{1 + p^2}) \cdot dx$$

$$\Delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \Delta y_a - \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)\right) \cdot \Delta y \cdot dx \Bigg]$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha (1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

. . . .


Digitized by Google

Erstens. Untersuchung der ersten (in 9 aufgestellten) Form des ΔU. Hier gibt sich $p = 0$, und daraus folgt

$$y = B$$

d. h. man hätte die mit der Abscissenaxe parallele Grade, welche aber, weil sie durch die festen Punkte (a, b) und (α, β) gehen soll, der Aufgabe widerspricht, ausgenommen, wenn $b = \beta$. Ist aber wirklich $b = \beta$, so ist die mit der Abscissenaxe parallele Grade auch die kürzeste Entfernung zwischen den zwei gegebenen Punkten; denn man hat dabei

$$11)\quad U' + \Delta U = (\alpha - a) + \frac{1}{2} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Zweitens. Untersuchung der zweiten (in 10 aufgestellten) Form des ΔU. Hier hat man die Hauptgleichung

$$12)\quad \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$13)\quad \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_\alpha \cdot \Delta y_\alpha - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right)_a \cdot \Delta y_a = 0$$

Aus Gleichung 12 folgt durch Integration

$$14)\quad y = A \cdot x + B$$

d. h. die kürzeste Entfernung ist eine grade Linie; und da diese durch die beiden festen Punkte (a, b) und (α, β) gehen muss, so müssen zwischen den Gränzordinaten der gesuchten und aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende zwei Gleichungen

$$15)\quad y_a = y_a + \varkappa^p \cdot P_a + \varkappa^q \cdot Q_a + \varkappa^r \cdot R_a + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$16)\quad y_\alpha = y_\alpha + \varkappa^p \cdot P_\alpha + \varkappa^q \cdot Q_\alpha + \varkappa^r \cdot R_\alpha + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

stattfinden. Nun ist der Werth des $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich, somit sind diese zwei Gleichungen nur möglich, wenn einzeln stattfindet:

$$P_a = 0,\ \ Q_a = 0,\ \ R_a = 0, \text{ etc.}$$

und

$$P_\alpha = 0,\ \ Q_\alpha = 0,\ \ R_\alpha = 0, \text{ etc.}$$

Es ist also auch $\Delta y_\alpha = 0$ und $\Delta y_a = 0$, und die Gränzengleichung 13 fällt von selbst weg, dagegen Gleichung 10 geht über in

$$17)\quad U' + \Delta U = (\alpha - a) \cdot \sqrt{1 + A^2}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(1 + A^2)^3}} \cdot (\varkappa^p)^2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{dP}{dx} + \varkappa^{q-p} \cdot \frac{dQ}{dx} + \varkappa^{r-p} \cdot \frac{dR}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \cdot\right)^2 \cdot dx$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Es findet also ein Minimum-stand statt, während den Exponenten p, $q > p$, $r > q$, etc. was immer für ein positiver (ganzer oder gebrochener) Zahlenwerth beigelegt werden mag.

Man erkennt, dass man in diesem Beispiele sich durch die unbestimmte Reihenform allerdings mehr Weitläufigkeiten gemacht hat, als durch die (in Aufgabe 158 angewendete) bestimmte Reihenform.

Drittes Beispiel.

Man nehme den sechsten Fall der 158sten Aufgabe, wo verlangt wird: „Man soll zwischen den zwei Punkten (a, b) und (α, β) die kürzeste Entfernung suchen, während diese Punkte so gelegen sind, dass zwischen ihren Ordinaten folgende Gleichung

Digitized by Google

$$18)\quad y_a \cdot y_\alpha = \pm k^2$$

wieder zu den Formen 9 und 10; allein die Form 9, wo die
coordinaten nicht vorkommen, kann jetzt (wegen Gleichung 18)
. Man mache sich also gradezu an die Form 10. Man bekommt
chung 12 und die Gränzengleichung 13. Allein jetzt kann man
mehr jede beliebige Zahl nehmen, sondern nur solche Zahlen,
ung 18 genügt wird. Man setze also die Reihen 15 und 16 in
bekommt man

$$\left.\begin{array}{llll} x^p + y_a \cdot Q_\alpha \cdot x^q & + y_a \cdot R_\alpha \cdot x^r & + \cdots \\ x^p + P_a \cdot P_\alpha \cdot x^{p+p} & + P_a \cdot Q_\alpha \cdot x^{p+q} & + \cdots \\ \quad + y_\alpha \cdot Q_a \cdot x^q & + P_\alpha \cdot Q_a \cdot x^{p+q} & + \cdots \\ & + y_\alpha \cdot R_a \cdot x^r & + \cdots \end{array}\right\} = \pm k^2$$

ch, dass dieser Gleichung nur genügt werden kann, wenn $q = p$
$= p + q = 3p$, etc.; denn dabei geht sie über in

$$P_\alpha + y_\alpha \cdot P_a) \cdot x^p + (y_a \cdot Q_\alpha + P_a \cdot P_\alpha + y_\alpha \cdot Q_a) \cdot x^{2p}$$
$$y_a \cdot R_\alpha + P_a \cdot Q_\alpha + P_\alpha \cdot Q_a + y_\alpha \cdot R_a) \cdot x^{3p}$$
$$\cdots\cdots\cdots = \pm k^2$$

zerlegt sich in folgende einzelne:

$$y_\alpha = \pm k^2$$
$$P_\alpha + y_\alpha \cdot P_a = 0$$
$$Q_\alpha + P_a \cdot P_\alpha + y_\alpha \cdot Q_a = 0$$
$$R_\alpha + P_a \cdot Q_\alpha + P_\alpha \cdot Q_a + y_\alpha \cdot R_a = 0$$
etc.

as x in alle mit der gesuchten Function y zu vergleichenden Func-
en, dass sich dieselben in folgende Reihenform

$$y + x^p \cdot P + x^{2p} \cdot Q + x^{3p} \cdot R + \cdots$$

fgabe war also hinsichtlich der Einschränkung, mit welcher das
onen eingeführt werden müsse, eine Nebenuntersuchung nöthig,
ig ist, wenn man das x so einführt, dass die Mutation eine nach
n Potenzen aufsteigende Reihe wird.

B, so geht Gleichung 13 jetzt über in

$$\frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \cdot (\Delta y_\alpha - \Delta y_a) = 0$$

emeinschaftlichen Factor weglässt, so bekommt man

$$24)\quad \Delta y_\alpha - \Delta y_a = 0$$

23 hier ein, so bekommt man

$$(P_\alpha - P_a) \cdot x^p + (Q_\alpha - Q_a) \cdot x^{2p} \cdots\cdots = 0$$

zerfällt in folgende einzelne

$$26)\quad P_\alpha - P_a = 0$$
$$27)\quad Q_\alpha - Q_a = 0$$
etc. etc.

P_α aus 20 und aus 26; so bekommt man



Digitized by Google

$$28)\quad \frac{y_a^2 \pm k^2}{y_a^2} \cdot P_a = 0$$

und so fort.

Ausser den Weitläufigkeiten, die sich durch die unbestimmte Reihenform schon im vorigen Beispiele ergeben haben, war also hier noch eine Nebenuntersuchung nöthig hinsichtlich der Einschränkung, welcher die Exponenten p, q, r, · · · · unterworfen werden müssen.

Viertes Beispiel.

Man nehme Aufgabe 25, wo es heisst: „Man soll für die beiden unmittelbar mutablen Elemente y und z solche Functionen von x suchen, dast dabei

$$29)\quad U = x \cdot y \cdot z \cdot (x - y - z)$$

ein Maximum-stand wird.“ Man setze

$$30)\quad y + x^p \cdot P + x^q \cdot Q + x^r \cdot R + \cdots\cdots$$

und

$$31)\quad z + x^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{P} + x^{\mathfrak{q}} \cdot \mathfrak{Q} + x^{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{R} + \cdots\cdots$$

oder schlechthin $y + \Delta y$ und $z + \Delta z$ bezüglich an die Stelle des y und z in Gleichung 29 ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} 32)\quad U + \Delta U = x \cdot y \cdot z \cdot (x - y - z) &+ xy \cdot (x - y - 2z) \cdot \Delta z \\ &+ xz \cdot (x - z - 2y) \cdot \Delta y - xz \cdot \Delta y^2 \\ &+ x \cdot (x - 2y - 2z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - x \cdot y \cdot \Delta z^2 \\ &- x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot (\Delta y + \Delta z) \end{aligned}$$

Lässt man die zu Δy und Δz gehörigen Factoren zu Null werden, so bekommt man die beiden identischen Gleichungen $x - 2y - z = 0$ und $x - y - 2z = 0$. Daraus folgt $y = \frac{1}{3} \cdot x$ und $z = \frac{1}{3} \cdot x$. Gleichung 32 geht nun über in

$$\begin{aligned} 33)\quad U' + \Delta U = \frac{1}{27} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \left[\left(\Delta y + \frac{1}{2} \cdot \Delta z\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \Delta z^2\right] \\ - x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot (\Delta y + \Delta z) \end{aligned}$$

Führt man hier für Δy und Δz wieder bezüglich die Reihen 30 und 31 zurück, so erkennt man, dass ein Maximum-stand stattfindet, während den Exponenten p, $q > p$, $r > q$, etc., und während den Exponenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} > \mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} > \mathfrak{q}$, etc. was immer für ein positiver (ganzer oder gebrochener) Zahlenwerth beigelegt werden mag.

Man erkennt, dass man sich hier in diesem Beispiele durch die unbestimmte Reihenform nicht viel mehr Weitläufigkeiten gemacht hat, als durch die (in Aufgabe 25 angewendete) bestimmte Reihenform.

Fünftes Beispiel.

Man sucht für die beiden mutablen Elemente y und z solche Functionen von x, dass dabei der Gleichung

$$34)\quad y \cdot z = k^2$$

genügt, und folgender Ausdruck

$$35)\quad U = x \cdot y \cdot z \cdot (x - y - z)$$

ein Maximum-stand wird. Man setze die Reihen 30 und 31 bezüglich statt y und z in Gleichung 34 ein, so bekommt man


Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{llll} y\cdot z + y\cdot\mathfrak{P}\cdot x^{\mathfrak{p}} + y\cdot\mathfrak{Q}\cdot x^{\mathfrak{q}} & + y\cdot\mathfrak{R}\cdot x^{\mathfrak{r}} & + \cdots \\ \quad + z\cdot P\cdot x^{p} + P\cdot\mathfrak{P}\cdot x^{p+\mathfrak{p}} & + P\cdot\mathfrak{Q}\cdot x^{p+\mathfrak{q}} & + \cdots \\ \qquad\qquad + z\cdot Q\cdot x^{q} & + \mathfrak{P}\cdot Q\cdot x^{\mathfrak{p}+q} & + \cdots \\ & + z\cdot S\cdot x^{r} & + \cdots \end{array}\right\} = k^2$$

Man sieht aber sogleich, dass dieser Gleichung nur genügt werden kann, wenn $p = \mathfrak{p}$, wenn $q = \mathfrak{q} = p + \mathfrak{p} = 2p$, wenn $r = \mathfrak{r} = p + \mathfrak{q} = \mathfrak{p} + q = 3p$, etc.; denn dabei geht sie über in

$$\begin{array}{l} y\cdot z + (y\cdot\mathfrak{P} + z\cdot P)\cdot x^{p} + (y\cdot\mathfrak{Q} + P\cdot\mathfrak{P} + z\cdot Q)\cdot x^{2p} \\ \quad + (y\cdot\mathfrak{R} + P\cdot\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\cdot Q + z\cdot R)\cdot x^{3p} \\ \quad + \cdots\cdots = k^2 \end{array}$$

und diese Gleichung zerlegt sich in folgende einzelne:

$$36)\quad y\cdot z = k^2$$

$$37)\quad y\cdot\mathfrak{P} + z\cdot P = 0$$

$$38)\quad y\cdot\mathfrak{Q} + P\cdot\mathfrak{P} + z\cdot Q = 0$$

$$39)\quad y\cdot\mathfrak{R} + P\cdot\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\cdot Q + z\cdot R = 0$$

etc. etc.

Die beiden Reihen 30 und 31 nehmen also bezüglich folgende Form an:

$$40)\quad y + x^{p}\cdot P + x^{2p}\cdot Q + x^{3p}\cdot R + \cdots\cdots$$

$$41)\quad z + x^{p}\cdot\mathfrak{P} + x^{2p}\cdot\mathfrak{Q} + x^{3p}\cdot\mathfrak{R} + \cdots\cdots$$

Wenn man die Mutation des z als abhängig nehmen will, so gibt sich aus 37

$$42)\quad \mathfrak{P} = -\frac{z}{y}\cdot P$$

aber aus 38 ergibt sich

$$43)\quad \mathfrak{Q} = \frac{z}{y^2}\cdot P^2 - \frac{z}{y}\cdot Q$$

und so fort; und die Reihe 41 geht jetzt in folgende über

$$44)\quad z + x^{p}\cdot\left(-\frac{z}{y}\cdot P\right) + x^{2p}\cdot\left(\frac{z}{y^2}\cdot P^2 - \frac{z}{y}\cdot Q\right) + \cdots\cdots$$

Man hat nun die Reihen 40 und 44 bezüglich statt y und z in Gleichung 35 einzusetzen; und dadurch bekommt man

$$\begin{array}{l} U + \Delta U = xyz\cdot(x - y - z) + x^{p}\cdot xz\cdot(z - y)\cdot P \\ \qquad + \cdots\cdots \end{array}$$

Lässt man nun den bei P befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung

$$45)\quad z - y = 0$$

Aus den beiden Gleichungen $z - y = 0$ und $y\cdot z = k^2$ folgt $y = z = \pm k$, d. h. y und z sind constant und einander gleich.

I) Setzt man $y = z = +k$, so wird $U' = k^2\cdot x\cdot(x - 2k)$; und das Prüfungsmittel ergibt sich dadurch, dass man die Reihen 40 und 44, d. h. die Reihen

$$k + x^{p}\cdot P + x^{2p}\cdot Q + x^{3p}\cdot R + \cdots\cdots$$

und

$$k + x^{p}\cdot(-P) + x^{2p}\cdot\left(\frac{P^2}{k} - Q\right) + \cdots\cdots$$

bezüglich statt y und z in Gleichung 35 einsetzt.

II) Setzt man $y = z = -k$, so wird $U' = k^2\cdot x\cdot(x + 2k)$; und das Prüfungsmittel ergibt sich dadurch, dass man die Reihen 40 und 44, d. h. die Reihen

$$-k + x^{p}\cdot P + x^{2p}\cdot Q + x^{3p}\cdot R + \cdots\cdots$$

und

$$-k + x^{p}\cdot(-P) + x^{2p}\cdot\left(-\frac{P^2}{k} - Q\right) + \cdots\cdots$$

bezüglich statt y und z in Gleichung 35 einsetzt.

Digitized by Google

Hier war also eine doppelte Nebenuntersuchung nöthig; denn man musste untersuchen,

1) welcher Einschränkung die der unmittelbaren Mutation Δy angehörigen Exponenten p, q, r . . . . . unterworfen werden müssen, und

2) in welcher Beziehung die der mittelbaren Mutation Δz angehörigen Exponenten 𝔭, 𝔮, 𝔯 . . . . . zu den Exponenten p, q, r . . . . . stehen.

Diese doppelte Nebenuntersuchung wäre aber nicht nöthig gewesen, wenn man für die unmittelbare Mutation die nach lauter positiven ganzen Potenzen des x aufsteigende Reihenform genommen hätte.

Schluss dieses theoretischen Nachtrages.

Es wären unter andern Beispielen auch noch solche vorzunehmen, zu deren Lösung gemischte Mutationen nöthig sind. Dieses wäre aber ein rein überflüssiges Unternehmen; denn an den hier vorgenommenen, ziemlich einfachen, fünf Beispielen hat man zur Genüge erkannt, welche bedeutenden Vortheile man hat, wenn man den unmittelbaren Mutationen die bestimmte, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des Fortschreitungselementes aufsteigende Reihenform gibt.

Digitized by Google

Inhalt des zweiten Bandes.

Zweite Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Differentiale vorkommen.

A) Aufgaben, wo nur eine einzige Function mit einem einzigen absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht wird.

(Die Buchstaben p, q, r . . . sind zur Abkürzung bezüglich statt der totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ gesetzt worden.)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

B) Aufgaben, wo zwei gleichzeitig bestehende Functionen mit einem und demselben Veränderlichen gesucht werden.

(Die Buchstaben p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$ .... sind zur Abkürzung bezüglich statt der totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ .... gesetzt werden.)


Digitized by Google

Digitized by Google

C) Aufgaben, wo eine Function mit zwei absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht wird.

(Die Buchstaben p, q, r, s, t . . . . sind zur Abkürzung bezüglich statt der partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx.dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ . . . . gesetzt worden.)


Digitized by Google

Digitized by Google

Dritte Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, wo Integrale vorkommen.

A) Aufgaben, wo Functionen mit einem einzigen absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht werden.

(Die Buchstaben p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$, r, $\mathfrak{r}$, ... sind zur Abkürzung bezüglich anstatt der totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ . . . . gesetzt worden.)

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

B) Aufgaben, wo Functionen mit mehr als einem absolut unabhängigen Veränderlichen gesucht werden.

(Die Buchstaben p, q, r, s, t . . . . sind zur Abkürzung bezüglich statt der partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x z}{dx}$, $\frac{d_y z}{dy}$, $\frac{d_x^2 z}{dx^2}$, $\frac{d_x d_y z}{dx \cdot dy}$, $\frac{d_y^2 z}{dy^2}$ . . . . gesetzt worden.)

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Erster theoretischer Nachtrag,

betreffend

die beiden von Euler und Lagrange mitgetheilten Methoden für die Auflösung der (von Euler) sogenannten relativen Grössten und Kleinsten.

Zweiter theoretischer Nachtrag,

enthaltend

Digitized by Google

Schlussbemerkungen,
welche historischen Inhalts sind, befinden sich:

1. auf Seite 245 zu Aufgabe 160
2. » » 274 » » 166
3. » » 364 » » 186
4. » » 374 » » 187
5. » » 378 » » 188
6. » » 399 » » 194
7. » » 403 » » 195
8. » » 408 » » 196
9. » » 414 » » 197
10. » » 419 » » 198
11. » » 423 » » 199
12. » » 426 » » 200
13. » » 446 » » 205
14. » » 458 » » 208
15. » » 462 » » 209
16. » » 466 » » 210
17. auf Seite 469 zu Aufgabe 211
18. » » 473 » » 212
19. » » 485 » » 214
20. » » 490 » » 215
21. » » 503 » » 219
22. » » 522 » » 228
23. » » 530 » » 232
24. » » 574 » » 251
25. » » 610 » » 259
26. » » 620 » » 261
27. » » 623 » » 262
28. » » 633 » » 265
29. » » 671 die ganze zweite Auflösung.
30. » » 708 zu Aufgabe 282
31. » » 737 » » 288

Digitized by Google

Verzeichniss einiger Druckfehler
in diesem zweiten Bande.

Seite 264, Zeile 2 steht $\int_a^\alpha (\sqrt[3]{(px - m^2)}) \cdot dx$ statt $\int_a^\alpha (\sqrt[3]{(px - m)^2}) \cdot dx$.

Seite 368, Zeile 6 von unten, ganz hinten, steht $\left(\mathfrak{K} + \frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_\alpha$ statt $\left(\mathfrak{K} + \frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_a$

Seite 368, Zeile 4 von unten, ganz hinten, steht $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta\alpha$ statt $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$

Seite 373, Zeile 15, ganz hinten, steht $\vartheta^2 a$ statt ϑa^2.

Seite 387, Zeile 19, steht $- 0$ statt $= 0$.

Seite 397, Zeile 6 von unten, steht $- \frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$ statt $= \frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Seite 442 sollte, soweit es die Aufgabe 204 betrifft, statt m ein anderer Buchstabe stehen, weil in dieser Aufgabe das m schon einmal in einer andern Bedeutung vorkommt.

Seite 514, Zeile 16, steht $x + F$ statt $(x + F)^2$.

Seite 517 ist Aufgabe 227 falsch gestellt. Sie sollte heissen: „Unter allen ebenen Cur-„ven, deren zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen „Gränzordinaten erstreckte Bögen gleiche Länge haben und auch gleichen Flä-„cheninhalt einschliessen, sucht man diejenige, welche etc.“

Seite 533, Zeile 2. Hier fehlt zuletzt: $= 0$.

Seite 559, Zeile 17 steht $\int_a^a v \cdot dx$ statt $\int_a^\alpha v \cdot dx$.

Seite 615, Zeile 14 steht XV statt XVI.
Zeile 15 steht XV statt XVI.
Zeile 18 steht XVI statt XVII.
Zeile 19 steht XIII statt XIV.
Zeile 23 steht XVII statt XVIII.
Zeile 23 steht XVIII statt XIX.
Unterste Zeile steht XIX statt XX.

Seite 616, Zeile 11 steht XX statt XXI.
Zeile 14 steht XXIII statt XXIV.

Digitized by Google

Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 8.

Fig. 11.

Digitized by Google

Verzeichniss einiger Druckfehler
in diesem zweiten Bande.

Seite 264, Zeile 2 steht $\int_a^\alpha (\sqrt[3]{(px - m^2)}) \cdot dx$ statt $\int_a^\alpha (\sqrt[3]{(px - m)^2}) \cdot dx$.

Seite 368, Zeile 6 von unten, ganz hinten, steht $\left(\mathfrak{K} + \frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_\alpha$ statt $\left(\mathfrak{K} + \frac{\mathfrak{p}}{u \cdot z}\right)_a$

Seite 368, Zeile 4 von unten, ganz hinten, steht $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a \cdot \vartheta\alpha$ statt $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \cdot \vartheta\alpha$

Seite 373, Zeile 15, ganz hinten, steht $\vartheta^2 a$ statt ϑa^2.

Seite 387, Zeile 19, steht $- 0$ statt $= 0$.

Seite 397, Zeile 6 von unten, steht $- \frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$ statt $= \frac{B}{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Seite 442 sollte, soweit es die Aufgabe 204 betrifft, statt m ein anderer Buchstabe stehen, weil in dieser Aufgabe das m schon einmal in einer andern Bedeutung vorkommt.

Seite 514, Zeile 16, steht $x + F$ statt $(x + F)^2$.

Seite 517 ist Aufgabe 227 falsch gestellt. Sie sollte heissen: „Unter allen ebenen Cur-„ven, deren zwischen den (zu $x = a$ und $x = \alpha$ gehörigen) rechtwinkeligen „Gränzordinaten erstreckte Bögen gleiche Länge haben und auch gleichen Flä-„cheninhalt einschliessen, sucht man diejenige, welche etc."

Seite 533, Zeile 2. Hier fehlt zuletzt: $= 0$.

Seite 559, Zeile 17 steht $\int_a^a v \cdot dx$ statt $\int_a^\alpha v \cdot dx$.

Seite 615, Zeile 14 steht XV statt XVI.
Zeile 15 steht XV statt XVI.
Zeile 18 steht XVI statt XVII.
Zeile 19 steht XIII statt XIV.
Zeile 23 steht XVII statt XVIII.
Zeile 23 steht XVIII statt XIX.
Unterste Zeile steht XIX statt XX.

Seite 616, Zeile 11 steht XX statt XXI.
Zeile 14 steht XXIII statt XXIV.

Digitized by Google

Fig. 1.

Fig. 4.

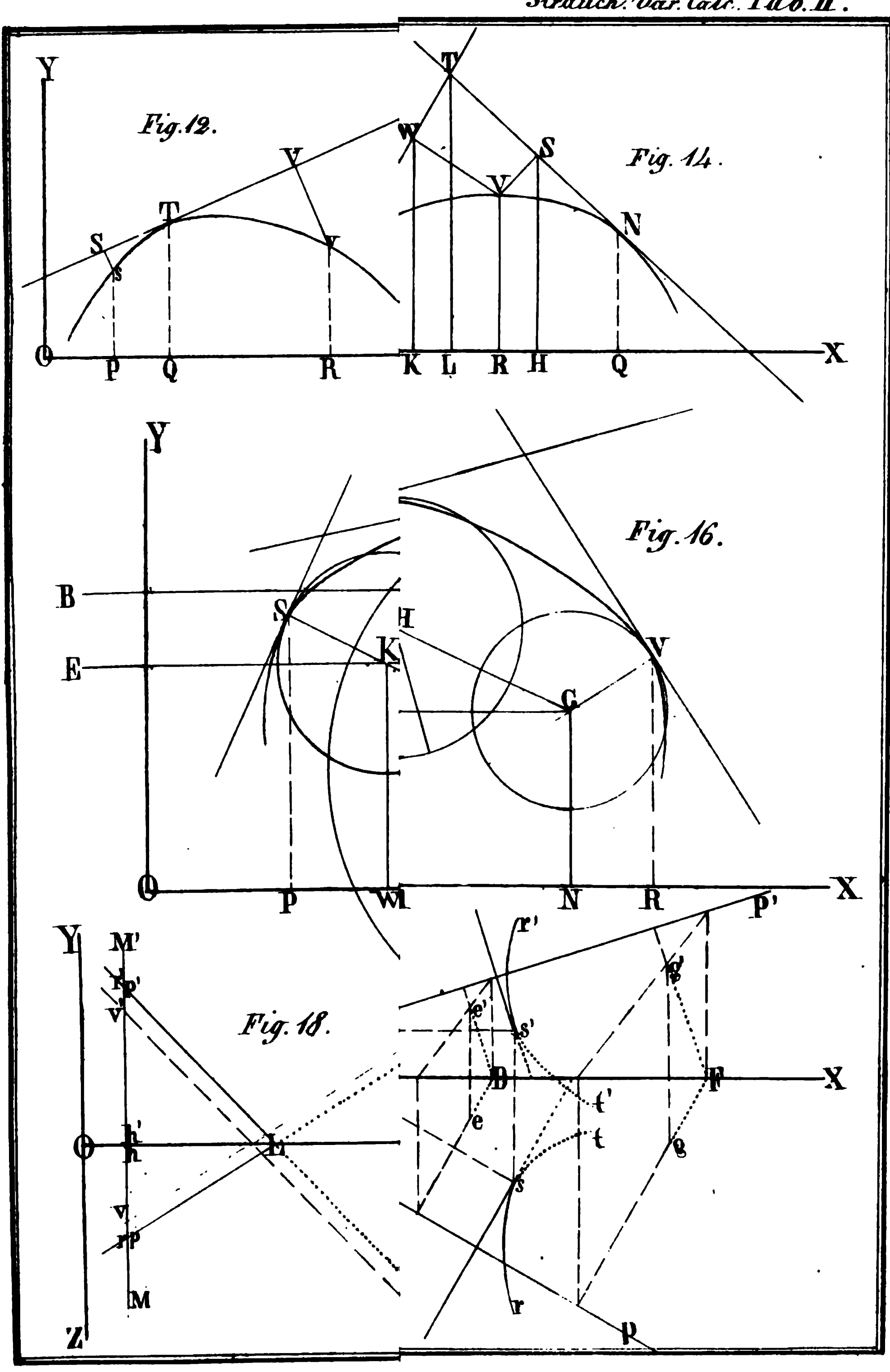
Fig. 5.

Fig. 8.

Fig. 11.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

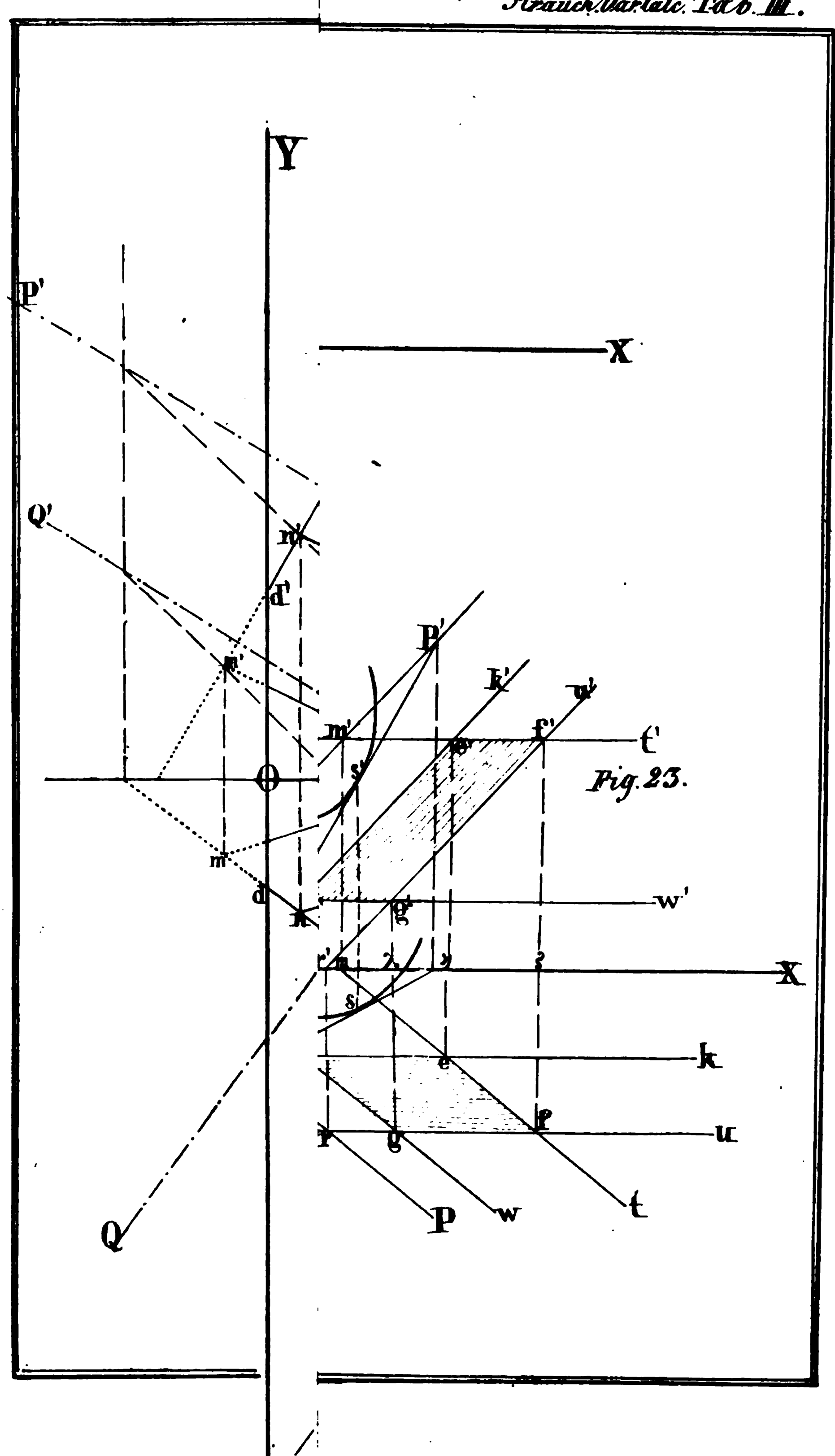


Fig. 23.

Digitized by Google

Digitized by Google

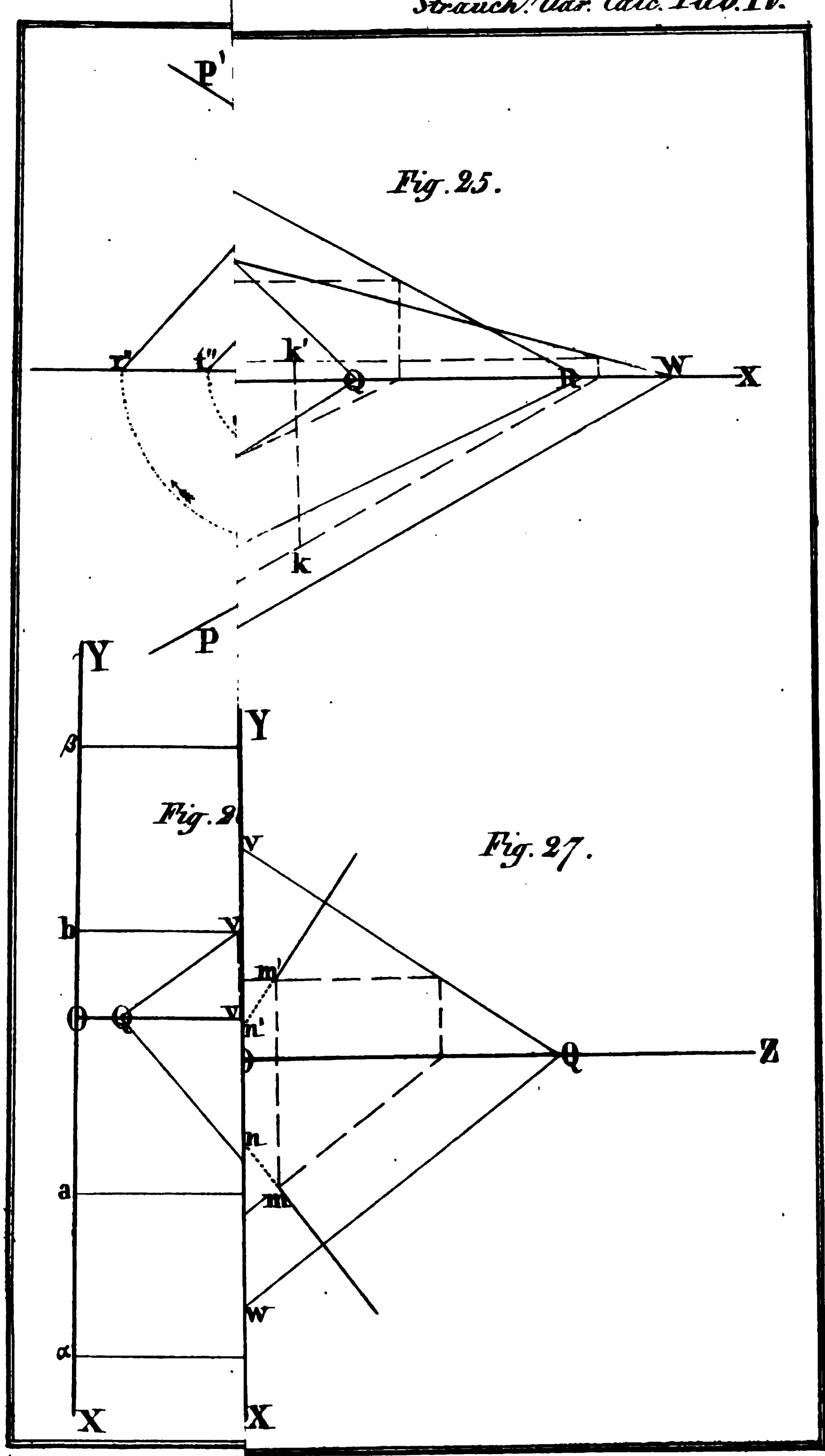
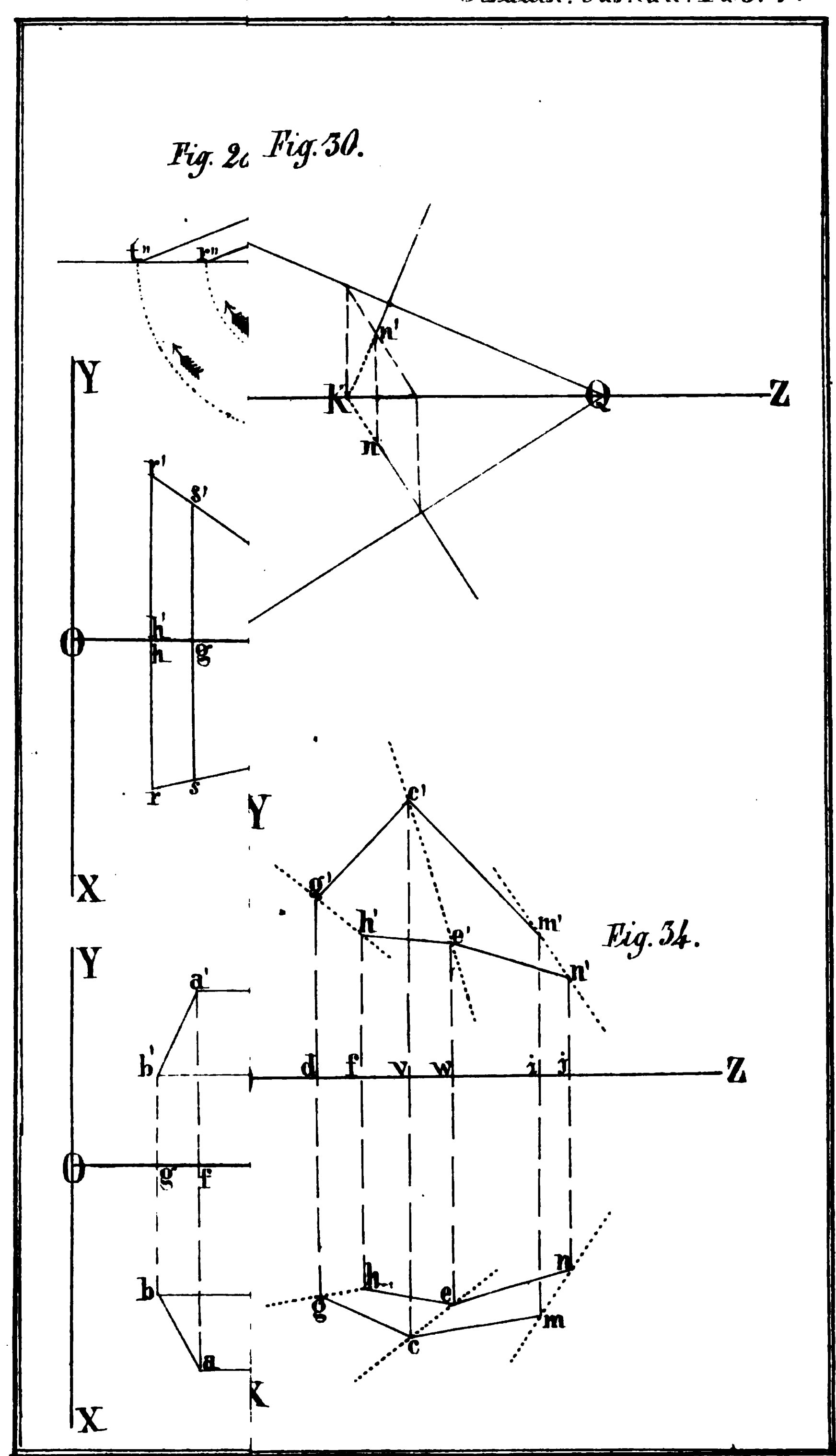


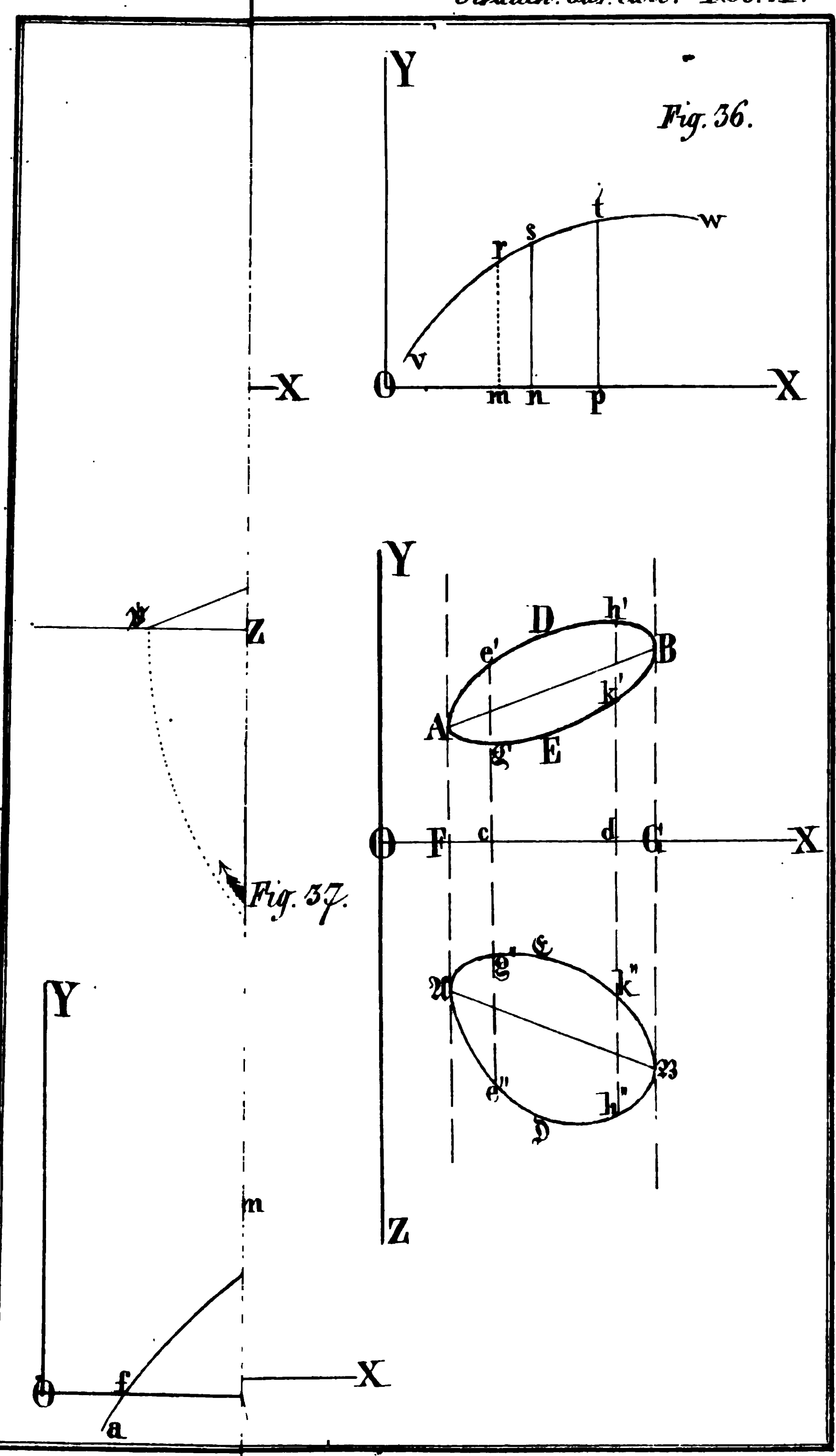
Fig. 25.
p'
r'
t''
k'
Q
R
W
X
k
p
Y
β
Fig. 2
Y
v
Fig. 27.
b
V
m'
0
Q
V
n'
Q
Z
n
a
m
w
α
X
X

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

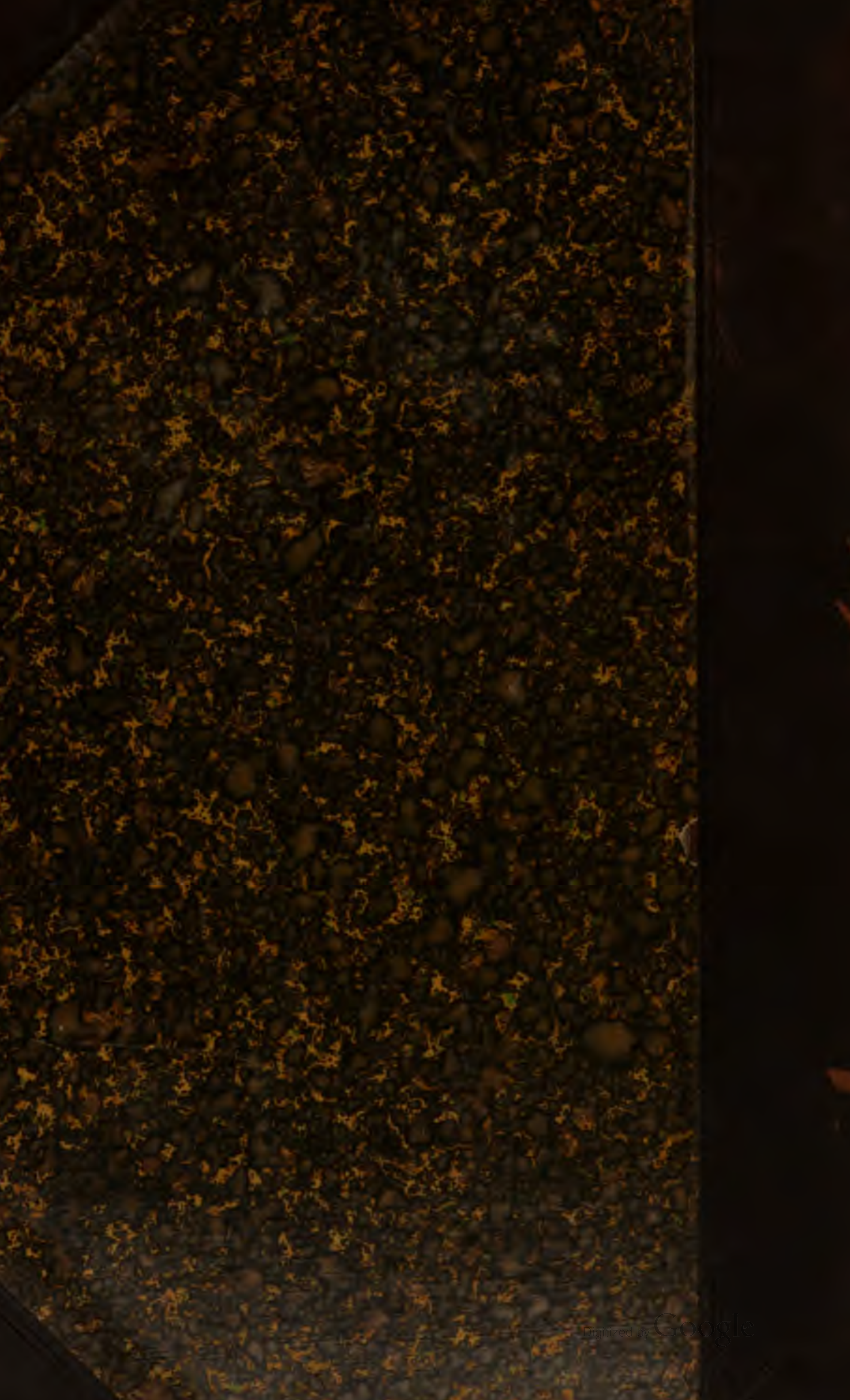
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google